

Федеральное агентство по образованию

**Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет**

В. В. КАРПОВ, А. Ю. САЛЬНИКОВ

**ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ
И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ
ПРИ РАСЧЕТЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2009**

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор Ю. К. Демьянович (СПбГУ); канд. физ.-мат. наук, доцент Т. В. Рябикова (ПГУПС)

В. В. Карпов, А. Ю. Сальников

Вариационные методы и вариационные принципы механики при расчете строительных конструкций: учеб. пособие / СПбГАСУ. – СПб., 2009. – 75 с.

ISBN 978-5-9227-0144-0

Изложены все основные численные методы, используемые для решения задач прочности и устойчивости строительных конструкций, выбора рациональных параметров оболочек, а также для вывода корректных соотношений при наличии нерегулярностей у оболочек. Показано применение вариационных принципов механики для вывода уравнений равновесия (движения) и естественных краевых условий.

Пособие может быть использовано студентами специальности «Промышленное и гражданское строительство», «Прикладная математика» (направление «Строительство»), магистрантами, аспирантами.

Ил. 7. Библиогр.: 48 назв.

Рекомендовано Редакционно-издательским советом СПбГАСУ в качестве учебного пособия.

ISBN 978-5-9227-0144-0

© В. В. Карпов, А. Ю. Сальников, 2009

© Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2009

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании строительных объектов необходимо проводить расчет применяемых строительных конструкций. Особенности трудности возникают при расчете оболочечных конструкций.

Тонкостенные оболочечные конструкции находят большое применение в судостроении, самолетостроении, строительстве космических объектов, машиностроении, строительстве. Для придания большей жесткости они подкрепляются ребрами, но по технологическим причинам могут иметь и вырезы. При проектировании облегченных, но высокопрочных объектов и сооружений необходимо исследование устойчивости таких конструкций. Решение проблемы в линейной постановке как задач Эйлера не дает истинной картины деформирования таких конструкций, так как у ребристых оболочек (да и у гладких) вначале может наступить местная потеря устойчивости (прохлупывание части оболочки между ребрами), а затем уже общая. Борьба за уменьшение веса конструкции приводит к необходимости уточнения и усовершенствования математической модели конструкции и выбору устойчивого и наиболее точного алгоритма ее исследования. Это в свою очередь существенно усложняет решения поставленной задачи исследования и требует использования самой совершенной вычислительной техники для ее решения. Следует обратить внимание еще и на то, что при исследовании устойчивости тонкостенных оболочек (в частности, подкрепленных ребрами или ослабленных вырезами) возникает несколько мелких, но немаловажных деталей, связанных как с объектом исследования, так и с решением нелинейных задач: петлеобразование графика «нагрузка – прогиб оболочек», ветвление решений, различные формы потери устойчивости, обход критических точек и т. д. Вместе с задачей исследования прочности и устойчивости рассматриваемых конструкций должна решаться и задача выбора оптимальных параметров конструкций (числа и жесткости ребер, кривизны).

В начале XX века в связи с потребностями кораблестроения и особенно, начиная с 30-х годов, в связи с потребностями самолетостроения стала развиваться геометрически нелинейная теория пластин и оболочек. Появилась возможность исследовать устойчивость таких конструкций с учетом нелинейных факторов. В конце 40-х годов основы нелиней-

ной теории оболочек (пологих – Х. М. Муштари, Л. Донелл, В. З. Влагов; непологих – В. В. Новожилов) были разработаны.

Большой вклад в разработку теории оболочек также внесли С. А. Амбарцумян, В. В. Болотин, И. Н. Векуа, А. С. Вольмир, И. И. Воронич, А. Л. Гольденвейзер, Э. И. Григолоук, А. Н. Гузь, А. А. Ильюшин, А. И. Лурье, Ю. Н. Работнов, С. П. Тимошенко, В. И. Феодосьев, К. Ф. Черных, К. Маргерр, Э. Рейснер и другие.

Основные идеи расчета ребристых оболочек были высказаны в конце 40-х годов XX века А. И. Лурье и В. З. Власовым, которые заложили два основных подхода к расчету ребристых оболочек. Как А. И. Лурье, так и В. З. Власов считали, что ребра взаимодействуют с обшивкой по линии. Третий подход к ребристой оболочке основан на «размазывании» жесткости ребер по всей оболочке. В большинстве работ авторов (И. Я. Амиро и В. А. Заруцко, Е. С. Гребня, Б. К. Михайлова, В. М. Рассудова, И. Е. Милейковского и И. П. Гречанинова, О. И. Тербушко, С. А. Тимашева и др.) до настоящего времени применяются два первых подхода.

Введение ребер по линии упрощает математическую модель оболочки, но приводит к пренебрежению многими важными физическими факторами, что сказывается на точности получаемых решений.

В конце 60-х годов прошлого столетия П. А. Жилин предложил рассматривать ребристую оболочку как оболочку дискретно-переменной толщины. Аналогичный подход применялся в работах Л. В. Енджиевского и И. Н. Преображенского. Впоследствии (конец 70-х годов) В. В. Карповым была разработана геометрически нелинейная теория пологих оболочек ступенчато-переменной толщины, имеющих ребра, накладки и вырезы, в которой учитывались дискретное расположение ребер и вырезов, их ширина, жесткое соединение ребер при пересечении, сдвиговая и крутильная жесткость ребер, поперечные сдвиги, т. е. все наиболее важные факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние и устойчивость оболочек, которыми раньше пренебрегали из-за сложности их учета. Им была доказана эквивалентность подходов В. З. Власова и А. И. Лурье к расчету ребристых оболочек.

Подходы В. В. Карпова к ребристым оболочкам как оболочкам ступенчато-переменной толщины были распространены на непологие оболочки его учениками О. В. Игнатьевым (задачи статики) и А. Ю. Сальниковым (задачи динамики).

Среди методов решения нелинейных задач для пластин и оболочек наиболее применение получил метод последовательных нагружений, разработанный В. В. Петровым, позволяющий свести решение нелинейной задачи к последовательности решения линейных задач (метод пролонгирования решения по параметру нагрузки). Для решения линейных краевых задач, в основном, применяются метод конечных элементов или метод Бубнова – Галеркина.

Решение нелинейных задач оптимизации как задач нелинейного математического программирования для таких сложных конструкций, как оболочки ступенчато-переменной толщины, вызывает большие трудности и не дает полной уверенности в нахождении глобального экстремума функции цели. Поэтому предложенный В. В. Карповым и развитый в дальнейшем О. В. Игнатьевым (задачи статики) и А. Ю. Сальниковым (задачи динамики) вариационно-параметрический метод, позволяющий не только проводить исследования НДС и устойчивости расмагнриваемых оболочек, но и выбирать рациональные параметры конструкции (рациональное подкрепление, рациональную кривизну), является наиболее эффективным методом исследования нелинейных математических моделей сложных оболочечных конструкций.

Так как исследование нелинейных математических моделей пластин и оболочек требует применения современной вычислительной техники, то возникает необходимость в разработке эффективных вычислительных алгоритмов и создании программных комплексов для расчета прочности и устойчивости подкрепленных оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности, ползучести материала для комплексного их исследования.

В учебном пособии рассмотрены вариационные принципы механики (Лагранжа, Гамильтона – Остроградского, Кастильяно), с помощью которых получаются уравнения равновесия в перемещениях, уравнения движения, уравнения в смешанной форме и естественные краевые и начальные условия. Приводятся различные численные методы (в том числе вариационные), используемые для решения нелинейных задач теории оболочек: как для исследования их прочности и устойчивости, так и для выбора рациональных параметров (жесткости подкреплений, кривизны). Все эти методы могут быть использованы и для расчетов стержневых и пластинчатых конструкций. Пособие содержит значительное число примеров применения тех или иных методов для расчетов строительных конструкций.

1. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА

Рассмотрим некоторое тело, нагруженное объемными \bar{X}_i и поверхностными \bar{P}_{vi} силами на части поверхности S_1 . На оставшейся части поверхности тела S_2 заданы перемещения (кинематические граничные условия)

$$u_i = \bar{u}_i \in S_2. \quad (1)$$

Предположим, что состояние равновесия тела характеризуется компонентами перемещения u_i , шестью компонентами напряжения σ_{ij} и шестью компонентами деформации ε_{ij} . Далее, пусть перемещения тела в его равновесном состоянии получили малые возможные перемещения. Тогда согласно принципу возможных перемещений

$$\delta\Pi - \iint_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \iint_{S_1} \bar{P}_{vi} \delta u_i ds = 0, \quad (2)$$

где

$$\delta\Pi = \iint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \quad (3)$$

вариация потенциальной энергии деформации тела.

Принцип возможных перемещений в формулировке (2) справедлив при любых свойствах материала тела, т. е. при произвольном законе связи между компонентами напряжений и деформаций и при произвольном законе кинематической связи между компонентами перемещений u_i и деформаций ε_{ij} .

Покажем, что выполнение условия (2) приводит к тождественному выполнению всех уравнений равновесия по объему тела и естественных (силовых) граничных условий на части поверхности S_1 . Для простоты ограничимся выводом уравнения равновесия упругих пологих оболочек малого прогиба.

При этом $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x^z$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \gamma_{xy}^z$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_y^z$,

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_x, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy},$$

$$\sigma_{22} = \sigma_y, \quad \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0,$$

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}.$$

Потенциальная энергия деформации такой оболочки будет иметь вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_0^{\frac{ab}{2}} \iint_0^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z) dx dy dz. \quad (4)$$

Найдем первую вариацию функционала (4) и покажем, что выполняется равенство (3)

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \frac{1}{2} \iint_0^{\frac{ab}{2}} \iint_0^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x^z + \varepsilon_x^z \delta \sigma_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y^z + \varepsilon_y^z \delta \sigma_y + \\ & + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}^z + \gamma_{xy}^z \delta \tau_{xy}) dx dy dz. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя формулы

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{(2+\mu)} \gamma_{xy}^z,$$

преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} & \iint_0^{\frac{ab}{2}} \iint_0^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_x^z \delta \sigma_x + \varepsilon_y^z \delta \sigma_y + \gamma_{xy}^z \delta \tau_{xy}) dx dy dz = \\ & = \iint_0^{\frac{ab}{2}} \iint_0^{\frac{h}{2}} \varepsilon_x^z \frac{E}{1-\mu^2} \delta (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z) + \varepsilon_y^z \frac{E}{1-\mu^2} \delta (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z) + \\ & + \gamma_{xy}^z \frac{E}{2(1+\mu)} \delta \gamma_{xy}^z dx dy dz = \iint_0^{\frac{ab}{2}} \iint_0^{\frac{h}{2}} \left[\frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z) \delta \varepsilon_x^z + \right. \\ & \left. + \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z) \delta \varepsilon_y^z + \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z \delta \gamma_{xy}^z \right] dx dy dz = \end{aligned}$$

$$= \iint_{00}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_x \delta \varepsilon_x^z + \sigma_y \delta \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}^z \right) dx dy dz.$$

Подставляя полученный результат в (5), получим

$$\delta \Pi = \iint_{00}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_x \delta \varepsilon_x^z + \sigma_y \delta \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}^z \right) dx dy dz,$$

что подтверждает соотношение (3).

Работа внешних сил (поперечной нагрузки q) на перемещении δw имеет вид

$$A = \iint_{00}^{\frac{h}{2}} q \delta w dx dy.$$

Согласно принципу возможных перемещений

$$\delta \Pi - \iint_{00}^{\frac{h}{2}} q \delta w dx dy = 0. \quad (6)$$

Функционал полной энергии деформации оболочки

$$\Theta = \frac{1}{2} \iint_{00}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z \right) dx dy dz - \iint_{00}^{\frac{h}{2}} q w dx dy$$

или

$$\Theta = \frac{1}{2} \iint_{00}^{\frac{h}{2}} \left[N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + 2M_{xy} \chi_{12} - 2qW \right] dx dy, \quad (7)$$

из которого выводятся уравнения равновесия в перемещениях, называют функционалом Лагранжа.

Вариационное уравнение (6) с учетом (7) можно записать в виде

$$\delta \Theta = \iint_{00}^{\frac{h}{2}} \left[N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy} + M_x \delta \chi_1 + M_y \delta \chi_2 + 2M_{xy} \delta \chi_{12} - 2q \delta W \right] dx dy = 0. \quad (8)$$

Учитывая, что

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

и используя интегрирование по частям, например

$$\iint_{00}^{ab} N_x \delta \frac{\partial U}{\partial x} dx dy = \int_0^b N_x \delta U \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \iint_{00}^{ab} \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta U dx dy,$$

вариационное уравнение (8) приведем к виду

$$\begin{aligned} & - \iint_{00}^{ab} \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right] \delta U + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \delta V + \\ & + \left(k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \right) \delta W dx dy + \\ & + \int_0^b \left[N_x \delta U + N_{xy} \delta V + \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta W - M_x \delta \frac{\partial W}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} dy + \\ & + \int_0^a \left[N_{xy} \delta U + N_y \delta V + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta W - M_y \delta \frac{\partial W}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} dx - \\ & - M_{xy} \delta W \Big|_{x=0|y=0}^{x=a|y=b} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как под знаком двойного интеграла δU , δV , δW произвольны (не равны нулю), то сомножители, стоящие перед ними в двойном интеграле, должны равняться нулю. Таким образом, получим уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \\ k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из равенства нулю одномерных интегралов в (9) получаем естественные краевые условия:

при $x = 0, x = a$

$$N_x = 0 \text{ или } U = 0; \quad N_{xy} = 0 \text{ или } V = 0;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \text{ или } W = 0; \quad M_x = 0 \text{ или } \frac{\partial W}{\partial x} = 0; \quad (11)$$

при $y = 0, y = b$

$$N_{xy} = 0 \text{ или } U = 0; \quad N_y = 0 \text{ или } V = 0;$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \text{ или } W = 0; \quad M_y = 0 \text{ или } \frac{\partial W}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Вариационный принцип Лагранжа основан на необходимом условии экстремума функционала.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА – ОСТРОГРАДСКОГО

Принцип стационарного действия Гамильтона – Остроградского утверждает, что среди возможных, т. е. совместимых со связями, движений системы материальных точек в действительности осуществляются движения, дающие стационарное значение интегралу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\Gamma - \Pi + A) dt, \quad (13)$$

где Γ – кинетическая энергия системы; Π – потенциальная энергия системы; A – работа внешних сил.

Таким образом, приходим к необходимому условию минимума функционала (13), а именно:

$$\delta J = 0. \quad (14)$$

Выведем уравнение движения жесткой пластинки (плиты) малого прогиба, находящейся под действием поперечной нагрузки $q(x, y, t)$.

Кинетическая энергия рассматриваемой пластинки будет иметь вид

$$\Gamma = \frac{1}{2} \rho h \iint_{00}^{ab} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx dy,$$

$$\text{где } \rho = \frac{\gamma}{g}.$$

Потенциальную энергию можно записать в виде

$$\Pi = \frac{D}{2} \iint_{00}^{ab} \left[(\nabla^2 W)^2 + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] dx dy.$$

Работа внешней силы (поперечной нагрузки q)

$$A = \iint_{00}^{ab} q W dx dy.$$

Пусть выполняются краевые условия шарнирно-неподвижного закрепления края:

$$\text{при } x = 0, x = a \quad W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y = 0, y = b \quad W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

и однородные начальные условия по переменной t .

Для вывода уравнения движения найдем первую вариацию функционала (13) и приравняем ее к нулю.

