Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

А. М. КОКОРИН

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОФИЛЯ В СРЕДЕ MATHCAD

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2007

УДК [681.3]

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Б. И. Воробьев (Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской Академии наук; д-р физ.-мат. наук, проф. Э. Н. Береславский (Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации)

Кокорин А. М.

Численные методы решения задач строительного профиля в среде MathCad: учебное пособие по курсу «Информатика» / А. М. Кокорин; СПб. гос. архит.-строит. ун-т. – СПб., 2007. – 38 с.

Рассматриваются различные численные методы решения задач строительного профиля, даются варианты контрольных работ и образцы их выполнения в среде MathCad. Приводится краткая характеристика системы MathCad, разработанной для операционной системы класса WINDOWS, и основы работы в этой системе (вычислительные, графические возможности).

Издание ориентировано на студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения, может быть полезно слушателям факультета повышения квалификации, аспирантам и преподавателям.

Табл. 2. Ил. 3. Библиогр.: 3 назв.

Рекомендовано Редакционно-издательским советом СПбГАСУ в качестве учебного пособия

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ. 4
I. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. 4
1. Введение. 4
2. Итерационные алгоритмы. 6
2.1. Метод дихотомии (деления отрезка пополам). 6
2.2. Метод касательных (Ньютона). 6
2.3. Метод секущих (хорд) 7
2.4. Метод простых итераций. 8
2.5. Примеры. 9
II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. 14
1. Метод Эйлера для уравнения первого порядка. 16
2. Метод Эйлера для уравнения второго порядка. 16
3. Примеры. 17
3.1. Метод Эйлера для уравнения первого порядка. 17
3.2. Метод Эйлера для уравнения второго порядка. 18
III. СОЗДАНИЕ ГРАФИКОВ. 20
1. Построение двухмерного графика функции. 20
2. Форматирование графика. 21
IV. ОСНОВЫ РАБОТЫ В MATHCAD. 22
1. Назначение MathCAD. 22
1.1. Интерфейс пользователя. 23
1.2. Меню. 24
1.3. Панели инструментов. 25
1.4. Рабочая область. 26
1.5. Строка состояния. 26
1.5. Справочная информация. 27
2. Вычисления. 27
2.1. Переменные и функции. 27
2.2. Присваивание переменным значений. 27
2.3. Функции. 27
2.4. Определение функции пользователя. 28
2.5. Вывод значений переменных и функций. 28
2.6. Вычисление выражения. 29
2.7. Вывод значения функции. 29
3. Операторы. 29
3.1. Арифметические операторы. 30
3.2. Вычислительные операторы. 31
3.3. Логические операторы. 32
3.3. Матричные операторы. 33
3.4. Программные операторы. 33
V. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ. 35
Рекомендуемая литература. 38

Предисловие

Предлагаемая читателю работа является учебным пособием к курсу лекций «Информатика», читаемого студентам всех специальностей. Создавая это пособие, автор пытался совместить две цели. Первая – изложить материал, делая акцент на решении конкретных математических задач, рассматриваемых в этом курсе и не вошедших в учебное пособие [3]. Вторая цель – последовательно рассказать об основах расчетов, интерфейсе пользователя системы MathCAD в части, касающейся рассматриваемых в настоящем пособии численных методов.

Пособие состоит из четырех глав. В первых трех рассматриваются краткие теоретические основы численных методов (нахождение корней нелинейных уравнений, методы решения задач Коши для уравнений и их систем и построение графиков). Более полное изложение некоторых из этих вопросов можно найти, например, в [1, 2]. Приводится решение типовых задач для этих методов в системе MathCAD. В четвертой – излагаются основы работы в этой системе и дается краткая справочная информация, касающаяся операторов системы MathCAD, используемых в примерах этого пособия.

I. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение

В данной работе рассматриваются задачи, в которых математические модели представлены уравнениями вида

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где уравнения (1) следующего класса:

а) нелинейных алгебраических вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$;

б) нелинейных трансцендентных (например, $\sin x + x = 0$; $e^x + a^x + \cos x$).

Нахождение корня уравнения, т. е. значения аргумента x^*, обеспечивающего выполнение равенства (1), проводится в два этапа.

