УДК 51(091)

Г. И. Синкевич, к.ф.-м.н.

СПбГАСУ, Санкт-Петербург

galina.sinkevich@gmail.com

Опубликовано: Синкевич Г.И. История метода касательных // Математика и математическое моделирование: проблемы и перспективы. Международная научно-практическая конференция. Оренбург, 20-21 мая 2015 г.: сборник научных статей. – Оренбург: Издательство ОГПУ, 2015. – С.246-250.

История метода касательных

В XVII веке решение алгебраических уравнений производилось как точно, так и приближённо. В XVII веке уже была богатая традиция вычисления корней алгебраических уравнений, возникшая в античной математике, обогащённая арабской математикой, работами Франсуа Виета (1540–1603), изданными в 1646 году и увенчанная методом Рене Декарта (1596–1650). Как правило, разыскивались положительные корни. В 1637 году в Лейдене вышло первое издание его «Рассуждения о методе», содержащее в качестве третьего приложения «Геометрию», содержащую также и методы решения алгебраических уравнений. Корни уравнения искались как точки пересечения некоторых плоских кривых, как правило, прямой, парабол и окружностей. Декарт утверждал важность представления уравнений с право частью, равной нулю. Он составлял уравнения с помощью перемножения двучленов и указал, что «Всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений» [1, с. 76]. Там же Декарт и привёл своё правило корней: если среди корней уравнения нет «невозможных» (то есть комплексных), то «истинных корней может быть столько, сколько раз в нём изменяются знаки + и –, а ложных[1] – сколько раз

[1] отрицательных

встречается подряд два знака + или дважды знаки –. Например, из того, что в уравнении $x^4-4x^3-19xx+106x-120\infty 0$ после $+x^4$ имеется $-4x^3$, что представляет собой перемену знака + на –, после $-19xx$ имеется $+106x$, после $+106x$ имеется – 120, что даёт ещё две перемены знака, мы узнаём, что существуют три истинных корня. Имеется также один ложный корень, ибо встречаются подряд два знака минуса при $4x^3$ и $19xx$» [1, с. 77]. Знак ∞ использовался как знак равенства. Общее доказательство этого правила принадлежит Гауссу (1828). Декарт не ставил проблемы отделения и локализации корней.

Сам геометрический образ задачи не соответствовал поиску пересечения кривой с осью, а осуществлялся как поиск точек пересечения двух кривых. Поэтому образ графика, имеющего на краях отрезка ординаты разных знаков, в терминах алгебры возникнуть не мог. И. Ньютон (I.Newton, 1642–1727), например, представлял переменные как изменяющиеся во времени, а не в зависимости друг от друга [2]. Представление о линии как о геометрическом месте точек началось с работы Лопиталя о конических сечениях, было развито Эйлером, а общий подход сформировался лишь в XIX веке.

У Ньютона происходит расширение понятия числа: «Под числом разумеется не собрание многих единиц, а скорее абстрактное отношение одного количества к другому количеству того же рода, которое рассматривается как единица» [3, с. XIII]. Ньютон разделял числа целые, отношения целых чисел (в нашем понимании рациональные) и surdus (глухие, невыразимые – в нашем понимании иррациональные). Как правило, разыскивался один положительный корень уравнения, в работах Ньютона задача при этом считалась решённой. Ньютон упоминает также о «невозможных» (мнимых) решениях и даже даёт им геометрическую интерпретацию, но это находится за пределами нашего вопроса.

В 1669 году Ньютон написал «Analysis per aequationes numero terminorum infinitas» (опубликован в 1711 году), в русском переводе [3, с. 3–24]), в котором рассматривает различные методы решения уравнений и в котором впервые появляется его метод, получивший впоследствии название метода касательных.

Для приближённого вычисления корня нужно его сначала локализовать, то есть определить интервал, в котором находится только один искомый корень. В 1658 году голландский математик Иоганн Гудде (I. Hudde, 1628–1704) предложил способ отделения корней с помощью производного уравнения, а именно такого вспомогательного уравнения, каждый элемент которого получался умножением на свой прежний показатель степени и делением на неизвестное[2]. В нашем понимании это было дифференцирование многочлена. Мишель Ролль в 1690 году создал метод каскадов, позволявший выделять корневой интервал с помощью производных [4].