Последовательно находим

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Gamma dt = -\rho h \iint_{00}^{ab} \iint_{00}^{t_1} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W dx dy dt,$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt = D \iint_{00}^{ab} \iint_{00}^{t_1} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) \delta W dx dy dt,$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} A dt = \iint_{00}^{ab} \iint_{00}^{t_1} q \delta W dx dy dt.$$

Следовательно,

$$-\iint_{00}^{ab} \iint_{00}^{t_1} \left(\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - q \right) \delta W dx dy dt = 0.$$

Отсюда получаем уравнение движения пластинки

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(x, y, t). \quad (15)$$

3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП КАСТИЛЬЯНО

Принцип возможных напряженных состояний формируется так: если деформация системы согласуется со всеми внутренними и внешними связями, то сумма работ, производимых возможными изменениями всех внешних и внутренних сил на действительных перемещениях тела, равна нулю.

Математическая формулировка этого принципа имеет вид

$$\iiint_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \iint_{S_2} \bar{u}_i \delta \bar{p}_{vi} ds = 0. \quad (16)$$

Эта зависимость носит название вариационного уравнения Кастильяно.

Обозначим

$$\iiint_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \delta \Pi',$$

где Π' – так называемая дополнительная потенциальная энергия тела. Если поведение материала тела подчиняется закону Гука, то $\Pi' = \Pi$ – потенциальной энергии тела.

Напряженное состояние, вариации которого удовлетворяют уравнению (16), отличается от всех других статически возможных напряженных состояний тем, что удовлетворяет не только уравнениям равновесия внутри и на поверхности тела, но и всем условиям сплошности (неразрывности деформаций) по объему тела.

Таким образом, если принцип возможных перемещений позволяет вывести уравнения равновесия, то принцип возможных напряженных состояний позволяет вывести все условия сплошности.

Получим уравнение совместности деформаций (уравнение сплошности) для тонких оболочек малого прогиба, находящихся под действием поперечной нагрузки q , используя вариационное уравнение Кастильяно (16), которое запишется в виде

$$\frac{1}{2} \iint_{00} \frac{h}{2} \left(\varepsilon_x^z \delta \sigma_x + \varepsilon_y^z \delta \sigma_y + \gamma_{xy}^z \delta \tau_{xy} \right) dx dy dz - \iint_{00} W \delta q dx dy = 0. \quad (17)$$

Используя соотношения

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y - z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

и тот факт, что

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz &= N_x, & \int_0^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz &= M_x, & \int_0^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz &= N_{xy}, \\ \frac{h}{2} \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz &= N_y, & \int_0^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz &= M_y, & \int_0^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz &= M_{xy}, \end{aligned}$$

а также выражение q из третьего уравнения равновесия (10)

$$q = - \left(k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right),$$

приведем вариационное уравнение (17) к виду

$$\begin{aligned} \iint_{00} \left[\varepsilon_x \delta N_x - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta M_x + \varepsilon_y \delta N_y - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta M_y + \gamma_{xy} \delta N_{xy} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta M_{xy} + W \left(k_x \delta N_x + k_y \delta N_y + \delta \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \delta \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем функцию $\Phi(x, y)$ по правилу

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (19)$$

Подставив (19) в (18), интегрируя по частям два раза и учитывая краевые условия (11), (12), сведем уравнение (18) к виду

$$\begin{aligned} & \iint_{00}^{ab} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \delta \Phi - \\ & - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta M_x + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta M_y + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta M_{xy} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \delta M_x + \\ & + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \delta M_y + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \delta M_{xy} \Big] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда получаем уравнения совместности деформаций (сплошности) в виде

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (20)$$

4. МЕТОД РИТЦА

Пусть дан функционал

$$J = J(u(x, y)), \quad (21)$$

определенный на некотором множестве $D(J)$ вещественного гильбертова пространства H (результаты переносятся и на комплексное пространство). Необходимо найти минимум этого функционала на множестве функций $u(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$u \Big|_{\Gamma} = \Psi(x, y). \quad (22)$$

Здесь S – область изменения переменных x, y , а Γ – граница этой области, которая считается кусочно-гладкой.

Пусть $u^*(x, y)$ – точное решение вариационной задачи, а $J(u^*) = m$ – значение минимума функционала. Если удастся построить функцию $\bar{u}(x, y)$, для которой значение функционала (21) весьма близко к m ,

то считается, что найдено достаточно хорошее приближение к истинному решению задачи. Если же удастся найти минимизирующую последовательность $u_n(x, y)$, т. е. последовательность функций, для которых $J(u_n) \rightarrow m$, то эта последовательность будет сходиться к точному решению u^*

$$u_n \rightarrow u^*.$$

Немецким математиком В. Ритцем в 1908 г. было предложено приближенное решение $\bar{u}(x, y)$ находить в виде семейства функций

$$\bar{u} = \Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (23)$$

зависящих от нескольких параметров и удовлетворяющих условию (22).

Если подставить (23) в (21), то функционал $J(\bar{u})$ после выполнения интегрирования будет функцией n переменных

$$J = J(c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Условия, при которых эта функция имеет минимум, принимают вид

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (24)$$

Решив систему уравнений (24), которую называют системой уравнений Ритца, найдя значения параметров $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$. Следовательно, приближенное решение вариационной задачи (21), (22) имеет вид

$$\bar{u}(x, y) = \Phi(x, y, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n).$$

Практически процесс нахождения этого приближенного решения весьма прост, так как семейство (23) принимается линейно зависящим от c_1, c_2, \dots, c_n .

Итак, примем

$$u_n(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y), \quad (25)$$

где $\varphi_0(x, y)$ удовлетворяет на границе Γ области S условию

$$\varphi_0 \Big|_{\Gamma} = \Psi(x, y), \quad (26)$$

а функции φ_i – условиям

$$\varphi_i|_{\Gamma} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (27)$$

Последовательность функций $\{\varphi_i(x, y)\}$ должна удовлетворять следующим трем условиям:

- 1) все элементы $\varphi_i \in D(J)$ ($D(J) \subset H$);
- 2) при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно независимы;
- 3) последовательность $\{\varphi_i\}$ полна в H .

Функции $\varphi_i(x, y)$ называются аппроксимирующими или координатными функциями.

Последнее условие состоит в следующем: каковы бы ни были $u \in D(J)$ и $\varepsilon > 0$, можно найти такое натуральное число N и такие постоянные c_1, c_2, \dots, c_N , что выполняется неравенство $|u^* - u_N| < \varepsilon$, где u_N имеет вид (25). Причем такие неравенства выполняются и для производных до того порядка, каков порядок производных встречается в $J(u)$.

В общем случае краевые условия могут иметь более сложный вид, чем в (22). Может быть задан на границе области S некоторый оператор $R[u]$, в котором порядок производной искомой функции не должен превышать порядок производной от этой функции, встречающейся в функционале. Итак, краевые условия можно записать в виде

$$R[u]|_{\Gamma} = \Psi(x, y).$$

Например, для функционала

$$J(u) = \int_a^b \Phi(x, u, u') dx$$

краевые условия могут иметь вид

$$\alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = A,$$

$$\alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) = B.$$

Пары чисел α_0, β_0 и α_1, β_1 не должны одновременно равняться нулю.

Используя метод Ритца, найти выражение для прогиба $W(x, y)$ жесткой пластинки при малых перемещениях, защемленной по контуру и находящейся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки q .

Эта задача равносильна задаче о минимуме функционала

$$J(W) = \frac{D}{2} \iint_{00}^{ab} \left[(\nabla^2 W)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] - 2 \frac{q}{D} W dx dy \quad (28)$$

при краевых условиях

$$W|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0. \quad (29)$$

Здесь Γ – граница области S , занимаемой пластинкой; ν – внешняя нормаль к границе Γ .

Функционал (28) можно привести к виду

$$J(W) = \frac{D}{2} \iint_S \left[(\nabla^2 W)^2 - 2 \frac{q}{D} W \right] dx dy - \frac{D(1-\mu)}{2} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial W}{\partial y} d \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial W}{\partial x} d \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] ds. \quad (30)$$

Второе из условий (29) равносильно выполнению на контуре Γ условий

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0.$$

Это означает, что контурный интеграл в (30) обращается в нуль.

Итак, функционал, минимум которого нужно искать, принимает вид

$$J(W) = \frac{D}{2} \iint_S \left[(\nabla^2 W)^2 - 2 \frac{q}{D} W \right] dx dy. \quad (31)$$

Пусть пластинка занимает область $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. Решение поставленной задачи будем искать методом Ритца в виде

$$W_1 = c_1 (1-x^2)^2 (1-y^2)^2, \quad (32)$$

так как функция $\varphi_1(x, y) = (1 - x^2)^2(1 - y^2)^2$ удовлетворяет на границе пластинки условиям (29) и система функций

$$\varphi_{ij}(x, y) = (1 - x^2)^2(1 - y^2)^2 x^{i-1} y^{j-1}$$

линейно независима и полна в $D(J)$.

Подставив (32) в (31), получим

$$J(W_1) = 144c_1^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[x^2 - \frac{1}{3} \right] (1 - y^2)^2 + \left(y^2 - \frac{1}{3} \right) (1 - x^2)^2 \right] dx dy - \frac{2q}{D} c_1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2 dx dy. \quad (33)$$

Система уравнений Ритца в этом случае состоит из одного уравнения

$$\frac{dJ(W_1)}{dc_1} = 0.$$

После вычисления интегралов в (33) это уравнение принимает вид

$$106,998c_1 = 1,321 \frac{q}{D},$$

откуда $c_1 = 0,0123 \frac{q}{D}$. Таким образом, приближенное значение прогиба пластинки будет иметь вид

$$W(x, y) \approx W_1(x, y) = 0,0123 \frac{q}{D} (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2. \quad (34)$$

5. МЕТОД РИТЦА ПРИ ДИСКРЕТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

Для некоторых видов закрепления краев оболочки существует проблема выбора аппроксимирующих функций при непрерывной аппроксимации искомым функций в методе Ритца. Кроме того, пределы изменения переменных x, y могут быть переменными для некоторых областей, занимаемых срединной (координатной) поверхностью оболочки.

Рассмотрим методику применения метода Ритца при дискретной аппроксимации искомым функций.

Область, занимаемую срединной поверхностью оболочки, по линиям главных кривизн разбиваем на части $D_{j,i}$ ($j = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n$) и узловые точки обозначаем через $Z_{j,i}$ (рис. 1). Шаг разбиения h_x в направлении оси x будет постоянным

$$h_x = x_j - x_{j-1} = \frac{a}{m}.$$

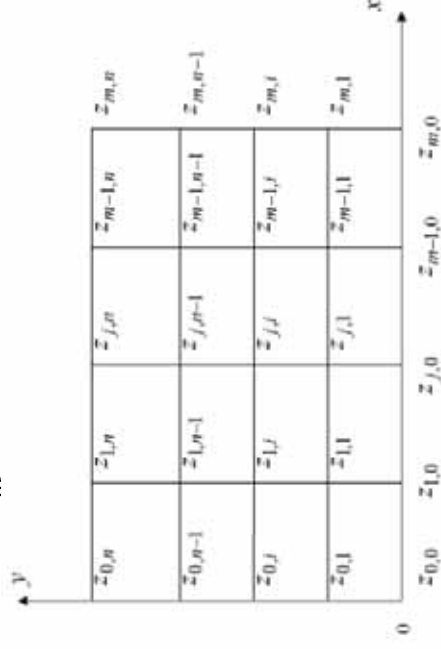


Рис. 1. Разбиение области, занимаемой координатной поверхностью оболочки

Шаг разбиения h_y^i в направлении оси y в общем случае может быть переменным в зависимости от координаты x :

$$h_y^i(x) = \frac{b_k(x)}{n},$$

где $b_k(x)$ – конечное значение переменной при начальном нулевом значении.

Общее число точек разбиения области интегрирования будет

$$(m+1)(n+1) = mn + m + n + 1,$$

из них внутренних точек будет

$$(m-1)(n-1) = mn - m - n + 1,$$

а граничных

$$2(m-1) + 2(n-1) + 4 = 2m + 2n.$$

В каждой области $D_{j,i}$ неизвестные функции будем аппроксимировать сплайнами. Степень сплайна аппроксимации k должна удовлетворять условию $k+1 \geq 2s$, где $2s$ – порядок наибольшей производной неизвестных функций в уравнениях равновесия.

Для жесткой пластинки одна неизвестная функция – прогиб оболочки W , наибольший порядок производных в уравнении равновесия – четвертый ($2s = 4$).

Для оболочки (модель Кирхгофа – Лява) число неизвестных функций три: перемещения U, V, W , наибольший порядок производных в уравнениях равновесия для U и V – второй, для W – четвертый ($2s = 4$). Для оболочки при учете поперечных сдвигов (модель Тимошенко – Рейснера) число неизвестных функций будет пять: три перемещения U, V, W и два угла поворота нормали в соответствующих плоскостях Ψ_x, Ψ_y , порядок наибольшей производной для каждой функции в уравнениях равновесия – второй ($2s = 2$).

Неизвестные функции обозначим YK , где K будет равно 1, 2, 3, 4, 5. Если учитывать поперечные сдвиги, то $2s = 2$ и можно использовать биквадратный сплайн

$$f_{j,i} = a_0^{j,i} + a_1^{j,i}x + a_2^{j,i}y + a_3^{j,i}xy. \quad (35)$$

Неизвестные коэффициенты в (35) определим из условия равенства $f_{j,i}$ в узлах значениям искомым функций, т. е.

$$\begin{aligned} f_{j,i}(Z_{j-1,i-1}) &= YK_{j-1,i-1}; \\ f_{j,i}(Z_{j,i}) &= YK_{j,i}; \\ f_{j,i}(Z_{j-1,i}) &= YK_{j-1,i}; \\ f_{j,i}(Z_{j,i-1}) &= YK_{j,i-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

При решении системы (36) введем обозначения

$$b_1 = \frac{1}{h_x}, \quad b_2 = \frac{1}{h_y}, \quad b_3 = \frac{1}{h_x h_y}.$$

В результате получим (индексы у a_0, a_1, a_2, a_3 писать не будем)

$$\begin{aligned} a_3 &= b_3 YK_{j,i} - b_3 YK_{j,i-1} - b_3 YK_{j-1,i} + b_3 YK_{j-1,i-1}; \\ a_2 &= (b_2 - b_3 x_j) YK_{j,i} - (b_2 - b_3 x_j) YK_{j,i-1} + b_3 x_j YK_{j-1,i} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- b_3 x_j YK_{j-1,i-1}; \\ a_1 &= (b_1 - b_3 y_i) YK_{j,i} - (b_1 - b_3 y_i) YK_{j-1,i} + b_3 y_i YK_{j,i-1} - \\ &- b_3 y_i YK_{j-1,i-1}; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= (1 - b_1 x_j - b_2 y_i + b_3 x_j y_i) YK_{j,i} + (b_2 y_i - b_3 x_j y_i) YK_{j,i-1} + \\ &+ (b_1 x_j - b_3 x_j y_i) YK_{j-1,i} + b_3 x_j y_i YK_{j-1,i-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, аппроксимируя неизвестные функции сплайном (35) с учетом (37), получим

$$\begin{aligned} YK &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_{j,i} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [YK_{j,i} \varphi_1^{j,i}(x,y) + YK_{j,i-1} \varphi_2^{j,i-1}(x,y) + \\ &+ YK_{j-1,i} \varphi_3^{j-1,i}(x,y) + YK_{j-1,i-1} \varphi_4^{j-1,i-1}(x,y)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1^{j,i}(x,y) &= b_{01} + b_{11}x + b_{21}y + b_{31}xy; \\ \varphi_2^{j,i}(x,y) &= b_{02} + b_{12}x + b_{22}y + b_{32}xy; \\ \varphi_3^{j,i}(x,y) &= b_{03} + b_{13}x + b_{23}y + b_{33}xy; \\ \varphi_4^{j,i}(x,y) &= b_{04} + b_{14}x + b_{24}y + b_{34}xy, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} b_{01} &= 1 - b_1 x_j - b_2 y_i + b_3 x_j y_i; \quad b_{02} = b_2 y_i - b_3 x_j y_i; \\ b_{03} &= b_1 x_j + b_3 x_j y_i; \quad b_{04} = b_3 x_j y_i; \\ b_{11} &= b_1 - b_3 y_i; \quad b_{12} = b_3 y; \quad b_{13} = -b_1 + b_3 y_i; \quad b_{14} = -b_3 y_i; \\ b_{21} &= b_2 - b_3 x_j; \quad b_{22} = -b_2 + b_3 x_j; \quad b_{23} = b_3 x_j; \quad b_{24} = -b_3 x_j; \end{aligned} \quad (40)$$

$$b_{31} = b_3; \quad b_{32} = -b_3; \quad b_{33} = -b_3; \quad b_{34} = b_3.$$

Заметим, что

$$\varphi_1^{j,i}(x,y) + \varphi_2^{j,i-1}(x,y) + \varphi_3^{j-1,i}(x,y) + \varphi_4^{j-1,i-1}(x,y) = 1.$$

Подставив (38) в функционал полной энергии деформации оболоч- ки и выполнив интегрирование по переменным x, y от известных функ- ций, приведем функционал к функции неизвестных числовых парамет- ров, которые являются значениями неизвестных функций в узлах разби- ения области. Найдя производные от функционала по этим неизвестным параметрам и приравняв их нулю, получим систему алгебраических урав- нений (система Ритца).