На первом этапе осуществляется отделение корней уравнения (1). Отделить корень уравнения – значит найти такой конечный интервал, на

котором имеется единственный его корень. Перемена знака функции свидетельствует о нахождении в подынтервале либо корня функции, либо точки разрыва. Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f принимает на его концах значения разных знаков, то на интервале $[a, b]$ существует хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$. При этом корень будет заведомо единственным, если f монотонна на $[a, b]$ (например, когда f дифференцируема и $f'(x) > 0$ на (a, b)).

Точное число лежащих на данном интервале действительных корней многочлена с действительными коэффициентами, не имеющего кратных корней, находят по правилу Штурма.

Предварительное исследование функций проводится одним из следующих способов:

а) табулированием функции на заданном интервале изменения аргумента;

б) графоаналитическими методами исследования.

На втором этапе выполняется уточнение значения корня до заданной точности ε, т. е. для каждого отдельного подынтервала проводится итерационные процедуры уточнения.

Ограничение итерационного процесса может быть обеспечено, если выполняется условие

$$|f(x_i)| \le \varepsilon_1, \tag{2}$$

где ε_1 – положительное число, значение которого определяется исследователем.

Это условие может оказаться недостаточным для нахождения, в частности, корней медленно меняющихся функций, а также в случаях, когда в пределах подынтервала находится точка разрыва функции. Уточнение корня или точки разрыва может быть обеспечено включением в алгоритм операции контроля длины интервала неопределенности значения корня:

$$|x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon_2, \tag{3}$$

где ε_2 – заданное положительное число, определяющее максимальную длину подынтервала между соседними значениями аргумента x_i, x_{i+1}, для которых вычислены значения функции $f(x)$.

Для уточнения приближенного значения обычно используются итерационные алгоритмы. С их помощью строится последовательность, элементы которой в пределе сходятся к точному значению корня x^* уравнения (1). Сам метод решения при этом называется итерационным или методом последовательных приближений.

2. Итерационные алгоритмы

Для уточнения корней уравнений (1) будем использовать алгоритмы, обеспечивающие получение решения за конечное число шагов итерационного процесса при выполнении в его начале условия (3). Это алгоритмы методов дихотомии, касательных секущих и конечных итераций.

2.1. Метод дихотомии (деления отрезка пополам)

На первом этапе должен быть найден отрезок $[a, b]$ такой, что $f(a)$ $f(b) < 0$. За начальное приближение примем $x_0 = \dfrac{b-a}{2}$.

На втором этапе выбирается тот из двух отрезков $[a, x_0]$, $[x_0, b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков и за x_0 принимается середина этого отрезка, и т. д. Таким образом, строится последовательность x_n, $n = 0,1$ ..., сходящаяся при $n \to \infty$ к x^*. После каждой итерации отрезок, содержащий корень, уменьшается вдвое. Инерционный процесс продолжается до тех пор, пока длина полученного отрезка не станет меньше заданной величины ε. За приближенное решение принимается средняя точка последнего промежутка.

2.2. Метод касательных (Ньютона)

Геометрический смысл метода касательных заключается в том, что на отрезке $[a, b]$, содержащем корень x^* уравнения (1), график функции заменяется отрезком касательной, проведенной к графику $f(x)$ при $x = a$ или $x = b$. При этом используется только одна точка, поэтому не обязательно задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень, достаточно задать некоторое приближение x_0.

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{4}$$

Для точки пересечения с осью OX получаем

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{5}$$

Если x_n – некоторое приближение точного значения корня x^* исходного уравнения, то можно получить следующее приближение корня x^*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

Объем вычислений в методе Ньютона на каждом шаге выше, чем в предыдущих методах, так как в точке x_n вычисляются значения функции и ее производной, но этот недостаток компенсируется более высокой скоростью сходимости этого метода.

Геометрически метод Ньютона означает, что следующее приближение x_{n+1} находится, если график функции f в окрестности точки $(x_n, f(x_n))$ заменить касательной к графику, проведенной в этой точке, и взять за x_{n+1} точку пересечения касательной с осью абсцисс.