Свой метод касательных Ньютон описал в двух работах: “Analysis per aequationes numero terminorum infinitas” 1669 года («Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», опубликован в 1711 году) [3, с. 3–24]), и в «Методе флюксий» (De methodis fluxionum et serierum infinitarum» 1671 г., опубл. в английском переводе как «Method of Fluxions» в 1736 г.) [3, с. 26–166].

Ньютон, до появления «Трактата» Ролля, пользуясь методом касательных, не проверял знаки функции на краях интервала, что можно видеть, например, в его «Method of Fluxions»1671 г. Во всех работа Ньютона, изданных после появления трактата Ролля (а Парижская академия и английское Королевское общество обменивались научными трактатами), разделение корней уже упоминается, хотя без имени Ролля [5].

Ньютон для определения границ корней использовал оценки с помощью коэффициентов уравнения по теореме Виета, что позволяло ему получить верхнюю и нижнюю границу всех корней, а также по Декарту определить количество положительных и отрицательных корней. Некоторые виды замен

---

[2] Реконструкция метода Гудде дана А.П. Юшкевичем в его комментариях к переводу Лопиталя «Анализ бесконечно малых» [6, с. 400].

(например, замена $y=\frac{1}{x}$, либо замена $x=x_0+\alpha$, где x_0 – первое приближение, а α – малая величина) позволяла ему определить ближайший к нулю корень. После этого в качестве первого шага использовалось правило ложного положения (Regula falsi) в таком виде: в силу малости *x* уравнение

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0 \tag{1}$$

можно заменить на уравнение $a_0+a_1x=0$, откуда $x=x_0=-\frac{a_0}{a_1}$ – первое приближение. Подставляем его в (1), получаем новое уравнение

$$b_0+b_1y+b_2y^2+\ldots+b_ny^n=0 \tag{2}$$

Вновь отбрасываем все члены, кроме двух первых. Остаётся $b_0+b_1y=0$, откуда $y=y_0=-\frac{b_0}{b_1}$ и второе приближение берётся $x=x_0+y_0$, и так далее. Это и есть основная идея Ньютона. Рассмотрим, как он применяет её в “Analysis per aequationes numero terminorum infinitas” на примере уравнения $y^3-2y-5=0$ [7, с. 9–11]:

Сначала Ньютон замечает, что число 2 отличается от искомого корня менее чем на одну десятую часть. Тогда $2+p=y$, подставляем в исходное уравнение, что даёт $p^3+6p^2+10p-1=0$. Пренебрегая двумя старшими членами уравнения в силу малости *p*, получим $10p-1=0$, откуда $p=\frac{1}{10}=0{,}1$ и далее $0{,}1+q=p$. Подставляем во второе уравнение, получаем $q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0$, откуда $11{,}23q+0{,}061=0$ и $q=-0{,}0054$. Далее $-0{,}0054+r=q$, в получаемом уравнении q^3 отбрасывается в силу его ничтожности, остаётся $6{,}3r^2+11{,}16196r+0{,}000541708=0$, где $6{,}3r^2$ отбрасывается. Получаем $r=\frac{-0{,}000541708}{11{,}16196}=-0{,}00004853$.

Вычитая отрицательную часть результата из положительной, получаем искомый результат 2,09455147.

Сходимость этого метода Ньютон не анализировал, лишь указав, что возможно как приближение к истинному корню, так и удаление от него: «Следует отметить, что если бы я в этом примере сомневался в том, достаточно ли подходит к истинному значению $0{,}1 = p$, то я вместо $10p - 1 = 0$ взял бы $6p^2 + 10p - 1 = 0$ и написал бы первый знак его корня в результате. Определять второй или третий знаки результата таким путём следует только тогда, когда в последнем полученном уравнении квадрат коэффициента предпоследнего члена не более чем удесятерённое произведение последнего члена на коэффициент предпоследнего.