Производные от функционала берутся по параметрам, соответству- ющим внутренним узловым точкам.

Всего неизвестных параметров будет $k(m+1)(n+1)$.

Число уравнений будет $k(m-1)(n-1)$.

Недостающие уравнения получаютс я из краевых условий, которых будет при $k=5$ (неизвестные функции U, V, W, Ψ_x, Ψ_y) $10m+10n$.

С помощью краевых условий значения неизвестных функций в гра- ничных точках выражаются через значения неизвестных функций во внутренних узлах для того, чтобы система алгебраических уравнений (система Ритца) была корректной (имела единственное решение).

Рассмотрим еще аппроксимацию неизвестных функций сплайнами третьей степени. В методе конечных элементов используется многочлен Эрмита.

Вдоль оси x они будут иметь вид

$$\begin{aligned} E_{01}(x) &= \frac{h_x^3 - 3h_x(x-x_{j-1})^2 + 2(x-x_{j-1})^3}{h_x^3}; \\ E_{02}(x) &= \frac{3h_x(x-x_{j-1})^2 - 2(x-x_{j-1})^3}{h_x^3}; \\ E_{11}(x) &= \frac{h_x^2(x-x_{j-1}) - 2h_x(x-x_{j-1})^2 + (x-x_{j-1})^3}{h_x^2}; \\ E_{12}(x) &= \frac{-h_x(x-x_{j-1})^2 + (x-x_{j-1})^3}{h_x^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Вдоль оси y многочлены Эрмита будут иметь вид

$$\begin{aligned} E_{01}(y) &= \frac{(h_y^3 - 3h_y^i(y-y_{i-1})^2 + 2(y-y_{i-1})^3)}{(h_y^i)^3}; \\ E_{02}(y) &= \frac{3h_y^i(y-y_{i-1})^2 - 2(y-y_{i-1})^3}{(h_y^i)^3}; \\ E_{11}(y) &= \frac{(h_y^i)^2(y-y_{i-1}) - 2h_y^i(y-y_{i-1})^2 + (y-y_{i-1})^3}{(h_y^i)^2}; \\ E_{12}(y) &= \frac{-h_y^i(y-y_{i-1})^2 + (y-y_{i-1})^3}{(h_y^i)^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Значения этих полиномов в узловых точках $Z_{j-1,i-1}, Z_{j-1,i}, Z_{j,i-1}, Z_{j,i}$ имеют вид

$$\begin{aligned} E_{01}(x_{j-1}) &= 1; E_{01}(x_j) = 0; E_{02}(x_{j-1}) = 0; E_{02}(x_j) = 1; \\ E_{11}(x_{j-1}) &= 0; E_{11}(x_j) = 0; E_{12}(x_{j-1}) = 0; E_{12}(x_j) = 0; \\ E_{01}(y_{i-1}) &= 1; E_{01}(y_i) = 0; E_{02}(y_{i-1}) = 0; E_{02}(y_i) = 1; \\ E_{11}(y_{i-1}) &= 0; E_{11}(y_i) = 0; E_{12}(y_{i-1}) = 0; E_{12}(y_i) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Оказывается, что не только значения полиномов Эрмита в узловых точках равны нулю или единице, но и значения производных от них в узловых точках равны нулю или единице.

Найдем значения производных по x от полиномов $E_{11}(x)$ и $E_{12}(x)$ и производных по y от полиномов $E_{11}(y)$ и $E_{12}(y)$ в узловых точках.

Значения первых производных по x от $E_{01}(x), E_{02}(x)$ и первых про- изводных по y от $E_{01}(y), E_{02}(y)$ в узловых точках равны нулю.

Итак, получим

$$\begin{aligned} E_{11}'(x) &= \frac{h_x^2 - 4h_x(x-x_{j-1}) + 3(x-x_{j-1})^2}{h_x^2}; \\ E_{12}'(x) &= \frac{-2h_x(x-x_{j-1}) + 3(x-x_{j-1})^2}{h_x^2}; \end{aligned}$$

Окончательно неизвестные функции аппроксимируем на всей области, занимаемой оболочкой, в виде

$$YK = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n YK_k \Phi_k(x, y). \quad (48)$$

6. МЕТОД БУБНОВА – ГАЛЕРКИНА

Этот метод не связан с решением вариационной задачи, а связан с решением краевой задачи для дифференциального уравнения, но решение краевой задачи берется в том же виде, как при решении вариационной задачи методом Рунге. Решение уравнения Эйлера по методу Бубнова – Галеркина совпадает с решением соответствующей вариационной задачи методом Рунге. Метод связан с именами крупных ученых в области кораблестроения – академиков И. Г. Бубнова и Б. Г. Галеркина. И. Г. Бубнов связывал свой метод с вариационной задачей, а Б. Г. Галеркин применял аналогичный метод непосредственно к краевой задаче для дифференциального уравнения.

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти решение уравнения
$$Lu - f = 0, \quad (49)$$

где L – некоторый дифференциальный оператор, определенный на множестве $D(L)$ функций вещественного гильбертова пространства, при условии

$$u \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (50)$$

т. е. нужно найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в области S дифференциальному уравнению (49), а на границе области Γ – краевому условию (50).

Возьмем приближенное решение в виде

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x, y), \quad (51)$$

где $\phi_i(x, y)$ – аппроксимирующие (координатные) функции, удовлетворяющие краевым условиям (50), а c_i – неизвестные искомые параметры.

$$E'_{11}(y) = \frac{(h_y^i)^2 - 4h_y^i(y - y_{i-1}) + 3(y - y_{i-1})^2}{(h_y^i)^2}; \quad (44)$$

$$E'_{12}(y) = \frac{-2h_y^i(y - y_{i-1}) + 3(y - y_{i-1})^2}{(h_y^i)^2}.$$

Следовательно,

$$E'_{11}(x_{j-1}) = 1; \quad E'_{11}(x_j) = 0; \quad E'_{12}(x_{j-1}) = 0; \quad E'_{12}(x_j) = 1; \quad (45)$$

$$E'_{11}(y_{i-1}) = 1; \quad E'_{11}(y_i) = 0; \quad E'_{12}(y_{i-1}) = 0; \quad E'_{12}(y_i) = 1.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= E_{02}(x)E_{02}(y); \quad \phi_2(x, y) = E_{02}(x)E_{01}(y); \\ \phi_3(x, y) &= E_{01}(x)E_{02}(y); \quad \phi_4(x, y) = E_{01}(x)E_{01}(y); \\ \phi_5(x, y) &= E_{12}(x)E_{02}(y); \quad \phi_6(x, y) = E_{12}(x)E_{01}(y); \\ \phi_7(x, y) &= E_{11}(x)E_{02}(y); \quad \phi_8(x, y) = E_{11}(x)E_{01}(y); \\ \phi_9(x, y) &= E_{02}(x)E_{12}(y); \quad \phi_{10}(x, y) = E_{02}(x)E_{11}(y); \\ \phi_{11}(x, y) &= E_{01}(x)E_{12}(y); \quad \phi_{12}(x, y) = E_{01}(x)E_{11}(y); \end{aligned} \quad (46)$$

$$YK_{j,i} = YK_1; \quad YK_{j,i-1} = YK_2; \quad YK_{j-1,i} = YK_3; \quad YK_{j-1,i-1} = YK_4;$$

$$(YK)'_x \Big|_{Z_{j,i}} = YK_5; \quad (YK)'_x \Big|_{Z_{j,i-1}} = YK_6; \quad (YK)'_x \Big|_{Z_{j-1,i}} = YK_7;$$

$$(YK)'_x \Big|_{Z_{j-1,i-1}} = YK_8; \quad (YK)'_y \Big|_{Z_{j,i}} = YK_9; \quad (YK)'_y \Big|_{Z_{j,i-1}} = YK_{10};$$

$$(YK)'_y \Big|_{Z_{j-1,i}} = YK_{11}; \quad (YK)'_y \Big|_{Z_{j-1,i-1}} = YK_{12}.$$

Теперь в области $D_{j,i}$ неизвестные функции можно представить в виде

$$YK \Big|_{D_{j,i}} = \sum_{k=1}^{12} YK_k \Phi_k(x, y). \quad (47)$$

Подставив (51) в (49), получим невязку $Lu_n - f$. Если u_n – точное решение, то невязка равна нулю.

Суть метода состоит в том, что если невязка близка к нулю, то можно считать, что она ортогональна к любой функции $\varphi_j(x, y)$. Условие ортогональности имеет вид

$$\iint_S [(Lu_n - f)\varphi_j(x, y)] dx dy = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (52)$$

После вычисления интегралов в (52) от известных функций получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения c_1, c_2, \dots, c_n , если L – линейный оператор. Найдя c_j и подставив их в (51), получим приближенное решение краевой задачи.

Сходимость метода Бубнова – Галеркина для широкого круга задач (в том числе задач механики) была доказана.

В общем случае краевые условия могут иметь вид

$$R[u] \Big|_{\Gamma} = \Psi(x, y),$$

где $R[u]$ – некоторый оператор, содержащий производные искомой функции меньшего порядка, чем в уравнении (49), и тогда решение берется в виде

$$u_n(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y),$$

где $\varphi_0(x, y) \Big|_{\Gamma} = \Psi(x, y)$, а $\varphi_i(x, y) \Big|_{\Gamma} = 0$.

Например, если условия имеют вид

$u(a) = A$, $u(b) = B$, то

$$\varphi_0(x) = \frac{(x-a)B}{b-a} + \frac{(x-b)A}{a-b}.$$

Используя метод Бубнова – Галеркина, можно найти прогиб $W(x, y)$ прямоугольной пластинки (плиты), закрепленной по контуру шарнирно-неподвижно и находящейся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки q .

Считая прогиб пластинки малым, уравнение изгиба можно записать в виде

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = q, \quad (53)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; h – толщина пластинки; E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки соответственно.

Краевые условия имеют вид:

при $x = 0$, $x = a$

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0; \quad (54)$$

при $y = 0$, $y = b$

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0. \quad (55)$$

Исходя из краевых условий (54), (55) аппроксимирующие функции для прогиба в методе Бубнова – Галеркина возьмем в виде

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi j y}{b}.$$

Решение примем в виде

$$W_1 = c_1 \varphi_{11}(x, y) = c_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (56)$$

Согласно методу Бубнова – Галеркина для определения c_1 имеем условие

$$\iint_{00}^{ab} \left(\frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_1}{\partial y^4} - q \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0.$$

После вычисления интегралов от известных функций получим

$$c_1 \frac{\pi^4 ab}{a^4 4^4} \left(1 + 2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} \right) = \frac{q}{D} \frac{4ab}{\pi^2},$$

откуда

$$c_1 = \frac{16qa^4}{\pi^6 D(1+\lambda^2)^2},$$

где $\lambda = \frac{a}{b}$.

$$\left. u \right|_{\Gamma} = \Psi(x, y), \quad (59)$$

Следовательно,

$$W(x, y) \approx W_1(x, y) = \frac{16qa^4}{\pi^6 D(1 + \lambda^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (60)$$

Для квадратной плиты ($a = b$) получим

$$W(x, y) \approx \frac{4qa^4}{\pi^6 D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (57)$$

Максимальный прогиб (при $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$) такой плиты будет равен

(принято $\mu = 0,3$)

$$W_{\max} \approx 0,0454 \frac{qa^4}{Eh^3}.$$

7. МЕТОД ВЛАСОВА – КАНТОРОВИЧА В ФОРМЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

Почти одновременно с Л. В. Канторовичем был предложен В. З. Власовым аналогичный метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений, который позволяет свести краевую задачу для дифференциальных уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение в этом методе принимается в таком же виде, как в методе Л. В. Канторовича, т. е. линейно зависящем от функции одной переменной, а далее выполняется процедура нахождения решения, как в методе Бубнова – Галеркина.

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую в области $S: \{0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq t \leq T\}$ дифференциальному уравнению

$$Lu = f(x, y, t), \quad (58)$$

на границе области Γ по пространственным координатам x, y – краевым условиям

а по временной переменной t – начальным условиям. Приближенное решение возьмем в виде

$$u_n(x, y, t) = \varphi_0(x, y) + \sum_{i=1}^n f_i(t) \varphi_i(x, y), \quad (60)$$

где $f_i(t)$ – неизвестные функции переменной t ; $\varphi_i(x, y)$ – известные аппроксимирующие функции, удовлетворяющие однородным краевым условиям

$$\left. \varphi_i(x, y) \right|_{\Gamma} = 0, \quad (61)$$

а $\varphi_0(x, y)$ – известная функция, удовлетворяющая условию

$$\left. \varphi_0(x, y) \right|_{\Gamma} = \Psi(x, y).$$

Условие ортогональности невязки $Lu_n - f$ к функциям $\varphi_j(x, y)$ дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_j(t)$

$$\int_0^a \int_0^b (Lu_n - f) \varphi_j(x, y) dx dy = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (62)$$

Решив эту систему при заданных начальных условиях по переменной t , найдем искомые функции $f_j(t)$, а подставив их в (60), найдем приближенное решение поставленной краевой задачи.

В качестве примера рассмотрим динамическую задачу для жестких пластинок.

Уравнение движения такой пластины имеет вид

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (63)$$

где $A = \frac{\gamma h}{g}$.

Если пластинка шарнирно-неподвижно закреплена по контуру, то краевые условия будут иметь вид (54), (55).

Кроме того, по переменной t задаются начальные условия при $t = 0$

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (64)$$

Получили смешанную задачу для дифференциального уравнения. Для решения этой задачи применим метод Власова – Канторовича, взяв решение в виде

$$W_1(x, y, t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (65)$$

При этом будут выполнены краевые условия (54), (55). Условие (62) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b D \left(\frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_1}{\partial y^4} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy + \\ & + A \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy. \end{aligned}$$

После вычисления интегралов по переменным x, y получим при $q = q_1 t$, где $q_1 = \text{const}$,

$$f(t) \frac{D\pi^4(1+\lambda^2)^2}{Aa^4} + f''(t) = q_1 t \frac{16}{A\pi^2},$$

где $\lambda = \frac{a}{b}$.