Метод Ньютона сходится не при всяком выборе начального приближения x_0 на отрезке $[a, b]$, содержащем корень уравнения. Если функции $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки при $x \in [a, b]$, исходя из начального приближения $x_0 \in [a, b]$, удовлетворяющего условию $f(x) f''(x) > 0$, то можно вычислить методом Ньютона единственный корень уравнения $f(x) = 0$ с любой степенью точности е. Достаточных условий сходимости метода будет сохранение знака второй производной $f''(x)$ на некотором промежутке, содержащем корень, и выбор начального приближения с той стороны от корня, где знак функции совпадает со знаком второй производной.

2.3. Метод секущих (хорд)

Большей скоростью сходимости обладает метод секущих (МС), у которого на втором этапе при выборе очередного приближения внутри отрезка, содержащего корень, учитывается величина невязки на концах отрезка: точка выбирается ближе к тому концу, где невязка меньше. Геометрический смысл метода заключается в замене кривой $y = f(x)$ хордой. Для точки пересечения хорды с осью абсцисс $x = c,\ y = 0$ имеем

$$c = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a). \tag{7}$$

При этом $x = c$ принимается за очередное приближение к корню. Далее выбирается тот из промежутков $[a, c]$, $[c, b]$, на концах которого функция имеет значения разных знаков. При этом, как показано в [1], если $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция и знак $f''(x)$ сохраняется на рассматриваемом промежутке, то полученные приближения будут сходиться к корню монотонно. Очередное приближение находится как точка пересечения хорды с осью абсцисс.

За начальное приближение x_0 принимается то из чисел, для которого эти знаки $f(x_0)$ и $f''(x_0)$ одинаковы. В МС вычисление приближения корня уравнения производят по формулам

$$x_0 = b;\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - a) \tag{8}$$

либо

$$x_0 = a;\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(b)}(b - x_n). \tag{9}$$

2.4. Метод простых итераций

Предварительно исходное уравнение приводят к равносильному уравнению вида $x = \varphi(x)$. Это можно сделать различными способами, например, используя теорему [1], приводимую здесь без доказательства.

Теорема

Пусть на промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны и выполняется неравенство $M_1 < f'(x) \le M_2$, где $M_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} f'(x)$ и $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} f'(x)$. То тогда последовательность

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0, 1, 2 \ldots \tag{10}$$

монотонно сходится к корню x^* уравнения $f(x) = 0$. Здесь функция $\varphi(x_n)$ (непрерывная и знакопостоянная) имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{M_2} f(x). \tag{11}$$

Таким образом, выбирая некоторое приближение x_0 и вычисляя по формулам (8), мы получаем последующие приближения искомого корня уравнения. Этот процесс называют также одношаговой итерацией. Итерационный процесс обычно прекращают, если два соседних приближения совпадают с заданной точностью: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$.

2.5. Примеры

Для функции $f(x)$, приведенной в индивидуальном задании (табл. 1), найти решение уравнения (1) с заданной точностью е. Для решения использовать методы: дихотомии, Ньютона, хорд и конечных итераций.

Пример. С точностью $\varepsilon = 0.001$ найти положительный корень уравнения $f(x) = x^3 + 2.8x - 6.3$

Листинг 1. Программа отделения корней.

Введите искомую функцию F (z):

$$F(z) := z^3 + 2.8\cdot z - 6.3$$

Найдем её первую и вторую производные:

$$F1(z) := \frac{d}{dz}F(z) \qquad F2(z) := \frac{d^2}{dz^2}F(z)$$

Введем границы интервала [A, B] для отделения корней

$A := -1$

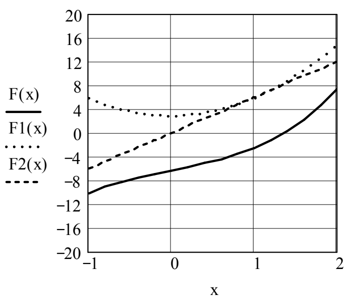
$A1 := -0.8$

$B := 2$

Выведем на экран таблицу функций F(x), F1(x), F2(x):