С другой стороны, ты большей частью облегчишь труд, в особенности в случае уравнений высоких степеней, если все знаки, вводимые в результат, будешь определять указанным образом (то есть определяя меньший корень уравнения, получаемого из трёх последних членов нового уравнения); при этом ты получишь в результате вдвое больше знаков.

Этот метод решения уравнений, - не знаю, опубликованный или нет, - мне кажется в сравнении с другими более простым и удобным для употребления. Доказательство его явствует из самого способа действия, на основании чего его легко в случае необходимости вспомнить» (Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов, [7, с. 11].

Фактически, рассуждение Ньютона таково:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \ldots$$

Пусть $x - x_0 = \Delta x$, тогда $x = x_0 + \Delta x$, $f(x + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)\Delta x}{1!} + \frac{f''(x_0)\Delta x^2}{2!} + \ldots$, где слагаемые, начиная с третьего, –

это бесконечно малые более высокого порядка, следовательно, $f(x_0) \cong f(x+\Delta x) - f'(x_0)\Delta x$. Но так как $f(x_0)=0$ по определению, то $f(x+\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$ и $\Delta x = \dfrac{f(x+\Delta x)}{f'(x)}$.

Самое поразительное, что во время создания этого метода ещё не была известна формула Тейлора, и Ньютон шёл интуитивно. Он рассматривал последовательность полиномов, как мы видели из примера.

Этот метод завоевал популярность прежде всего благодаря своей быстрой сходимости. Он был изложен также в книге Дж. Валлиса 1685 года «A Treatise of Algebra both Historical and Practical». В 1690 в Англии опубликован трактат Дж. Рафсона (1647/48-1715) «Analysis Aequationum Universalis» [8], содержавший изложение метода Ньютона-Рафсона, или метода касательных. В отличие от Ньютона, Рафсон рассматривает последовательность не полиномов, а значений переменной. В 1707 году вышла книга Ньютона «Arithmetica Universalis» (Всеобщая арифметика), содержащая численные методы решения уравнений [9]. В этой книге Ньютон уже применяет изоляцию корня по Роллю.

В 1740 году метод Ньютона описал Томас Симпсон [10], уже употребляя производную.

В 1768 году французский астроном и математик из Марселя Муррайль (Jean-Raymond Mourraille, 1721–1808) в своём трактате «Traité de résolution des équations algébriques en général» показал, что кривая $y = f(x)$ на интервале между корнем и его приближением должна быть направлена выпуклостью к оси абсцисс [11].

В 1817 году Больцано сформулировал критерий сходимости последовательности [12], а в 1821 году Коши ввёл его в систематическое изложение анализа [13]. Сейчас он носит название критерия Коши и эквивалентен методу вложенных отрезков.

На его основе метод касательных проанализировал и привёл к современному виду Жан Батист Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier; 1768-1830), французский математик и физик. Он обращался к проблеме решения алгебраических уравнений и сходимости численных методов в течение 18 лет, начиная с 1797 года. Рукопись была закончена в 1826 году, но опубликована была уже после его смерти, в 1831 году [14].

Фурье рассматривает историю методов решения уравнений $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ у Виета, Харриота, Оутреда, Ньютона, Валлиса [14, с. стр.185–187], Ролля [14, с.116] и Лагранжа; отмечает, что Ньютон не умел изолировать корни [14, с. 116].

Условия сходимости метода Ньютона Фурье обсуждает на стр. 86, соединяя их с методом каскадов Ролля, то есть при сужении интервала проверяет знаки функции на краях интервала. У Фурье этот метод уже представляет собой процесс стягивания интервала, содержащего корень уравнения. На основании анализа знаков производной Фурье получает формулу $\omega' = \omega + \frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}$, и условие сходимости $\omega' = -\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{f''x}{f'x}$ (обозначения оригинала), [14, с. 220]. Далее он рассматривает примеры, в том числе и уравнение, которое рассматривал Ньютон $y^3 - 2y - 5 = 0$.