Таким образом, получили начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$f'' + B_1 f = B_2 t \quad (66)$$

при условии (64), где

$$B_1 = \frac{\pi^4 D(1+\lambda^2)^2}{Aa^4}; \quad B_2 = \frac{16q_1}{A\pi^2}.$$

Общее решение уравнения (66) имеет вид

$$f(t) = c_1 \sin \sqrt{B_1} t + c_2 \cos \sqrt{B_1} t + \frac{B_2}{B_1} t.$$

Произвольные постоянные c_1, c_2 находим, используя начальные условия (64). Окончательно получим

$$f(t) = -\frac{B_2}{B_1 \sqrt{B_1}} \sin \sqrt{B_1} t + \frac{B_2}{B_1} t.$$

Таким образом, приближенное решение поставленной динамической задачи имеет вид

$$W_1(x, y, t) = \frac{B_2}{B_1} \left(t - \frac{\sin \sqrt{B_1} t}{\sqrt{B_1}} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (67)$$

8. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Метод продолжения решения по параметру [11] – это один из методов решения нелинейных операторных уравнений (в частности, дифференциальных или алгебраических). Он позволяет свести решение нелинейной задачи к последовательному решению линейных задач.

Рассмотрим систему из m нелинейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m , содержащих параметр P ,

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \dots, x_m, P) &= 0 \\ (i &= 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (68)$$

Если ввести в рассмотрение вектор-функцию $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ и вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, то систему (68) можно представить в виде

$$F(X, P) = 0. \quad (69)$$

Пусть известно некоторое решение $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})^T$, P_0 уравнения (69), т. е.

$$F(X_0, P_0) = 0.$$

Рассмотрим окрестность A точки (X_0, P_0) . Свойства решений системы (69) в этой окрестности устанавливает теорема о неявных функциях. Если выполняются условия:

- 1) вектор-функция F (т. е. все $f_i (i = \overline{1, m})$) определена и непрерывна в A ;
- 2) в A существуют и непрерывны частные производные от F по всем $f_i (i = \overline{1, m})$ аргументам $x_j (j = \overline{1, m})$ и по параметру P ;
- 3) в точке (X_0, P_0) отличен от нуля якобиан вектор-функции F

$$\det(J) \neq 0, \quad (70)$$

$$\text{где } J = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (i, j = \overline{1, 2, \dots, m}), \text{ то в некоторой}$$

окрестности точки (X_0, P_0) решения $x_i (i = \overline{1, m})$ системы (69) являются однозначными непрерывными функциями P

$$x_i = x_i(P) \quad (i = \overline{1, m}), \quad (71)$$

такими, что $x_i(P_0) = x_{i0}$ ($i = \overline{1, m}$) и производные $\frac{dx_i}{dP}$ также непрерывны в этой окрестности.

Таким образом, теорема о неявных функциях устанавливает, что при выполнении условий 1–3 решение системы (69) в некоторой окрестности точки (X_0, P_0) образует единственную кривую K , которая имеет параметрическое представление (71) и проходит через точку (X_0, P_0) . Чтобы получить теперь решение X_1 системы (69) при близком к P_0 значении P_1 , нужно продвигнуться вдоль кривой K . При этом точка (X_1, P_1) должна оставаться внутри окрестности A . Если условия 1–3 выполняются в точке (X_1, P_1) , то решение снова можно продолжить и т. д.

Рассмотрим, как практически перейти от точки (X_0, P_0) к точке (X_1, P_1) .

Продифференцируем (69) по параметру P . В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$J \frac{\partial X}{\partial P} + \frac{\partial F}{\partial P} = 0, \quad (72)$$

$$\text{где } J = \frac{\partial F}{\partial X}.$$

Система (72) линейна относительно $\frac{dX}{dP}$. Ее решение при условии, что $\det(J) \neq 0$, приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial X}{\partial P} = -J^{-1} \frac{\partial F}{\partial P}. \quad (73)$$

То, что при $P = P_0$ решение X_0 известно, позволяет сформулировать задачу определения решения $X(P)$ как задачу Коши для системы (73) при начальном условии

$$X(P_0) = X_0. \quad (74)$$

Для решения начальной задачи (73), (74) можно применять методы Эйлера, Рунге – Кутты, Адамса и другие.

9. ВАРИАЦИОННО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБЛОЛОЧЕК

Для решения некоторых задач расчета строительных конструкций требуется применение последовательности нескольких методов. Так, при решении нелинейных задач для оболочек, содержащих ребра, накладки и вырезы, применяется последовательность методов, позволяющая свести нелинейную задачу к последовательному решению линейных задач и затем краевую задачу для дифференциальных уравнений в частных производных к системе линейных алгебраических уравнений. Кроме того, желательным еще выбрать оптимальные параметры оболочки (жесткость подкреплений оболочки ребрами и кривизну). Все эти задачи позволяют решить вариационно-параметрический метод (ВПМ).

Суть ВПМ при решении задач статики заключается в том, что для нахождения минимума функционала полной энергии деформации при-

меняется метод Рунге и получается система нелинейных алгебраических уравнений. Для решения этой системы применяется метод продолжения решения по параметру (метод дифференцирования по параметру), который позволяет на каждом шаге изменения параметра находить решение линеаризованной задачи, которая представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Эта задача решается методом Гаусса. За параметр может быть взята нагрузка, и тогда находим решение задачи, непрерывно зависящее от нагрузки. Если за параметр взять жесткость ребер (например, высоту ребер), то при заданном параметре нагрузки находятся поправки к напряженно-деформированному состоянию (НДС) оболочки при изменении жесткости констрструкции. Если за параметр взять кривизну оболочки, то при заданном параметре нагрузки находятся поправки к НДС оболочки при изменении ее кривизны. Последовательная смена параметра продолжения решения приводит к схеме метода поперечного спуска, позволяющей проводить рациональный выбор жесткости подкреплений и кривизны оболочки при заданном параметре нагрузки и ограничениях на ее НДС.

При решении задач динамики к функционалу полной энергии деформации применяется метод Л. В. Канторовича и получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно временной координаты t . Для продолжения решения по параметру нагрузки используется метод Рунге – Кутты.

Если при заданном параметре нагрузки, а следовательно, при фиксированном значении координаты $t = t_n$ нужно найти НДС оболочки при изменении ее жесткостных характеристик или кривизны, то за параметр продолжения решения берется жесткость подкреплений или кривизна. При этом уравнения динамики переходят в уравнения статики, так как вторые производные от искомого функций по временной координате обращаются в нуль.

Рассмотрим ВПМ на примере расчета пологих оболочек ступенчато-переменной толщины.

9.1. Основные соотношения геометрически нелинейной теории пологих оболочек ступенчато-переменной толщины

Рассматриваются прямоугольные в плане пологие оболочки двойной кривизны, находящиеся под действием поперечной нагрузки $q(x, y)$. Средняя поверхность оболочки толщиной h принимается за координаты

натную. Оси x, y криволинейной системы координат направлены по линиям главных координат. Ось z ортогональна координатной поверхности и направлена в сторону вогнутости. Со стороны вогнутости оболочки подкреплены ортогональной сеткой ребер, направленных параллельно осям x и y (рис. 2).

Расположение ребер по оболочке задается функцией $H(x, y)$:

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i).$$

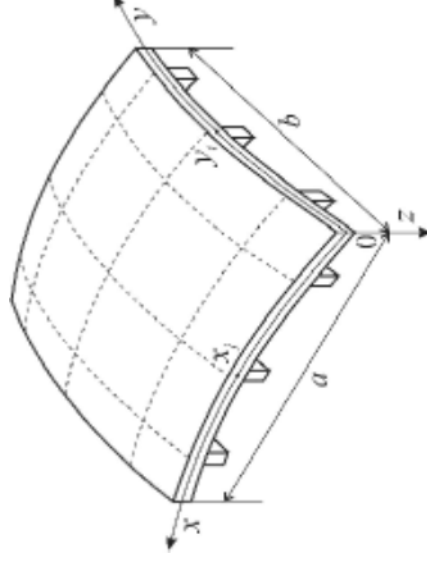


Рис. 2. Общий вид ребристой оболочки

Здесь h^j, r_j, m – высота и ширина j -го ребра, направленного параллельно оси y , и число ребер этого направления;

h^i, r_i, n – аналогично для i -го ребра, направленного параллельно оси x ; $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$; $\bar{\delta}(x - x_j), \bar{\delta}(y - y_i)$ – единичные столбчатые функции.

Зависимости деформаций от перемещений в координатной поверхности принимаются в виде

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right); \quad (75)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y},$$

а в слое, отстоящем на z от координатной поверхности (рассматривается модель Кирхгофа – Лява),

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y - z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad (76)$$

$$\gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Здесь U, V, W – перемещения точек координатной поверхности вдоль осей x, y, z соответственно; k_x, k_y – главные кривизны оболочек. Зависимости напряжений от деформаций для изотропного упругого материала имеют вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z); \quad \sigma_y^z = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z. \quad (77)$$

Интегрируя напряжения (77) по z в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2} + H$, получаем усилия и моменты, приведенные к координатной поверхности и приходящиеся на единицу длины сечения,

$$N_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(h + \bar{F})(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) - \bar{S} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right];$$

$$N_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[(h + \bar{F}) \gamma_{xy} - 2\bar{S} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]; \quad (78)$$

$$M_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\bar{S}(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) - \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right];$$

$$M_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\bar{S} \gamma_{xy} - 2 \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right],$$

где

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz; \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz; \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz.$$

Аналогично записываются N_y, M_y .

Кинетическая энергия рассматриваемой оболочки в простейшем случае имеет вид

$$K = \frac{\rho}{2} \iint_{00}^{ab} \left[(h + \bar{F}) \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (79)$$

потенциальная энергия –

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{00}^{ab} \left[N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} - M_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] dx dy, \quad (80)$$

работа поперечной силы q –

$$A = \iint_{00}^{ab} q W dx dy. \quad (81)$$

Функционал полной энергии деформации при статическом нагружении (функционал Лагранжа) имеет вид

$$\mathfrak{E} = \Pi - A, \quad (82)$$

при динамическом нагружении (функционал Остроградского – Гамильтона) –

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi + A) dt. \quad (83)$$

9.2. Применение метода Рунге к функционалу полной энергии деформации для задач статки

Применяя к функционалу (82) метод Рунге с учетом (80), (78), (75) при аппроксимации перемещений в виде

$$\begin{aligned} U &= \sum_{I=1}^N U1(I)X1(I)Y1(I), \\ V &= \sum_{I=1}^N V1(I)X2(I)Y2(I), \\ W &= \sum_{I=1}^N W1(I)X3(I)Y3(I), \end{aligned} \quad (84)$$

где $U1, V1, W1$ – неизвестные числовые параметры; $X1 - X3$ – известные аппроксимирующие функции переменной x , удовлетворяющие заданным крайним условиям при $x = 0$ и $x = a$; $Y1 - Y3$ – известные аппроксимирующие функции переменной y , удовлетворяющие заданным крайним условиям при $y = 0$, $y = b$, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно $U1(I), V1(I), W1(I)$

$$\begin{aligned} &\sum_{I=1}^N [U1(I)B1(I, J) + V1(I)B2(I, J) + W1(I)B3(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N W1(K)B4(I, J, K)] = 0, \\ &\sum_{I=1}^N [U1(I)B5(I, J) + V1(I)B6(I, J) + W1(I)B7(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N W1(K)B8(I, J, K)] = 0, \\ &\sum_{I=1}^N [U1(I)B9(I, J) + \sum_{K=1}^N W1(K)B10(I, J, K)] + V1(I)B11(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N W1(K)B12(I, J, K)] + W1(I)B13(I, J) + \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{K=1}^N W1(K)(B14(I, J, K) + \sum_{L=1}^N W1(L)B15(I, J, K, L))] = \\ &= P \cdot CP(J) \\ &(J = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $B1-B15$ представляют собой интегралы от комбинаций аппроксимирующих функций, жесткостных характеристик и кривизны.

9.3. Линеаризация систем алгебраических уравнений методом продолжения решения по параметру

Систему (85) кратко можно записать в виде

$$F(X, P, H, K) = 0, \quad (86)$$

где $X = (U1(I), V1(I), W1(I))^T$; P – параметр поперечной нагрузки; H – параметр, характеризующий жесткость ребер (например, их высоту); K – параметр кривизны.

Считается, что при некотором значении параметров P, H, K известно решение уравнения (86)

$$X(P_0, H_0, K_0) = X_0. \quad (87)$$

Если продифференцировать уравнение (80) по P

$$\frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial P} + \frac{\partial F}{\partial P} = 0$$

и применить для решения полученного уравнения метод Эйлера, то получим расчетную схему

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_i, \quad P_{i+1} = P_i + \Delta P_i, \quad (88)$$

где ΔP_i задается, а ΔX_i находится из линейного относительно ΔX_i уравнения

$$F'_X (X_i, P_i, H_0, K_0) \Delta X_i + F'_P (X_i, P_i, H_0, K_0) \Delta P_i = 0. \quad (89)$$

Если за параметр взять H , то после дифференцирования уравнения (86) по H получим расчетную схему

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i + \Delta X_i, & H_{i+1} &= H_i + \Delta H_i, \\ F'_X(X_i, P_0, H_i, K_0) \Delta X_i + F'_H(X_i, P_0, H_i, K_0) \Delta H_i &= 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Если за параметр взять K , то после дифференцирования уравнения (86) по K получим расчетную схему

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i + \Delta X_i, & K_{i+1} &= K_i + \Delta K_i, \\ F'_X(X_i, P_0, H_0, K_i) \Delta X_i + F'_K(X_i, P_0, H_0, K_i) \Delta K_i &= 0. \end{aligned} \quad (91)$$

Схемы (89)–(91) отличаются только вторыми членами, поэтому ли- неализированные по методу продолжения решения по параметру урав- нения (85) можно записать в виде (индекс i опущен)

$$\begin{aligned} &\sum_{I=1}^N \{u(I)B1(I, J) + v(I)B2(I, J) + w(I)[B3(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N W1(K)(B4(I, J, K) + B4(K, J, I))]\} = A_1, \\ &\sum_{I=1}^N \{u(I)B5(I, J) + v(I)B6(I, J) + w(I)[B7(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N W1(K)(B8(I, J, K) + B8(K, J, I))]\} = A_2, \\ &\sum_{I=1}^N \{u(I)[B9(I, J) + \sum_{K=1}^N W1(K)B10(I, J, K)] + v(I)[B11(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N W1(K)B12(I, J, K)] + w(I)[B13(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N (U1(K)B10(K, J, I) + V1(K)B12(K, J, I) + \\ &\quad + W1(K)(B14(I, J, K) + B14(K, J, I) + \\ &\quad + \sum_{L=1}^N W1(L)(B15(I, J, K, L) + B15(K, J, L, I) + \\ &\quad + B15(K, J, I, L)))]\} = A_3 \end{aligned} \quad (92)$$

$$(J = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь $\Delta X_i = (u_i(I), v_i(I), w_i(I))^T$;

$$U1(I) = \sum_{k=1}^{i-1} u_k(I); \quad V1(I) = \sum_{k=1}^{i-1} v_k(I); \quad W1(I) = \sum_{k=1}^{i-1} w_k(I).$$

Если за параметр взята нагрузка P , то

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = p \cdot CP(J), \quad (93)$$

$$\text{при этом } P = \sum_{k=1}^{i-1} p_k.$$

Если за параметр взята высота ребер H , то

$$\begin{aligned} A_1 &= - \sum_{I=1}^N [U1(I)DB1(I, J) + V1(I)DB2(I, J) + W1(I)(DB3(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N W1(K)DB4(I, J, K))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= - \sum_{I=1}^N [U1(I)DB5(I, J) + V1(I)DB6(I, J) + W1(I)(DB7(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N W1(K)DB8(I, J, K))], \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= - \sum_{I=1}^N [U1(I)(DB9(I, J) + \sum_{K=1}^N W1(K)DB10(I, J, K)) + \\ &\quad + V1(I)(DB11(I, J) + \sum_{K=1}^N W1(K)DB12(I, J, K)) + \\ &\quad + W1(I)(DB13(I, J) + \\ &\quad + \sum_{K=1}^N W1(K)(DB14(I, J, K) + \sum_{L=1}^N W1(L)DB15(I, J, K, L))], \end{aligned}$$

где коэффициенты DB отличаются от соответствующих коэффициентов B тем, что вместо h^j, h^i, h^{ij} они содержат $\Delta h^j, \Delta h^i, \Delta h^{ij}$ и в них отсут- ствуют члены, не содержащие h^j, h^i, h^{ij} .