x =	F(x) =	F1(x) =	F2(x) =
-1.00	-10.100	5.800	-6.000
-0.80	-9.052	4.720	-4.800
-0.60	-8.196	3.880	-3.600
-0.40	-7.484	3.280	-2.400
-0.20	-6.868	2.920	-1.200
0.00	-6.300	2.800	0.000
0.20	-5.732	2.920	1.200
0.40	-5.116	3.280	2.400
0.60	-4.404	3.880	3.600
0.80	-3.548	4.720	4.800
1.00	-2.500	5.800	6.000
1.20	-1.212	7.120	7.200
1.40	0.364	8.680	8.400
1.60	2.276	10.480	9.600
1.80	4.572	12.520	10.800
2.00	7.300	14.800	12.000

Построим графики функций:



Из графика видно, что функция меняет знак на интервале [*1.2, 1.4*].

Значение корня можно получить, используя стандартную функцию пакета *root*, предназначенную для нахождения корня уравнения, задав z = 1,3 (приблизительное значение корня).

Листинг 2. Нахождение корня уравнения с помощью стандартной функции root.

$$F(z) := z^3 + 2.8\cdot z - 6.3$$
$$z := 1.3$$
$$y := root(F(z), z)$$
$$y = 1.3571$$

Листинг 3. Метод касательных.
Введем пользовательские функции:

$$F(z) := z^3 + 2.8\cdot z - 6.3$$

$$F1(z) := \frac{d}{dz}F(z)$$

введем границы интервала для уточнения
a :=1.2
b :=1.4
определим пользовательскую функцию.

$$y(z) := \frac{F(z)}{F1(z)}$$

Для уточнения корня методом касательных проверяется достаточное условие применимости метода. Для этого определяются знаки функции и второй производной на концах выбранного промежутка. За начальное приближение x_0 принимается то из чисел, для которого эти знаки одинаковы.

$$F(b)\cdot F2(b) = 3.058$$
$$x_0 := if(F(a)\cdot F2(a) > 0, a, b)$$

Введем число итераций, необходимых для поиска корней.

$$n := 3$$

Итерационный процесс:

$$i := 0..n$$

$$x_{i+1} := x_i - y(x_i)$$

x_i =

1.4
1.35806
1.35719
1.35719

Вычисления по формулам производятся до тех пор, пока не совпадут две последние итерации.

$$eps := \left|x_{n-1} - x_{n-2}\right|$$

Проверка

$F(x_n) = 576.87188 \times 10^{-15}$

Листинг 4. Метод простых итераций.
Введем пользовательские функции.

$F(z) := z^3 + 2.8 \cdot z - 6.3$

$F1(z) := \frac{d}{dz} F(z)$

Введем границы интервала.

$a := 1.2$

$b := 1.4$

Введем равномерную сетку для этого интервала с n узлами.

$n := 8$

$h := \frac{(b - a)}{n}$

$k := 1$

$x_k := a + h \cdot k$

Построение равносильного уравнения. Для этого приведем уравнение F(z)=0 к виду x= Q(teta,x).

$y_k := F1(x_k)$

Параметр teta обеспечивает сходимость итерационного процесса.

$teta := \frac{1}{max(y)}$

$teta = 0.115$

$Q(teta, x) := x - teta \cdot F(x)$

Выберем за начальное приближение.

$z_0 := b$

Введем число итераций, необходимых для поиска корня.

$N := 12$

$i := 0 .. N$

$z_{i+1} := Q(teta, z_i)$

$z_N = 1.3$

Проверка

$F(z_N) = 0$

Листинг 5. Метод половинного деления.
Введем уравнение

$F(z) := z^3 + 2.8 \cdot z - 6.3$

Выберем за начальное приближение

$z_0 := \frac{(a + b)}{2}$

$d := |b - a|$

Введем число итераций, необходимых для поиска корня

$n := 14$

Итерационный процесс

$i := 0 .. n$

$$z_{i+1} := if\left(\frac{d}{2^i} - eps, if\left(F\left(z_i - \frac{d}{2^{i+1}}\right) \cdot F(z_i) > 0, z_i + \frac{d}{2^{i+2}}, z_i - \frac{d}{2^{i+2}}\right), 0\right)$$