Условия применимости метода Ньютона относительно поиска мнимых корней отметил в 1879 году Артур Кэли в маленькой заметке «The Newton-Fourier imaginary problem» в разделе «Пожелания и предложения» [15]. По его словам, легко локализовать мнимый корень в случае квадратного уравнения, но задача существенно усложняется при больших степенях.

В 1922 году С. Банахом был сформулирован принцип сжимающих отображений [16], а метод касательных был обобщён на его основе в нескольких работах Л.В. Канторовича, который посвятил методу Ньютона несколько работ с 1937 по 1957 годы, в том числе [17].

На примере истории метода касательных мы видим возникновение и роль основообразующего принципа теории действительного числа.

Список использованной литературы

1. Декарт Р. Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Р. Декарт // Перевод, примечания и статья А.П. Юшкевича. М.-Л.: ОНТИ – 1938 г. – 302 с.
2. Мордухай-Болтовской Д. Д. Из прошлого аналитической геометрии / Д.Д. Мордухай-Болтовской // // Математическое образование. — 1928. — № 3. — С. 107—113.
3. Ньютон И. Математические работы / И. Ньютон // Перевод с латинского, вводная статья и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. Москва-Ленинград: ОНТИ. – 1937 г. – XV+452 с.
4. Sinkiewich G. I. Historia dwóch twierdzeń analizy matematycznei: M. Rolle, B. Bolzano, A. Cauchy / G.I. Sinkiewich // Dzieje matematyki polskiei II. Praca zbiorowa pod redakcją Witolda Więsława. Institut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego. Wrocław. – 2013. – P. 165 – 181.
5. Синкевич Г.И. Отделение корней алгебраического уравнения в XVII и XVIII веке. Метод каскадов Мишеля Ролля и метод многоугольника Исаака Ньютона / Г.И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Вып. 20. СПб.: Издательство СПбГАСУ 2014. – с. 22–38.
6. Лопиталь Г. Ф. Анализ бесконечно малых / Г.Ф. Лопиталь // Пер. с фр. Н.В. Леви под редакцией и со вступительной статьёй А.П. Юшкевича. – М.-Л.: ГТТИ. – 1935 г. – 431 с.

7. Ньютон И. Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов // Математические работы. Пер. Мордухай-Болтовского. – М.-Л. – 1937 г. – 478 с., с. 3–24.
8. Raphson J. Analysis Aequationum Universalis. Londini. – 1702. – 95 p.
9. Ньютон И. Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе / И. Ньютон // Перевод, статья и комментарии А.П. Юшкевича. – М.: АН СССР. – 1948 г. – 446 с.
10. Simpson T. Essays on several curious and useful subjects, in speculative and mix'd mathematicks illustrated by a variety of examples / T. Simpson. London: Woodfall. – 1740. – 534 p.
11. Martzloff J.-C. A History of Algorithms From the Pebble to the Micro-chip / J.-C. Martzloff J.-C., M. Guillemot, E. Barbin, A. Michel-Pajus, A. Djebbar, J. Borowczyk // traduction anglaise. Springer. – 1999. – 524 p.
12. Bolzano, B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege/ B. Bolzano. – Prag: Gottlieb Haase. – 1817. – 60 s.
13. Cauchy, A.-L. Course d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique / A.-L. Cauchy // Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Série 2, tome 3 / Analyse algébrique p.5–5+i-viii+17–471. Paris: Gauthier-Villars et fils. - 1882–1974.
14. Fourier J.B.J. Analyse des équations determinées. Première partie. Paris: Chez Firmin Didot frères. – 1831. – 258 p.
15. Cayley A. The Newton-Fourier Imaginary Problem / American Journal of Mathematics. – 1879. – Vol. 2, No. 1 (Mar., 1879), p. 97.
16. Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales / S. Banach // Fundamenta Mathematicae. – 1922. – 3. – p. 133–182.
17. Канторович Л.В. О методе Ньютона / Л.В. Канторович // Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения

института, Труды МИАН СССР, 28, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1949. – с. 104–144.