Если за параметр взята кривизна K , то

$$A_1 = - \sum_{I=1}^N W1(I)DB3(I, J),$$

$$A_2 = - \sum_{I=1}^N W1(I)DB6(I, J),$$
(95)

$$A_3 = - \sum_{I=1}^N [U1(I)DB3(I, J) + V1(I)DB6(I, J) + W1(I)(DB8(I, J) + \sum_{K=1}^N W1(K)DB9(I, J, K))],$$

где коэффициенты DB отличаются от соответствующих коэффициентов B тем, что вместо k_{ξ}, k_{η} они содержат $\Delta k_{\xi}, \Delta k_{\eta}$ и в них отсутствуют члены, не содержащие k_{ξ}, k_{η} .

Метод продолжения решения по параметру относится к шаговым методам, поэтому точность решений, полученных этим методом, зависит от величины выбранного шага.

10. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов (МКЭ) получил большое применение в различных областях техники при расчете конструкций и целых сооружений. Его можно рассматривать как один из вариантов вариационных методов. Если в методе Ритца и Бубнова – Галеркина аппроксимирующие функции задаются на всей области, занимаемой конструкцией, то в МКЭ эти функции задаются свои на каждом элементе, на которые разбивается вся область. Этот метод целесообразно применять для расчетов сложных объектов: целых сооружений, элементов конструкции сложного очертания, составных конструкций.

Рассмотрим этот метод на примере определения прогиба жестких прямоугольных плит (пластины). Пусть прямоугольная пластинка испытывает изгиб под действием произвольной поперечной нагрузки $q(x, y)$. Разобьем пластинку на n прямоугольных элементов e_k со сторонами a и b (рис. 3).

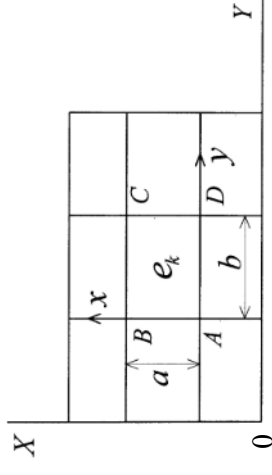


Рис. 3. Разбиение пластинки на конечные элементы

Связь конечных элементов между собой осуществляется в узлах (вершинах прямоугольников). В каждом узле задаем по три перемещения (прогиб W и два угла поворота $\frac{\partial W}{\partial x}$ и $\frac{\partial W}{\partial y}$).

Потребуем совместности вертикальных перемещений и углов поворота относительно местных осей x и y в узловых точках для примыкающих к узлу конечных элементов. Обобщенные перемещения в узлах конечного элемента обозначим через q_i . Прямоугольный конечный элемент должен иметь, как показано на рис. 4, двенадцать обобщенных перемещений или двенадцать степеней свободы.

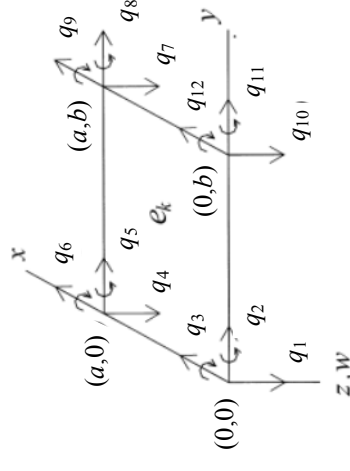


Рис. 4. Прямоугольный конечный элемент

Перемещения между узловыми точками на конечном элементе e_k зададим многочленом $\varphi_i(x, y)$ с таким числом произвольных коэффициентов, какое число степеней свободы имеет конечный элемент (в рассматриваемом случае 12).

Функцию $W_{kn}(x, y)$ на конечном элементе e_k можно представить в виде

$$W_{kn}(x, y) = \sum_{i=1}^{12} q_i \varphi_i(x, y), \quad (x, y) \in e_k, \quad (96)$$

а на остальных элементах она берется равной нулю.

Полученные выражения для функций прогиба обеспечивают непрерывность прогибов W и их первых производных по x и y между узлами по линии контакта конечных элементов.

Так как аппроксимация $W_{kn}(x, y)$ на каждом конечном элементе e_k (96) записана в местной системе координат x_0y_0 , то необходимо осуществить переход к общей системе координат XOY (в данном случае нужно осуществить только параллельный перенос осей координат).

На всей области, занимаемой пластиной, функция прогиба $W(x, y)$ представляется в виде

$$W_n(X, Y) = \sum_{k=1}^n W_{kn}(X, Y).$$

Теперь к функционалу полной энергии деформации жесткой пластины

$$\begin{aligned} \Theta = \sum_{k=1}^n \frac{D}{2} \iint_{V_k} \left\{ (\nabla^2 W_{kn})^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 W_{kn}}{\partial X \partial Y} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2 W_{kn}}{\partial X^2} \frac{\partial^2 W_{kn}}{\partial Y^2} \right] - 2 \frac{q}{D} W_{kn} \right\} dXdY \end{aligned}$$

(V_k – область, занимаемая конечным элементом e_k) применим метод Рунта и получим систему алгебраических уравнений (в данном случае линейную) относительно неизвестных узловых перемещений каждого конечного элемента. Эта система будет разрежена, так как функция W_{kn} на всех элементах, кроме e_k , равна нулю, поэтому, кроме метода Гаусса, можно для ее решения использовать метод прогонки.

Как видим, МКЭ совпадает с методом Рунта при дискретной аппроксимации неизвестных функций.

11. МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Суть метода наискорейшего спуска состоит в указанном далее.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – некоторая точка существования функции $f(x, y, z)$, минимум которой требуется найти.

Градиентом этой функции в точке M_1 является вектор с проекциями на оси координат в виде частных производных, вычисляемых в точке M_1 ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_1), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(M_1).$$

Этот вектор указывает направление максимального роста функции $f(x, y, z)$ в точке M_1 . Луч с началом в точке M_1 , целиком лежащий в области существования функции $f(x, y, z)$ и направленный противоположно вектору-градиенту, имеет следующие координаты точек:

$$x = x_1 - t \frac{\partial f}{\partial x}(M_1), \quad y = y_1 - t \frac{\partial f}{\partial y}(M_1), \quad z = z_1 - t \frac{\partial f}{\partial z}(M_1), \quad \text{где } t \geq 0.$$

Функция $f(x, y, z)$ в точках этого луча будет сложной функцией одного аргумента t

$$\varphi(t) = f \left(x_1 - t \frac{\partial f}{\partial x}(M_1), \quad y_1 - t \frac{\partial f}{\partial y}(M_1), \quad z_1 - t \frac{\partial f}{\partial z}(M_1) \right). \quad (97)$$

Чтобы найти минимум этой функции, нужно получить корни уравнения $\varphi'(t) = 0$. Если t_1 – один из этих корней, можно перейти от точки M_1 к точке M_2 с координатами

$$x_2 = x_1 - t_1 \frac{\partial f}{\partial x}(M_1), \quad y_2 = y_1 - t_1 \frac{\partial f}{\partial y}(M_1), \quad z_2 = z_1 - t_1 \frac{\partial f}{\partial z}(M_1). \quad (98)$$

Далее за исходную приманот точку M_2 и аналогично находят точку M_3 , затем M_4, M_5, \dots, M_n . При достаточно большом n точка M_n будет близка к точке искомого минимума функции $f(x, y, z)$. Сходимость метода зависит от того, насколько близко к минимуму функции $f(x, y, z)$ выбрана точка M_1 .

Пусть дан функционал полной энергии деформации оболочки

$$\Theta(U, V, W, \psi_x, \psi_y).$$

Раскладываем неизвестные функции в ряд по неизвестным числовым параметрам и известным аппроксимирующим функциям. Подста-

вив эти разложения в функционал и вычислив интегралы от известных функций, сведем его к функции неизвестных числовых параметров. Выберем начальное приближение и уточним его с помощью метода наименьшего спуска.

Рассмотрим функционал полной энергии деформации пластины, допускающей малые прогибы, находящейся под действием поперечной нагрузки q и шарнирно-неподвижно закрепленной по контуру,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W) = & \frac{D}{2} \iint_{00}^{ab} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 \right] + \\ & + 4\mu_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2 \frac{q}{D} \iint dx dy, \end{aligned} \quad (99)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; $\mu_1 = \frac{1-\mu}{2}$.

Подставим $W(x, y)$ в виде

$$W(x, y) \approx W_N(x, y) = \sum_{j=l=1}^{N, N} W_{j,i} X_3^j(x) Y_3^i(y). \quad (100)$$

Подставив (100) в (99) и выполнив интегрирование от известных функций, приведем функционал (99) к виду

$$\mathcal{E}(W_N) = \sum_{j=l=1}^{N, N} \sum_{i=m=1}^{N, N} W_{j,i} \cdot W_{n,m} C_{j,i,n,m} - \sum_{j=l=1}^{N, N} q \cdot cr_{j,i} W_{j,i}. \quad (101)$$

Для нахождения минимума функции (101) применим метод наименьшего спуска. Выберем начальное приближение $W_{0,j,0i}$. Находим значения $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W_{l,k}}$ в точке $W_{0,j,0i}$ ($l = 1, 2, \dots, N$; $k = 1, 2, \dots, N$).

В функцию (101) вместо $W_{j,i}$ подставим

$$W_{0,j,0i} - t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W_{j,i}},$$

после чего она превращается в функцию одной переменной $\varphi(t)$. Решив уравнение $\varphi'(t) = 0$, найдем t_0 . Следующее приближение найдем по формуле

$$W_{1,j,1i} = W_{0,j,0i} - t_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W_{j,i}} \quad (102)$$

($j = 1, 2, \dots, N$; $i = 1, 2, \dots, N$).

Повторяя эту процедуру, найдем $W_{2,j,2i}$ и т. д.

При одночленной аппроксимации прогиба (94)

$$W(x, y) \approx W_{1,1} \sin \pi x \sin \pi y \quad (103)$$

и принятых параметрах $a = b = 1$; $\mu = 0,3$; $E = 3 \cdot 10^4$ МПа;

$q = 3 \cdot 10^{-2}$ МПа; $h = 0,01$ м (при этом $D = 0,27 \cdot 10^{-2}$ МПа·м³) получим

$$\mathcal{E}(W) = W_{11}^2 C_{11} - q \cdot cr \cdot W_{11}.$$

За начальное приближение возьмем $W_{0,j,0i} = 0$.

Далее находим

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W_{1,1}}(W_{0,1,01}) = 2W_{0,1,01} \cdot c_{11} - q \cdot cr = -1,216 \cdot 10^{-2}.$$

Найдем t_0 из условия

$$\begin{aligned} 2C_{11} \left(W_{0,1,01} - t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W_{1,1}}(W_{0,1,01}) \right) \left(- \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W_{11}}(W_{0,1,01}) \right) - \\ - q \cdot cr \left(- \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W_{11}}(W_{0,1,01}) \right) = 0. \end{aligned}$$

В результате получим $t_0 = 3,8$.

Теперь можно найти следующее приближение

$$W_{11,11} = W_{0,1,01} - t_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W_{1,1}}(W_{0,1,01}) = 0,0462.$$

Решение уравнения $\varphi'(t) = 0$ может вызывать затруднения, тогда применяют приближенные методы оценки корней этого уравнения.

12. МЕТОД ВАРИАЦИОННЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК, ИМЕЮЩИХ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ

В задачах расчета оболочечных конструкций, имеющих нерегулярности (узкие ребра жесткости, изломы срединной поверхности), для обозначения мест дискретного изменения параметров применяются дельта-функции [10, 13, 30, 31, 32, 41].

Однако дельта-функции – это предельные функции, которые сами по себе не имеют даже графического изображения.

Для получения корректной математической модели деформирования таких оболочек необходим предельный переход от ступенчатого изменения параметров к заданию их изменения с помощью дельта-функций. Такой переход можно осуществить с помощью метода вариационных предельных преобразований [21].

Суть метода вариационных предельных преобразований (МВПП) состоит в том, что наличие нерегулярных участков (толщины, кривизны) задается с помощью единичных ступенчатых функций (разности двух единичных функций), затем, до преобразования вариационного уравнения, вся область, занимаемая оболочкой, разбивается на участки с постоянными значениями параметров, а после преобразования вариационного уравнения (в результате которого под знаком интеграла не будет членов, содержащих вариации от производных искомым функций) получаются уравнения равновесия (движения), краевые условия на контуре оболочки (и начальные условия для задач динамики) и краевые условия по линиям ступенчатого изменения параметров.

После этого, используя краевые условия по линиям ступенчатого изменения параметров, предельным переходом от единичных ступенчатых функций к дельта-функциям можно получить соответствующие соотношения упругости, вид функционала полной энергии деформации и уравнения равновесия (движения).

Рассмотрим этот метод на примере получения соотношений упругости, функционала полной энергии деформации конструкции и уравнений равновесия для пологих оболочек, подкрепленных узкими ребрами и имеющих изломы срединной поверхности. Для простоты будем рассматривать линейные упругие задачи и модель Кирхгофа – Лява.

Функционал полной энергии деформации пологой оболочки, находящейся под действием поперечной статической нагрузки $q(x, y)$, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \iint_{00}^{ab} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + \\ & + M_y \chi_2 + 2M_{xy} \chi_{12} - 2qW) dx dy. \end{aligned} \quad (104)$$

$$\text{Здесь } \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W; \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W; \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; U, V, W -$$

перемещения точек срединной (координатной) поверхности вдоль осей x, y, z соответственно; $k_x = \frac{1}{R_1}$; $k_y = \frac{1}{R_2}$ – главные кривизны оболочки

вдоль осей x, y ; a, b – линейные размеры оболочки вдоль осей x, y .

Пусть оболочка толщиной h со стороны вогнутости подкреплена перекрестной системой ребер, параллельных осям координат (рис. 5).