$z =$

	0
0	1.30000
1	1.35000
2	1.37500
3	1.36250
4	1.35625
5	1.35937
6	1.35781
7	1.35703
8	1.35742
9	1.35722
10	1.35712
11	1.35717
12	1.35720
13	1.35719
14	1.35718
15	1.35718

Листинг 6. Метод хорд.
Введем уравнение

$F(z) := z^3 + 2.8 \cdot z - 6.3$

Введем число итераций, необходимых для поиска корня

$n := 7$

Для уточнения корня методом хорд проверяется достаточное условие применимости метода. Для этого определяются знаки функции и второй производной на концах выбранного промежутка. За начальное приближение принимается то из чисел, для которого эти знаки одинаковы.

$$p := F(b)\cdot\frac{d^2}{db^2}F(b)$$

$$x_0 := if(p > 0, b, a)$$

За следующее приближение принимается другой конец промежутка. Вычисления по формулам производятся до тех пор, пока не совпадут две последние итерации.

Итерационный процесс:

$$i := 0..n$$

$$x_{i+1} := if\left[p > 0, x_i - F(x_i)\cdot\frac{(x_i - a)}{(F(x_i) - F(a))}, x_i - F(x_i)\cdot\frac{(b - x_i)}{(F(b) - F(x_i))}\right]$$

x =

	0
0	1.40000
1	1.35381
2	1.35746
3	1.35717
4	1.35719
5	1.35719
6	1.35719
7	1.35719
8	1.35719

Точность вычислений:

$$eps := |x_n - x_{n-1}|$$

$$eps = 1.182 \times 10^{-8}$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения (ДУ) – это уравнения, которые содержат одну или несколько производных любых порядков от искомой функции. Порядком ДУ называется порядок старшей производной, входящей в уравнение. Если в уравнения входят производные только по одной переменной, то они называются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ*)*. В противном случае говорят об уравнениях в частных производных. Решить (иногда говорят проинтегрировать*)* дифференциальное уравнение – значит определить неизвестную функцию на определенном интервале изменения ее переменных. Эта функция, будучи подставленная в исходное ДУ, обращает его в тождество.

Рассмотрим ОДУ первого порядка, которые в общем случае имеют вид

$$F(x, y, y2) = 0. \qquad (12)$$

Если это уравнение удается разрешить относительно производной, то получим ОДУ первого порядка в нормальной форме

$$y2 = f(x, y2). \qquad (13)$$

Общее решение такого уравнения записывается в виде

$$y = \varphi(x, c). \qquad (14)$$

ОДУ порядка n записываются в виде

$$F(x, y, y2, y3, \ldots, y^n) = 0, \qquad (15)$$

где F – известная функция; x – независимая переменная.

Если это уравнение удается разрешить относительно старшей производной y^n, то получаем уравнение порядка n в нормальной форме

$$y^n = f(x, y, y2, y3, \ldots, y^{n-1}). \qquad (16)$$

Общее решение этого уравнения записывают в виде

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n). \qquad (17)$$

Уравнение (16) можно свести к системе уравнений, содержащих производные нескольких неизвестных функций по одной и той же независимой переменной x:

$$,, \begin{cases} y_1^1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2^1 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^1 = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (18)$$

Кроме общего решения различают частные решения и особые решения. Частным решением ДУ называется такое решение, которое получается из общего при определенном значении произвольной постоянной c. Как известно, одно ОДУ или их система имеет единственное решение, если помимо уравнения определенным образом заданы начальные или граничные условия. В соответствующих курсах высшей математики доказываются теоремы о существовании и единственности решения в зависимости от тех или иных условий. Мы не будем касаться методов нахождения общих решений ОДУ. Рассмотрим численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Метод Эйлера для уравнения первого порядка

Решим задачу Коши для ОДУ первого порядка (13) при начальном условии

$$y(x_0) = y_0. \qquad (19)$$

Функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой области интегрирования D. Найти численное решение задачи Коши на отрезке $[a, b]$ – это значит построить таблицу значений искомого решения при дискретных значениях аргумента x:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b. \qquad (20)$$

Величину $h = x_{i+1} - x_i$ называют шагом вычислений, $n = \frac{b-a}{h}$ – количество отрезков. Значения искомой функции y, соответствующие указанным значениям аргумента x, обозначим через $y_0, y_1 \ldots, y_n$. Численный метод решения задачи Коши, использующий формулу

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (21)$$

называется методом Эйлера. По этой формуле при известных x_0, y_0 можно последовательно построить искомое решение.