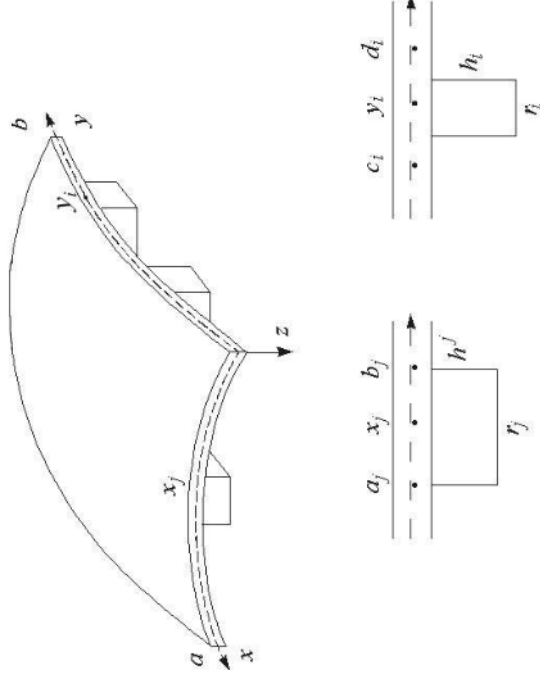


Рис. 5. Оболочка ступенчато-переменной толщины

Ребра вводятся дискретно с учетом их ширины, а их высота и расположение задаются функцией

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^i h^j \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i).$$

Здесь h^j, r_j, m – высота и ширина j -х ребер, параллельных оси y , и число ребер этого направления; h^i, r_i, n – аналогично для ребер, параллельных оси x ; $h^j = \min\{h^i, h^j\}$; $\bar{\delta}(x - x_j)$ – единичная столбчатая функция, равная единице при $a_j \leq x \leq b_j$ $\left(a_j = x_j - \frac{r_j}{2}; b_j = x_j + \frac{r_j}{2} \right)$ и нулю при других значениях x ; аналогично $\bar{\delta}(y - y_i)$ равна единице только при $c_i \leq y \leq d_i$ $\left(c_i = y_i - \frac{r_i}{2}; d_i = y_i + \frac{r_i}{2} \right)$.

Таким образом, толщина всей конструкции равна $h + H$.

В этом случае усилия и моменты, приведенные к срединной поверхности обшивки, которая принимается за координатную поверхность, и приходящиеся на единицу длины сечения, принимают вид (индекс 0 относится к силовым факторам, действующим в обшивке, R – к действующим в ребрах)

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^0 + N_x^R, \quad N_y = N_y^0 + N_y^R, \quad N_{xy} = N_{xy}^0 + N_{xy}^R, \\ M_x &= M_x^0 + M_x^R, \quad M_y = M_y^0 + M_y^R, \quad M_{xy} = M_{xy}^0 + M_{xy}^R, \end{aligned} \quad (105)$$

где силовые факторы, действующие в обшивке, имеют известный вид а в ребрах вид

$$\begin{aligned} N_x^R &= G_1 (\bar{F} \varepsilon_1 - \bar{S} \psi_1), \quad N_{xy}^R = G_{12} \left(\bar{F} \gamma_{xy} - 2\bar{S} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right), \\ M_x^R &= G_1 (\bar{S} \varepsilon_1 - \bar{J} \psi_1), \quad M_{xy}^R = G_{12} \left(\bar{S} \gamma_{xy} - 2\bar{J} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \quad (106)$$

$$G_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad G_{12} = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_x + \mu \varepsilon_y, \quad \psi_1 = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Аналогично записываются выражения для N_y, M_y .

Здесь $\bar{F}, \bar{S}, \bar{J}$ – площадь поперечного или продольного сечения ребер, приходящаяся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции этого сечения соответственно

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \\ &\quad - \sum_{i=1, j=1}^m \sum_{i=1, j=1}^m F^i h^j \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i); \\ \bar{S} &= \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) - \\ &\quad - \sum_{i=1, j=1}^m \sum_{i=1, j=1}^m S^i h^j \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i); \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) - \\ &\quad - \sum_{i=1, j=1}^m \sum_{i=1, j=1}^m J^i h^j \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \end{aligned}$$

где

$$F^j = h^j; \quad S^j = \frac{h^j (h + h^j)}{2},$$

$$J^j = 0,25h^2 h^j + 0,5h (h^j)^2 + \frac{1}{3} (h^j)^3.$$

Аналогично записываются $F^i, S^i, J^i, F^{ij}, S^{ij}, J^{ij}$. Силовые факторы (106) можно разбить на составляющие, действующие в поперечном сечении ребер (индекс PR) и продольном сечении ребер ортогонального направления (индекс BR),

$$N_x^R = N_x^{PR} + N_x^{BR}, \quad N_x^{PR} = \sum_{i=1}^m N_x^{Pi} \bar{\delta}(y - y_i),$$

$$N_x^{BR} = \sum_{j=1}^m N_x^{Bj} \bar{\delta}(x - x_j), \quad N_x^{Bj} = N_x^j - \sum_{i=1}^n N_x^{ij} \bar{\delta}(y - y_i),$$

$$N_x^{Pi} = G_1(F^i \varepsilon_1 - S^i \psi_1), \quad N_x^j = G_1(F^j \varepsilon_1 - S^j \psi_1),$$

$$N_x^{ij} = G_1(F^{ij} \varepsilon_1 - S^{ij} \psi_1), \quad (108)$$

$$N_{xy}^{BR} = N_{xy}^{PR} + N_{yx}^{BR}, \quad N_{xy}^{PR} = \sum_{i=1}^n N_{xy}^{Pi} \bar{\delta}(y - y_i),$$

$$N_{xy}^{BR} = \sum_{j=1}^m N_{xy}^{Bj} \bar{\delta}(x - x_j), \quad N_{xy}^{Bj} = N_{yx}^{ij} - \sum_{i=1}^n N_{xy}^{ij} \bar{\delta}(y - y_i),$$

$$N_{xy}^{Pi} = G_{12} \left(F^i \gamma_{xy} - 2S^i \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right), \quad N_{xy}^{ij} = G_{12} \left(F^j \gamma_{xy} - 2S^j \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right),$$

$$N_{xy}^{ij} = G_{12} \left(F^{ij} \gamma_{xy} - S^{ij} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right).$$

Аналогично записываются составляющие остальных силовых факторов.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= N_x^0 + N_x^{PR}, \quad \bar{N}_y = N_y^0 + N_y^{PR}, \\ \bar{N}_{xy} &= N_{xy}^0 + N_{xy}^{PR}, \quad \bar{N}_{yx} = N_{yx}^0 + N_{yx}^{PR}, \\ \bar{M}_x &= M_x^0 + M_x^{PR}, \quad \bar{M}_y = M_y^0 + M_y^{PR}, \\ \bar{M}_{xy} &= M_{xy}^0 + M_{xy}^{PR}, \quad \bar{M}_{yx} = M_{yx}^0 + M_{yx}^{PR}. \end{aligned} \quad (109)$$

Разбив область, занимаемую ребристой оболочкой, на части с постоянной толщиной вдоль осей x и y и проведя преобразование вариационного уравнения $\delta \mathcal{E} = 0$ таким образом, чтобы под знаком двойного интеграла не было вариаций от производных функций перемещений, получим уравнения равновесия из равенства нулю двойного интеграла

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial N_x^{Bj}}{\partial x} \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_x^{Bi}}{\partial y} \bar{\delta}(y - y_i) &= 0; \\ \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_y^{Bi}}{\partial y} \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial N_y^{Bj}}{\partial x} \bar{\delta}(x - x_j) &= 0; \\ N_x k_x + N_y k_y + \frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{M}_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}^0}{\partial x \partial y} + q + \\ + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 M_x^{Bj}}{\partial x^2} \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 M_y^{Bi}}{\partial y^2} \bar{\delta}(y - y_i) + \end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} + 2 \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 M_{yx}^{Pj}}{\partial x \partial y} \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 M_{xy}^{Pi}}{\partial x \partial y} \bar{\delta}(y - y_i) - \right. \\ \left. - 2 \sum_{i=1, j=1}^m \frac{\partial^2 M_{xy}^{ij}}{\partial x \partial y} \bar{\delta}(y - y_i) \bar{\delta}(x - x_j) \right) = 0, \end{aligned}$$

краевые условия на контуре оболочки из равенства нулю одномерных интегралов (эти условия имеют традиционный вид) и условия по линиям ступенчатого изменения толщины оболочки (краевые условия на боковой поверхности ребер)

при $x = a_j, \quad x = b_j$

$$N_x^{Bj} = 0, \quad N_{xy}^{Bj} = 0, \quad (111)$$

$$\frac{\partial M_x^{Bj}}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial M_{yx}^{Bj}}{\partial y} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial M_{xy}^{ij}}{\partial y} \bar{\delta}(y - y_i) \right) = 0, \quad M_x^{Bj} = 0;$$

$$\text{при } y = c_i, \quad y = d_i \quad N_{yx}^{Bi} = 0, \quad N_y^{Bi} = 0, \quad (112)$$

$$\frac{\partial M_y^{Bi}}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial M_{xy}^{\Pi i}}{\partial x} - \sum_{j=1}^m \frac{\partial M_{xy}^{ij}}{\partial x} \bar{\delta}(x - x_j) \right) = 0, \quad M_y^{Bi} = 0.$$

Если теперь считать ребра узкими (малы r_i, r_j) и предположить, что условия (111) выполняются при $a_j \leq x \leq b_j$, а условия (112) – при $c_i \leq y \leq d_i$ (этот факт не очевиден, так как расчеты показывают, что при уменьшении ширины ребер усилия и моменты, возникающие в них, увеличиваются [20]), то этими составляющими силовых факторов (действующими в продольном сечении ребер) можно пренебречь. В этом случае в уравнениях равновесия (110) пренебрегаем подчёркнутыми членами, а усилия и моменты принимаются в виде (109). Если теперь от единичных столбчатых функций предельным переходом $\left(\lim_{r_j \rightarrow 0} \frac{\bar{\delta}(x - x_j)}{r_j} = \bar{\delta}(x - x_j) \right)$ перейти к дельта-функциям, то получим соотношения, встречающиеся для ребристых оболочек в работах [10, 30, 32, 41].

В полученной таким образом математической модели деформирования ребристой оболочки учитывается при растяжении (сжатии) и изгибе только жесткость ребер одного направления, а при кручении жесткость ребер вообще не учитывается.

В экспериментальных исследованиях, проведенных С. А. Тимашевым [41], показано, что крутильная жесткость ребер оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние (НДС) всей конструкции, поэтому модель ребристой оболочки, когда ребра вводятся по линиям с помощью дельта-функций, обладает существенным недостатком и является частным случаем модели оболочки ступенчато-переменной толщины.

Теперь рассмотрим применение МВПП для получения уравнений равновесия оболочек с изломом срединной поверхности (достаточно получить функционал полной энергии деформации).

Обычно наличие изломов срединной поверхности оболочки, параллельных осям координат, связывают с дискретным изменением кривизны оболочки [31, 32], принимая ее в виде

$$\begin{aligned} \bar{k}_x &= k_x + \sum_{j=1}^m \theta_j \bar{\delta}(x - x_j), \\ \bar{k}_y &= k_y + \sum_{i=1}^n \theta_i \bar{\delta}(y - y_i), \end{aligned} \quad (113)$$

где $k_x = \frac{1}{R_1}$, $k_y = \frac{1}{R_2}$; θ_j , θ_i – углы изломов поверхности в направлении осей x и y ; $\bar{\delta}(x - x_j)$, $\bar{\delta}(y - y_i)$ – дельта-функции.

Для расчетов НДС используют уравнения в смешанной форме, так как в них кривизны входят в первой степени. В уравнениях равновесия существуют члены, содержащие квадрат кривизны, и в этом случае при наличии квадрата дельта-функции (такая величина не определена) они теряют смысл.

Дело в том, что при наличии изломов срединной поверхности оболочки меняется ее геометрия и это обстоятельство вызывает изменение функционала полной энергии оболочки.

Получить функционал полной энергии деформации оболочки, имеющей изломы срединной поверхности, можно, используя МВПП.

Заменим сначала оболочку с изломом срединной поверхности оболочкой с волнистой формой поверхности (рис. 6), для этого места излома соединим дугой окружности некоторого радиуса, а затем, после получения условий по линиям раздела кривизн из преобразованного соответствующим образом вариационного уравнения $\delta\mathcal{E} = 0$, устремим этот радиус к нулю, получив оболочку с изломом срединной поверхности.

Зададим кривизны волнистой оболочки \bar{k}_x, \bar{k}_y в виде

$$\begin{aligned} -\bar{k}_x &= -\frac{1}{R_1} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} \right) \bar{\delta}(x - x_j) = \\ &= -k_x + \sum_{j=1}^m \left(k_x + \frac{1}{R_1} \right) \bar{\delta}(x - x_j); \\ -\bar{k}_y &= -\frac{1}{R_2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \right) \bar{\delta}(y - y_i) = \\ &= -k_y + \sum_{i=1}^n \left(k_y + \frac{1}{R_2} \right) \bar{\delta}(y - y_i). \end{aligned} \quad (114)$$

Здесь R_1^1 – радиус окружности, соединяющей две гладкие части пологой оболочки в направлении оси x ; R_1 – радиус кривизны этих частей оболочки; $\bar{\delta}(x-x_j)$ – единичная столбчатая функция, всюду равная нулю, кроме точек интервала (a_j, b_j) , где она равна единице. Аналогичные значения имеют величины $R_2^1, R_2, \bar{\delta}(y-y_i)$ для направления оси y .

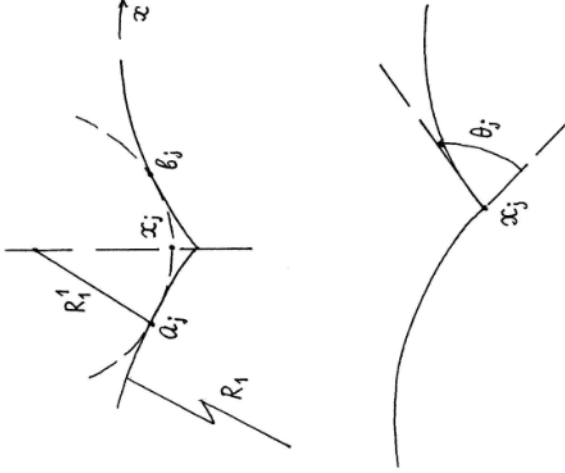


Рис. 6. Переход от оболочки с волнистой формой поверхности к оболочке с изломом срединной поверхности

Цилиндрическая панель, соединяющая части пологой оболочки, будет полой, поэтому ее параметры Ляме, как и для рассматриваемой полой оболочки, можно считать равными единице и в этой части конструкции использовать соотношения, принятые для пологих оболочек.

Подставив (114) в (104) и разбив область, занимаемую оболочкой, на части с постоянной кривизной, после соответствующего преобразования вариационного уравнения $\delta\mathcal{E} = 0$ получим по линиям ступенчатого изменения кривизны следующие условия [25]:

при $x = a_j, x = b_j$

$$k_x + \frac{1}{R_1^1} = 0, \quad (115)$$

при $y = c_i, y = d_i$

$$k_y + \frac{1}{R_2^1} = 0. \quad (116)$$

Следовательно, при $R_1^1 \rightarrow 0$ $a_j \rightarrow x_j, b_j \rightarrow x_j$ и при $x = x_j$ $\frac{1}{R_1^1} \rightarrow 0$. Аналогично при $R_2^1 \rightarrow 0$ $k_y + \frac{1}{R_2^1} = 0$ при $y = y_i$.

Теперь запишем функционал полной энергии деформации оболочки с волнистой формой поверхности. Затем предельным переходом от единичных столбчатых функций к дельта-функциям, когда $R_1^1 \rightarrow 0$ и $R_2^1 \rightarrow 0$, с использованием условий (115), (116) получим функционал для оболочки с изломом срединной поверхности.