2. Метод Эйлера для уравнения второго порядка

Решим задачу Коши для системы ОДУ второго порядка (17) для начальных условий

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}. \qquad (22)$$

Построим таблицу значений искомого решения при дискретных значениях аргумента x: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Метод Эйлера для ДУ первого порядка [2] легко обобщается для системы (16):

$$\begin{cases} y_{1,\,i+1} = y_{1i} + hf_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \\ y_{2,\,i+1} = y_{2i} + hf_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \end{cases} \quad (i = 0,1) \qquad (23)$$

В работе [2] даны с подробным объяснением примеры, использующие для решения задачи Коши для ДУ и систем ДУ метод Эйлера. В настоящем пособии рассмотрим реализацию этих решений в системе MathCad.

3. Примеры

3.1. Метод Эйлера для уравнения первого порядка

Решить задачу Коши для ДУ

$$y^1 = \frac{x^2}{y}, \qquad y(1) = 1 \qquad (24)$$

на интервале $[1, 10]$ с шагом $h = 0.2$ с помощью метода Эйлера. Известно точное решение задачи Коши: $u(t) = \sqrt{\frac{2t^3+1}{3}}$.

Листинг 7. Уравнения первого порядка.
Введем начальные данные.
Правая часть ДУ:

$$f(x, u) := \frac{x^2}{u}$$

Начальные условия:

$x_0 := 1$

$y_0 := 1$

Точное решение задачи Коши:

$$u(t) := \sqrt{\left(\frac{2 \cdot t^3 + 1}{3}\right)}$$

Правая граница интервала:

$X := 10$

Шаг

$h := 0.2$

Введем равномерную сетку x_i *и воспользуемся разностной схемой (21). Тогда:*

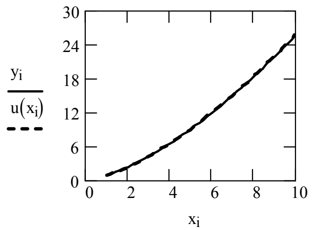
$$N := \frac{(X - x_0)}{h}$$

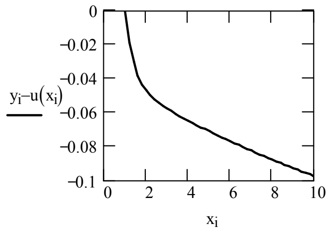
$N = 45$

$x_{i+1} := x_i + h$

$y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

Результаты расчетов представим в виде графиков:





3.2. Метод Эйлера для уравнения второго порядка

Решить задачу Коши для системы двух дифференциальных уравнений методом Эйлера на интервале $x \in [1; 1{,}5]$:

$$\begin{cases} y_1^1 = 1 - \dfrac{2y_1}{x}, \\ y_2^1 = y_1 + y_2 - 1 + \dfrac{2y_1}{x}. \end{cases} \qquad (25)$$

Начальные условия:

$y_1(1) = 1/3;$

$y_2(1) = -1/3.$

Листинг 8. Решение уравнения второго порядка.
Вводим начальные данные в пакете MathCAD.
Правые части ДУ:

$f1(x, y, z) := 1 - 2 \cdot \dfrac{y}{x}$

$f2(x, y, z) := y + z - 1 + 2 \cdot \dfrac{y}{x}$

Граница интервала

$a := 1$ $\qquad b := 1.5$

Шаг

$h := 0.05$

Введем равномерную сетку x_i и воспользуемся разностной схемой (23)

$n := \dfrac{b - a}{h}$

$n = 10$

Начальные условия:

$x_0 := a$

$y_0 := \dfrac{1}{3}$

$z_0 := \dfrac{-1}{3}$

$i := 0 .. n - 1$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot f1(x_i, y_i, z_i) \\ z_i + h \cdot f2(x_i, y_i, z_i) \end{pmatrix}$$

Результаты представим в виде таблицы и графика:

$x =$

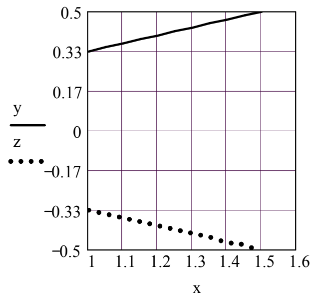
	0
0	1
1	1.05
2	1.1
3	1.15
4	1.2
5	1.25
6	1.3
7	1.35
8	1.4
9	1.45
10	1.5

$y =$

	0
0	0.333
1	0.35
2	0.367
3	0.383
4	0.4
5	0.417
6	0.433
7	0.45
8	0.467
9	0.483
10	0.5

$z =$

	0
0	-0.333
1	-0.35
2	-0.367
3	-0.383
4	-0.4
5	-0.417
6	-0.433
7	-0.45
8	-0.467
9	-0.483
10	-0.5



III. СОЗДАНИЕ ГРАФИКОВ

В MathCAD все типы графиков можно разбить на две большие группы.

Двухмерные графики:

• *XY* (декартовый) график (*XY Plot*);

• полярный график (*Polar Plot*).

Трехмерные графики:

• график трехмерной поверхности (*Surface Plot*);

• график линий уровня (*Contour Plot*);

• трехмерная гистограмма (*3D Bar Plot*);

• трехмерное множество точек (*3D Scatter Plot*);

• векторное поле (*Vector Field Plot*).

Все графики создаются совершенно одинаково, с помощью панели инструментов *Graph*. Технологию построения графиков в MathCAD рассмотрим на примере создания двухмерного графика.

1. Построение двухмерного графика функции

Для построения двухмерного графика функции надо выполнить следующую процедуру:

а) на листовом поле с клавиатуры ввести название функции, например, $f(x) = \cos(x)\sin(x)$;

б) установить крестообразный курсор в то место, где должен быть построен график;

в) на математической панели Графики (*Graph*) щелкнуть на кнопке Декартов график (двухмерный график);

г) в появившемся на месте курсора шаблоне двухмерного графика ввести на оси абсцисс имя аргумента, на оси ординат – имя функции;

д) щелкнуть мышью вне шаблона графика – для заданного диапазона изменения аргумента график будет построен. При этом функцию заранее не вводить, а сразу записать на оси ординат (рис. 1).

Если диапазон значений аргумента не задан, по умолчанию график строится в диапазоне значений аргумента от –10 до 10. Чтобы в одном шаблоне разместить несколько графиков, следует, набрав на оси ординат имя первой функции, набрать запятую – уголок курсора при этом обязательно должен находиться в конце имени функции, и в появившемся месте ввода (черном квадратике) вписать имя второй функции и т. д.

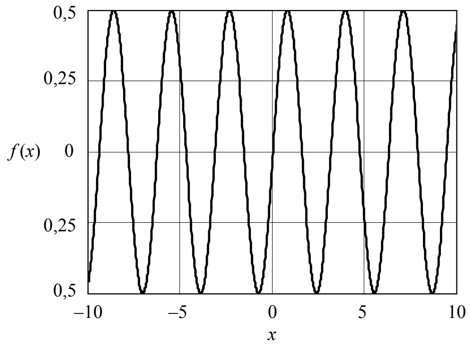


Рис. 1. График $f(x) = \cos(x)\sin(x)$

Если две функции имеют разные аргументы, например $f1(x)$ и $f2(y)$, то на оси ординат надо ввести (через запятую) имена обеих функций, а на оси абсцисс (также через запятую) – имена обоих аргументов x и y. Тогда первый график будет построен для первой функции по первому аргументу, второй график – для второй функции по второму аргументу. Если функций введено несколько, а аргументов два, то график первой функции строится по первому аргументу, графики остальных функций – по второму аргументу. Если ввести на осях ординат и абсцисс имена двух функций одного аргумента, то будет построен параметрический график функции.