При задании кривизн в виде (114) в соотношениях $\varepsilon_x, \varepsilon_y, N_x, N_y$ появятся дополнительные члены (индекс о соответствует оболочке с постоянной кривизной k_x, k_y)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + \varepsilon_x^1, \quad \varepsilon_x^1 = W \sum_{j=1}^m \left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right) \bar{\delta}(x-x_j); \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + \varepsilon_y^1, \quad \varepsilon_y^1 = W \sum_{i=1}^n \left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right) \bar{\delta}(y-y_i); \end{aligned} \quad (117)$$

$$N_x = N_x^0 + N_x^1,$$

$$N_x^1 = \frac{EhW}{1-\mu^2} \left[\sum_{j=1}^m \left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right) \bar{\delta}(x-x_j) + \mu \sum_{i=1}^n \left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right) \bar{\delta}(y-y_i) \right];$$

$$N_y = N_y^0 + N_y^1,$$

$$N_y^1 = \frac{EhW}{1-\mu^2} \left[\mu \sum_{j=1}^m \left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right) \bar{\delta}(x-x_j) + \sum_{i=1}^n \left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right) \bar{\delta}(y-y_i) \right].$$

В функционале полной энергии деформации для рассматриваемой пологой оболочки с волнистой формой в дополнение к (104) появится выражение

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \frac{1}{2} \iint_{00}^{ab} (N_x^0 \varepsilon_x^1 + N_x^1 \varepsilon_x^0 + N_x^1 \varepsilon_y^1 + N_y^0 \varepsilon_y^1 + N_y^1 \varepsilon_y^0 + N_y^1 \varepsilon_x^1) dx dy = \\
&= \frac{1}{2} \iint_{00}^{ab} \left\{ N_x^0 W \sum_{j=1}^m \left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right) \bar{\delta}(x-x_j) + \right. \\
&\quad + \varepsilon_x^0 \frac{EhW}{1-\mu^2} \left[\sum_{j=1}^m \left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right) \bar{\delta}(x-x_j) + \mu \sum_{i=1}^n \left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right) \bar{\delta}(y-y_i) \right] + \\
&\quad + \frac{EhW}{1-\mu^2} \left[\sum_{j=1}^m \left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right)^2 \bar{\delta}(x-x_j) + \mu \sum_{i=1}^n \left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right)^2 \bar{\delta}(y-y_i) + \right. \\
&\quad \left. + 2\mu \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right) \bar{\delta}(x-x_j) \left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right) \bar{\delta}(y-y_i) \right] + \\
&\quad \left. + N_y^0 W \sum_{i=1}^n \left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right) \bar{\delta}(y-y_i) + \varepsilon_y^0 \frac{EhW}{1-\mu^2} \left[\mu \sum_{j=1}^m \left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right) \bar{\delta}(x-x_j) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^n \left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right) \bar{\delta}(y-y_i) \right] \right\} dx dy. \tag{118}
\end{aligned}$$

Здесь учтено свойство единичной функции [28]

$$\bar{\delta}^2(x-x_j) = \bar{\delta}(x-x_j), \quad \bar{\delta}^2(y-y_i) = \bar{\delta}(y-y_i), \quad \text{так как}$$

$\bar{\delta}(x-x_j) = U(x-a_j) - U(x-b_j)$ и $\bar{\delta}(y-y_i) = U(y-c_i) - U(y-d_i)$ — это приращения соответствующих единичных функций на соответствующих интервалах.

Если $R_1^1 \rightarrow 0$, то $\cup a_j b_j$ равна $R_1^1 \theta_j^1 \rightarrow 0$ ($a_j \rightarrow x_j, b_j \rightarrow x_j$) и происходит предельный переход [28]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_1^1} \bar{\delta}(x-x_j) &\xrightarrow{R_1^1 \rightarrow 0} \frac{\theta_j^1 \bar{\delta}(x-x_j)}{R_1^1 \theta_j^1} \xrightarrow{R_1^1 \rightarrow 0} \theta_j^1 \bar{\delta}(x-x_j); \\
\theta_j^1 &\xrightarrow{R_1^1 \rightarrow 0} \theta_j^1, \quad \bar{\delta}(x-x_j) \xrightarrow{R_1^1 \rightarrow 0} 0, \\
\left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right) \bar{\delta}(x-x_j) &\xrightarrow{R_1^1 \rightarrow 0} \theta_j^1 \bar{\delta}(x-x_j), \\
\left(k_x + \frac{1}{R_1^1} \right)^2 \bar{\delta}(x-x_j) &\xrightarrow{R_1^1 \rightarrow 0} 0 \quad (\text{см. (115)}).
\end{aligned} \tag{119}$$

Аналогично, при $R_2^1 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right) \bar{\delta}(y-y_i) &\xrightarrow{R_2^1 \rightarrow 0} \theta_i^1 \bar{\delta}(y-y_i), \\
\left(k_y + \frac{1}{R_2^1} \right)^2 \bar{\delta}(y-y_i) &\xrightarrow{R_2^1 \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, для пологих оболочек с изломом средней поверхности дополнение к функционалу полной энергии деформации (104) будет иметь вид (индекс о у $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, N_x^0, N_y^0$ опущен)

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \frac{1}{2} \iint_{00}^{ab} \left\{ N_x W \sum_{j=1}^m \theta_j^1 \bar{\delta}(x-x_j) + N_y W \sum_{i=1}^n \theta_i^1 \bar{\delta}(y-y_i) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{EhW}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \sum_{j=1}^m \theta_j^1 \bar{\delta}(x-x_j) + (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \sum_{i=1}^n \theta_i^1 \bar{\delta}(y-y_i) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{EhW^2}{1-\mu^2} 2\mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta_j^1 \bar{\delta}(x-x_j) \theta_i^1 \bar{\delta}(y-y_i) \right\} dx dy. \tag{120}
\end{aligned}$$

Если оболочка со стороны вогнутости подкреплена ребрами, параллельными осям координат, то функционал (104) с учетом (105)–(107) можно записать в виде (индекс о у $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ опущен)

В уравнениях равновесия члены, отображающие физическую нелинейность, переносятся в правую часть. В начале они принимаются равными нулю и решается линейно-упругая задача. Полученное решение этой задачи подставляется в правую часть и опять решается упругая задача. Процесс итераций заканчивается, когда предыдущее решение от последующего отличается на малую величину.

14. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе Ю. Н. Работнова [38] описаны все вариационные принципы механики и говорится, что эти принципы справедливы для линейно-упругого тела. Вариационные методы механики основаны на необходимом условии минимума функционала полной энергии деформации конструкции, согласно которому в условиях стационарности конструкции первая вариация этого функционала должна равняться нулю. На основе этого правила можно получить уравнения равновесия любой строительной конструкции при линейно-упругом, нелинейно-упругом деформировании и в условиях развития деформаций ползучести.

Рассмотрим вариационный метод вывода уравнений равновесия на примере простейшей конструкции – стержня длиной l , толщиной h , закрепленного по контуру шарнирно-неподвижно и находящегося под действием поперечной нагрузки q (рис. 7).

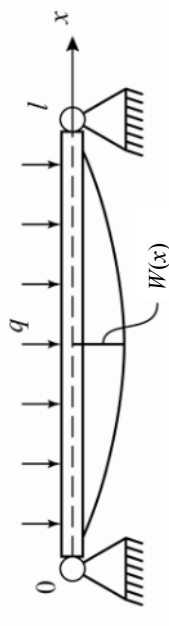


Рис. 7. Стержень, находящийся под действием поперечной нагрузки

Продольными перемещениями $U(x)$ пренебрегаем, а искомыми являются только перемещения $W(x)$ – прогиб стержня.

Будем рассматривать как линейно-упругие задачи, так и нелинейно-упругие и задачи ползучести.

Деформации стержня в слое, отстоящем на z от срединной линии (геометрические соотношения), будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_{00}^{ab} \left\{ (h + \bar{F}) (\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1\gamma_{xy}^2) - \right. \\ & - 2\bar{S} \left(\varepsilon_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\varepsilon_x \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\varepsilon_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\mu_1\gamma_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} \right) + \\ & \left. + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4\mu_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\ & \left. - 2(1-\mu^2) \frac{qW}{E} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (121)$$

Если же по линиям изломов оболочка подкреплена ребрами жесткости, то в дополнение к функционалу (121) добавляется выражение (индекс o у $\varepsilon_x^o, \varepsilon_y^o$ опущен)

$$\begin{aligned} \Theta_1 = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_{00}^{ab} \left\{ (h + \bar{F}) \left[2(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) W \sum_{j=1}^m \theta^j \delta(x-x_j) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y) W \sum_{i=1}^n \theta^i \delta(y-y_i) + 2\mu W^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta^i \theta^j \delta(x-x_j) \theta^i \delta(y-y_i) \right] - \right. \\ & \left. - 2\bar{S} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) W \sum_{j=1}^m \theta^j \delta(x-x_j) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) W \sum_{i=1}^n \theta^i \delta(y-y_i) \right] \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Заметим, что вводить ребра с помощью дельта-функций по линиям изломов поверхности нельзя, так как в функционале полной энергии деформации будут присутствовать квадраты дельтаты дельта-функций.

13. МЕТОД УПРУГИХ РЕШЕНИЙ

Метод упругих решений, предложенный А. А. Ильюшиным [16], представляет собой вариант метода последовательных приближений.

$$\varepsilon_x^z = z \chi_1, \quad \gamma_{xy}^z = 0, \quad \chi_1 = -\frac{d^2 W}{dx^2}. \quad (122)$$

Для линейно-упругих задач напряжения вдоль оси x физические соотношения будут иметь вид

$$\sigma_x = E \varepsilon_x^z. \quad (123)$$

Функционал полной энергии деформации стержня записывается в виде

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \varepsilon_x^z dx dz - \int_0^l q W dx. \quad (124)$$

Если напряжения σ_x , умноженные на z , проинтегрировать по z в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$, то получим изгибающий момент

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = EJ \chi_1, \quad (125)$$

где

$$J = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12}.$$

Теперь функционал (124) можно записать в виде

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^l M_x \chi_1 dx - \int_0^l q W dx. \quad (126)$$

Уравнения равновесия можно получить из условия минимума этого функционала

$$\delta \Theta = 0. \quad (127)$$

Находя первую вариацию функционала (126) и приравнявая ее к нулю, получим вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \delta \Theta &= \frac{1}{2} \int_0^l (M_x \delta \chi_1 + \chi_1 \delta M_x) dx - \int_0^l q \delta W dx = \\ &= \int_0^l M_x \delta \chi_1 dx - \int_0^l q \delta W dx = 0. \end{aligned}$$

После преобразования первого интеграла (два раза применяется интегрирование по частям), получим

$$\delta \Theta = \int_0^l \left(\frac{d^2 M_x}{dx^2} + q \right) \delta W dx = 0, \quad (128)$$

откуда на основании основной линии вариационного исчисления уравнение равновесия будет иметь вид

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + q = 0 \quad (129)$$

или

$$E \frac{d^2}{dx^2} \left(J \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = q. \quad (130)$$

В работе Н. И. Безухова [4] говорится, что для линейного упруговязкого тела и вязкопластического тела уравнения равновесия имеют тот же вид, что и для линейно-упругого тела, т. е. дифференциальные уравнения равновесия для трехмерного тела

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \rho = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \rho = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \rho = 0,$$

где X, Y, Z – проекция объемных сил на осях x, y, z ; ρ – плотность вещества (справедливы для любого тела, лишь бы оно было сплошное).

Там же говорится, что решение в общем виде для упруговязкого тела, и тем более для упруговязкопластического, получить практически

нерально, поэтому приближенные решения находят с помощью различных методов последовательных приближений.

Для первого приближения используют решение, полученное для линейно-упругого тела, а затем применяют метод упруговязкопластического

При выводе уравнений равновесия для упруговязкопластического тела приходится вводить некоторые упрощения.

При нелинейно-упругом деформировании (упругопластическое тело) физические соотношения с использованием деформационной теории принимают вид

$$\sigma_x = \sigma_x^y - \sigma_x^{\Pi}, \quad (131)$$

где σ_x^y имеет вид (123), а σ_x^{Π} записывают в виде

$$\sigma_x = E\omega(\varepsilon_i)\varepsilon_x. \quad (132)$$

Здесь функция $\omega(\varepsilon_i)$ – функция А. А. Ильюшина, принимающая различный вид для различных материалов, например

$$\omega(\varepsilon_i) = m\varepsilon_i^2; \quad (133)$$

$$\omega(\varepsilon_i) = \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i}\right) = A - \frac{B}{\varepsilon_i}; \quad (134)$$

$$\omega(\varepsilon_i) = \sigma_T \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T}\right)^m, \quad 0 < m < 1.$$

Интенсивность деформаций для стержня принимает вид

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}z\chi_1. \quad (135)$$

Введем обозначение

$$I_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \omega(\varepsilon_i)z^2 dz. \quad (136)$$

Функционал полной энергии деформации стержня при нелинейно-упругом деформировании принимает вид

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^l (\sigma_x^y \varepsilon_x^z - \sigma_x^{\Pi} \varepsilon_x^z) dx dz - \int_0^l qW dx. \quad (137)$$

Вводя в дополнение к (125) обозначения

$$M_x^{\Pi} = EI_3\chi_1, \quad (138)$$

функционал (137) можно записать в виде

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^l (M_x^y - M_x^{\Pi}) \chi_1 dx - \int_0^l qW dx. \quad (139)$$

Первая вариация функционала (139) будет иметь вид

$$\delta\Theta = \int_0^l \left(M_x^y \delta\chi_1 - \frac{1}{2} M_x^{\Pi} \delta\chi_1 - \frac{1}{2} \delta\chi_1 M_x^{\Pi} \right) dx - \int_0^l q\delta W dx. \quad (140)$$

Если в дальнейшем для решения задачи будет применяться метод упругих решений, т. е. итерационный процесс, когда нагрузка q разбивается на части и при последовательном увеличении нагрузки члены, содержащие ε_i , переносятся в первую часть и считаются известными, как функции деформации χ_1 , вычисленной при предыдущем значении нагрузки q , то при нахождении первой вариации функционала (139) варьирование по I_3 , содержащей ε_i , а следовательно и χ_1 , не производится. В этом случае

$$\delta \frac{1}{2} \int_0^l M_x^{\Pi} \chi_1 dx = \int_0^l M_x^{\Pi} \delta\chi_1 dx,$$

и вариационное уравнение после соответствующих преобразований принимает вид

$$\delta\Theta = \int_0^l \left\{ \frac{d^2}{dx^2} [M_x^y - M_x^{\Pi}] + q \right\} \delta W dx = 0, \quad (141)$$

откуда уравнения равновесия будут иметь вид

$$\frac{d^2}{dx^2} [M_x^y - M_x^{\Pi}] + q = 0 \quad (142)$$

или

$$E \frac{d^2}{dx^2} \left[(J - I_3) \frac{d^2 W}{dx^2} \right] = q. \quad (143)$$

В общем случае преобразуем вариацию функционала (140) с учетом того, что

$$\delta M_x^{\text{II}} = EI_3 \delta \chi_1 + E \chi_1 \delta I_3,$$

где

$$\delta I_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d\omega(\varepsilon_i)}{d\varepsilon_i} z^2 \delta \varepsilon_i dz,$$

а учитывая (135), получим

$$\delta I_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d\omega(\varepsilon_i)}{d\varepsilon_i} \frac{2}{\sqrt{3}} z^3 \delta \chi_1 dz = \tilde{I}_3 \delta \chi_1,$$

где

$$\tilde{I}_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d\omega(\varepsilon_i)}{d\varepsilon_i} \frac{2}{\sqrt{3}} z^3 dz.$$

Теперь вариационное уравнение примет вид

$$\delta \mathcal{D} = \int_0^l \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left[M_x^y - M_x^{\text{II}} - \frac{1}{2} \tilde{M}_x^{\text{II}} \chi_1 \right] + q \right\} \delta W dx = 0, \quad (144)$$

где

$$\tilde{M}_x^{\text{II}} = E \tilde{I}_3 \chi_1.$$

Отсюда уравнение равновесия будет иметь вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[M_x^y - M_x^{\text{II}} - \frac{1}{2} \tilde{M}_x^{\text{II}} \chi_1 \right] + q = 0. \quad (146)$$

Это уравнение также можно записать в виде

$$E \frac{d^2}{dx^2} \left[\left(J - I_3 + \frac{1}{2} \tilde{I}_3 \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \frac{d^2 W}{dx^2} \right] - q = 0. \quad (147)$$

Оценим \tilde{I}_3 и I_3 для некоторых видов $\omega(\varepsilon_i)$.

Если $\omega(\varepsilon_i)$ имеет вид (133), то

$$\tilde{I}_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2m \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \chi_1 z^4 dz = 2m \frac{4h^5}{380} \chi_1.$$

Для этого же $\omega(\varepsilon_i)$ оценим I_3 :

$$I_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 (\chi_1)^2 z^4 dz = m \frac{4h^5}{380} (\chi_1)^2.$$

Следовательно,

$$I_3 - \frac{1}{2} \tilde{I}_3 = m \frac{4h^5}{380} \chi_1^2 + m \frac{4h^5}{380} \chi_1^2 = 2I_3.$$

При учете ползучести материала (упруговязкое тело) на основе линейной теории наследственности физические соотношения принимают вид

$$\sigma_x(t) = \sigma_x^y(t) - \sigma_x^c(t), \quad (148)$$

где $\sigma_x^y(t)$ имеют вид (2), а $\sigma_x^c(t)$ записывается в виде

$$\sigma_x^c(t) = E \int_{t_0}^t \varepsilon_x^z(\tau) R_1(t, \tau) d\tau. \quad (149)$$

Здесь $R_1(t, \tau)$ – функция влияния, зависящая от материала стержня. Для оргстекла

$$R_1(t, \tau) = A_1 e^{\beta_1(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha_1-1},$$

где A_1, α_1, β_1 – известные коэффициенты.

Для бетона

$$R_1(t, \tau) = \gamma E C_{\infty} e^{-\gamma(1+E C_{\infty})(t-\tau)},$$

где γ, C_{∞} – известные коэффициенты.

Теперь неизвестная функция W будет функцией переменных x и t . Функционал полной энергии деформации стержня при длительном нагружении и учете ползучести материала примет вид

$$\mathcal{D}(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_x^y(t) \varepsilon_x^z(t) - \sigma_y^c(t) \varepsilon_x^z(t) \right] dx dz - \int_0^l q W dx. \quad (150)$$

С учетом (123) и (149) его можно записать в виде

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (M_x^y(t) \chi_1(t) - M_x^C(t) \chi_1(t)) dx - \int_0^t q W dx, \quad (151)$$

где $M_x^y(t)$ имеет вид (125), а $M_x^C(t)$ записывается в виде

$$M_x^C(t) = E J \int_{t_0}^t \chi_1(\tau) R_1(t, \tau) d\tau. \quad (152)$$

Найдем первую вариацию функционала (151) и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{E}(t) = & \int_0^t [M_x^y(t) \delta \chi_1(t) - \frac{1}{2} M_x^C(t) \delta \chi_1(t) - \\ & - \frac{1}{2} \chi_1(t) \delta M_x^C(t)] dx - \int_0^t q \delta W dx = 0. \end{aligned} \quad (153)$$

Для получения однотипного с (129) и (142) уравнения равновесия

$$\frac{d^2}{dx^2} [M_x^y - M_x^C] + q = 0 \quad (154)$$

необходимо, чтобы подчеркнутый в (153) член можно было преобразовать к виду

$$\frac{1}{2} \chi_1(t) \delta M_x^C(t) = \frac{1}{2} M_x^C(t) \delta \chi_1(t).$$

Для этого $\chi_1(t)$ нужно внести в $M_x^C(t)$ под знак интеграла по переменной τ :

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_{t_0}^t E J \chi_1^2(\tau) R_1(t, \tau) d\tau$$

и провести варьирование по неизвестной функции $W(\tau)$, входящей в $\chi_1(t)$. Таким образом, получим

$$\delta \mathfrak{E}(t) = \delta \frac{E}{2} \int_0^t \left(\chi_1^2(t) - \int_{t_0}^t \chi_1^2(\tau) R_1(t, \tau) d\tau \right) dx - \int_0^t q \delta W dx =$$

$$\begin{aligned} & = E \int_0^t [J \chi_1(t) \delta \chi_1(t) - \int_{t_0}^t J \chi_1(\tau) R_1(t, \tau) \delta \chi_1(\tau) d\tau] dx - \int_0^t q \delta W dx = \\ & = E \int_0^t \frac{d^2}{dx^2} \left[J \frac{d^2 W(t)}{dx^2} \delta W(t) - \int_{t_0}^t J \frac{d^2 W(\tau)}{dx^2} R_1(t, \tau) \delta W(\tau) d\tau \right] dx - \\ & - \int_0^t q \delta W(t) dx. \end{aligned}$$

Если $\delta W(\tau)$ вынести из-под интеграла по τ и принять за $\delta W(t)$, то

$$\delta \mathfrak{E}(t) = E \int_0^t \left\{ \frac{d^2}{dx^2} J \frac{d^2 W(t)}{dx^2} - \int_{t_0}^t J \frac{d^2 W(\tau)}{dx^2} R_1(t, \tau) d\tau - q \right\} \delta W(t) dx = 0, \quad (155)$$

откуда можем получать уравнения равновесия в виде (154).

При решении задач ползучести рассматривается начальная задача по временной координате t . При $t = t_0$ (начальные условия) решением задачи является решение упругой задачи о минимуме функционала

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t M_x^y(t) \chi_1(t) dx - \int_0^t q W(t) dx.$$

Запишем функционал (151) в виде

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{E}{2} \int_0^t \left[\chi_1^2(t) - \chi_1(t) \int_{t_0}^t J \chi_1(\tau) R_1(t, \tau) d\tau \right] dx - \int_0^t q W(t) dx. \quad (156)$$

Интеграл по переменной τ на отрезке $[t_0, t_k]$ разобьем на сумму интегралов по частичным отрезкам $[t_{i-1}, t_i]$ с шагом $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ и вычислим их приближенно по формуле прямоугольников.

В результате получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(t_k) = & \frac{E}{2} \int_0^t \left[J \chi_1^2(t_k) - \chi_1(t_k) \sum_{i=1}^k J \chi_1(t_{i-1}) R_1(t_i, t_{i-1}) \Delta t \right] dx - \\ & - \int_0^t q W(t_k) dx. \end{aligned} \quad (157)$$

При нахождении деформаций $\chi_1(t_k)$ считаются известными деформации $\chi_1(t_0), \chi_1(t_1), \dots, \chi_1(t_{k-1})$, поэтому *подчеркнутый член* в (157) является известной функцией переменной x , а неизвестной функцией является $W(x, t_k)$ и варьирование нужно проводить только по этой функции.

Если подчеркнутый в (157) член обозначить M_k , то первую вариацию функционала (157) можно записать в виде (после соответствующих преобразований)

$$\delta \mathcal{E}(t) = \int_0^l \left[E \frac{d^2}{dx^2} \left(J \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{1}{2} M_k \right) - q \right] \delta W dx.$$

Исходя из условия $\delta \mathcal{E} = 0$, получим уравнение равновесия

$$E \frac{d^2}{dx^2} \left(J \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{1}{2} M_k \right) = q. \quad (158)$$

Рекомендуемая литература

1. *Абовский, Н. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга; под ред. Н. П. Абовского. – М.: Наука, 1978. – 228 с.
2. *Абовский, Н. П.* Смешанные вариационные уравнения для пологой ребристой оболочки / Н. П. Абовский // Строительная механика и расчет сооружений. – 1969. – № 4. – С. 20–22.
3. *Андреев, Л. В.* Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации / Л. В. Андреев, Н. И. Ободан, А. Г. Лебедев. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
4. *Безухов, Н. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
5. *Бердичевский, В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
6. *Био, М.* Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. – М.: Энергия, 1975. – 208 с.
7. *Бубнов, И. Г.* Строительная механика корабля. Ч. 1–2 / И. Г. Бубнов. – СПб., 1912, 1914.
8. *Власов, В. З.* Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек / В. З. Власов // Изв. АН СССР. ОГН. – 1949. – № 6. – С. 819–939.
9. *Власов, В. З.* Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней / В. З. Власов // Изв. АН СССР. ОГН. – 1965. – № 3. – С. 81–92.
10. *Гребень, Е. С.* Основные соотношения технической теории ребристых оболочек / Е. С. Гребень // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 3. – С. 81–92.
11. *Григолюк, Э. И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод предложения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
12. *Давиденко, Д. Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений / Д. Ф. Давиденко // ДАН СССР. – Вып. 4. – 1953. – Т. 88.
13. *Енджиевский, Л. В.* Нелинейные деформации ребристых оболочек / Л. В. Енджиевский. – Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1982. – 295 с.
14. *Игнатъев, О. В.* Вариационно-параметрический метод в нелинейной теории оболочек ступенчато-переменной толщины / О. В. Игнатъев, В. В. Карпов, В. Н. Филатов. – Волгоград: ВолгГАСА, 2001. – 210 с.
15. *Ильин, В. П.* Численные методы решения задач строительной механики / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. – Минск: Высшая школа, 1990. – 349 с.
16. *Ильюшин, А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
17. *Канторович, Л. В.* Один прямой метод приближенного решения задач о минимуме двойного интеграла / Л. В. Канторович // Изв. АН СССР, ОМЭН. – 1933. – № 5. – С. 647–652.

34. *Михлин, С. Г.* Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
35. *Новожилов, В. В.* Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпроиздат, 1962. – 431 с.
36. *Образцов, И. Ф.* Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкций / И. Ф. Образцов. – М.: Машиностроение, 1966.
37. *Петров, В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинки и оболочек / В. В. Петров. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. – 119 с.
38. *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
39. *Сальников, А. Ю.* Вариационно-параметрический метод в нелинейных задачах динамики пологих оболочек ступенчато-переменной толщины / А. Ю. Сальников // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: междуз. темат. сб. тр. / – СПб.: СПбГАСУ, 2002. – С. 93–99.
40. *Самарский, А. А.* Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
41. *Тимашев, С. А.* Устойчивость подкреплённых оболочек / С. А. Тимашев. – М.: Стройиздат, 1974. – 256 с.
42. *Шалашилин, В. И.* Метод продолжения по параметру и его применение к задаче больших прогибов непологой круговой арки / В. И. Шалашилин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. – № 4. – С. 178–184.
43. *Якушев, В. Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек / В. Л. Якушев. – М.: Наука, 2004. – 276 с.
44. *Bakouline, N.* Variation parametric research technique of variable by step width shallow shells with finite deflections / N. Bakouline, O. Ignatiev and V. Karpov // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume I / Issue 3. 2000, p. 1–6.
45. *Donell, L. N.* A new theory for buckling of thin cylinders under axial compression and bending / L. N. Donell // Trans. ASME. 1934. 56.
46. *Karman, Th.* The buckling of spherical shells by external pressure / Karman Th. and Shen Tsien H. // J. Aeron. Sci. 7. 1939.
47. *Marguerre, K.* Zur Theorie der gekrümten Platte grosser Formänderung / K. Marguerre // Jahrbuch 1939 deutscher Luftfahrtforschung. Bd. 1. Berlin: Ablershof Bucherei. 1939.
48. *Reissner, H.* Spannungen in Kuegelschale (Kuppeln) / H. Reissner. Festschrift Muller Breslau, 1912, s. 181.

18. *Канторович, Л. В.* Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
19. *Карпов, В. В.* Уточнение решений при использовании шаговых методов в теории гибких пластинок и оболочек / В. В. Карпов, В. В. Петров // Изв. АН СССР. – МТТ. – 1975. – № 5. – С. 189–191.
20. *Карпов, В. В.* Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования / В. В. Карпов, О. В. Игнатьев, А. Ю. Сальников. – М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. – 420 с.
21. *Карпов, В. В.* Метод вариационных предельных преобразований в теории оболочек, имеющих нерегулярности / В. В. Карпов // Вестник гражданских инженеров. – СПб.: СПбГАСУ, 2005. – № 4(5). – С. 37–42.
22. *Карпов, В. В.* Компьютерные технологии расчета покрытий строительных сооружений оболочечного типа / В. В. Карпов // Вестник гражданских инженеров. – СПб.: СПбГАСУ, 2005. – Вып. 2. – С. 17–25.
23. *Карпов, В. В.* Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек / В. В. Карпов. – СПб.: СПбГАСУ, 2006. – 330 с.
24. *Карпов, В. В.* Метод последовательного наращивания ребер и его применение к расчету оболочек ступенчато-переменной толщины / В. В. Карпов // Проблемы прочности материалов и конструкций на транспорте. – М.: Транспорт, 1990. – С. 162–167.
25. *Карпов, В. В.* Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения / В. В. Карпов. – М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 1999. – 154 с.
26. *Карпов, В. В.* Метод последовательного изменения кривизны / В. В. Карпов, О. В. Игнатьев // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: междуз. темат. сб. тр. / – СПб.: СПбГАСУ, 1996. – Вып. 2. – С. 131–135.
27. *Климанов, В. И.* Нелинейные задачи подкреплённых оболочек / В. И. Климанов, С. А. Тимашев. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – 291 с.
28. *Корн, Г.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
29. *Малинин, Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
30. *Милейковский, И. Е.* Устойчивость прямоугольных в плане пологих оболочек / И. Е. Милейковский, И. П. Гречанинов // Расчет пространственных конструкций: сб. статей. – М.: Стройиздат, 1969. – Вып. 12. – С. 168–176.
31. *Милейковский, И. Е.* Расчет тонкостенных конструкций / И. Е. Милейковский, С. И. Трушин. – М.: Стройиздат, 1989. – 200 с.
32. *Михайлов, Б. К.* Пластины и оболочки с разрывными параметрами / Б. К. Михайлов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 196 с.
33. *Михлин, С. Г.* Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1966.

Оглавление

Введение	3
1. Вариационный принцип Лагранжа	6
2. Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского	10
3. Вариационный принцип Кастильяно	12
4. Метод Ритца	14
5. Метод Ритца при дискретной аппроксимации искомых функций	18
6. Метод Бубнова – Галеркина	25
7. Метод Власова – Канторовича в форме метода Галеркина	28
8. Метод продолжения решения по параметру	31
9. Вариационно-параметрический метод в нелинейной теории оболочек	33
9.1. Основные соотношения геометрически нелинейной теории пологих оболочек ступенчато-перемеженной толщины	34
9.2. Применение метода Ритца к функционалу полной энергии деформации для задач статики	38
9.3. Линеаризация систем алгебраических уравнений методом продолжения решения по параметру	39
10. Метод конечных элементов	42
11. Метод наискорейшего спуска	45
12. Метод вариационных предельных преобразований в теории оболочек, имеющих нерегулярности	48
13. Метод упругих решений	60
14. Вариационный метод вывода уравнений равновесия строительных конструкций	61
Рекомендуемая литература	71

Учебное издание

Карлов Владимир Васильевич
Сальников Антон Юрьевич

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ ПРИ РАСЧЕТЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

Редактор А. В. Афанасьева
Корректор К. И. Бойкова
Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 16.06.09. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 4.4. Уч.-изд. л. 4.7. Тираж 250 экз. Заказ 67. «С» 25.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., 4.
Отпечатано на ризографе, 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., 5.