2. Форматирование графика

Чтобы отформатировать график, дважды щелкните мышью в области графика – откроется диалоговое окно форматирования графика.

1. Оси *X–Y* (*X–Y Axes*) – форматирование осей координат. Можно нанести сетку, проставить численные значения, ось абсцисс провести через нуль ординаты Пересечение (*Crossed*) или нанести метки на графике. Установите нужные вам флажки:

• логарифм (*Log Scale*) – представить численные значения на осях в логарифмическом масштабе (по умолчанию численные значения наносятся в линейном масштабе);

• линии сетки (*Grid Lines*) – нанести сетку линий;

• нумерация (*Numbered*) – расставить числа по координатным осям;

• автомасштаб (*Auto Scale*) – автоматический выбор предельных численных значений на осях (если этот флажок снят, предельными будут максимальные вычисленные значения);

• показатель метки (*Show Markers*) – нанесение меток на график (на каждой оси появляются 2 места ввода, в которые можно ввести численные значения, не вводить ничего, ввести одно число или буквенные обозначения констант) в виде горизонтальных или вертикальных пунктирных линий, соответствующих указанному значению на оси, причем сами значения выводятся в конце линий;

• автосетка (*Autogrid*) – автоматический выбор числа линий сетки.

2. След (*Trace*) – форматирование графиков функций. Для каждого графика в отдельности можно изменить:

• вид линии (*Solid* – сплошная, *Dot* – пунктир, *Dash* – штрихи, *Dadot* – штрих-пунктир);

• цвет линии (*Color*);

• тип (*Type*) графика (*Lines* – линия, *Points* – точки, Bar или *Solidbar* – столбики, *Step* – ступенчатый график и т. д.);

• толщину линии (*Weight*);

• символ (*Symbol*) на графике для расчетных точек (кружок, крестик, прямоугольник, ромб).

3. Метки (*Label*) – заголовок в области графика. В поле Название (*Title*) можно записать текст заголовка. Затем выберите его положение – вверху или внизу графика. Впишите, если надо, названия аргумента и функции – Метки осей (*Axis Labels*).

4. Умолчание (*Defaults*) – с помощью этой вкладки можно вернуться к виду графика, принятому по умолчанию (*Change to default*), либо сделанные вами изменения на графике использовать по умолчанию для всех графиков данного документа.

IV. ОСНОВЫ РАБОТЫ В MATHCAD

1. Назначение MathCAD

Математический редактор MathCAD позволяет проводить разнообразные расчеты, начиная от элементарной арифметики и заканчивая сложными реализациями численных методов. Благодаря простоте применения, наглядности математических действий, обширной библиотеке встроенных функций и численных методов, возможности символьных

вычислений, а также превосходному аппарату представления результатов (графики самых разных типов), MathCAD стал наиболее популярным математическим приложением.

С помощью MathCAD можно:

• проводить математические расчеты;

• подготавливать графики с результатами расчетов;

• вводить исходные данные и выводить результаты в текстовые файлы или файлы с базами данных в других форматах;

• подготавливать отчеты работы в виде печатных документов;

• подготавливать Web-страницы и публиковать результаты в Интернете;

• получать различную справочную информацию из области математики;

• вводить математические выражения и текст;

• осуществлять математические расчеты в соответствии с введенными формулами;

• строить графики различных типов и вставлять их непосредственно в документы;

• вводить и выводить данные в файлы различных форматов;

• осуществлять символьные вычисления.

В состав MathCAD входят несколько интегрированных между собой компонентов. Это мощный текстовый редактор для ввода и редактирования текста и формул; вычислительный процессор – для проведения расчетов согласно введенным формулам; символьный процессор.

1.1. Интерфейс пользователя

В MathCAD интерфейс пользователя сходен с другими приложениями Windows (рис. 2).

Его составные части:

• верхнее меню (menu bar);

• панели инструментов (toolbars) Standard (Стандартная) и Formatting (Форматирование);

• панель инструментов Math (Математика) и доступные через нее дополнительные математические панели инструментов;

• рабочая область (worksheet);

• строка состояния (status line, или status bar);

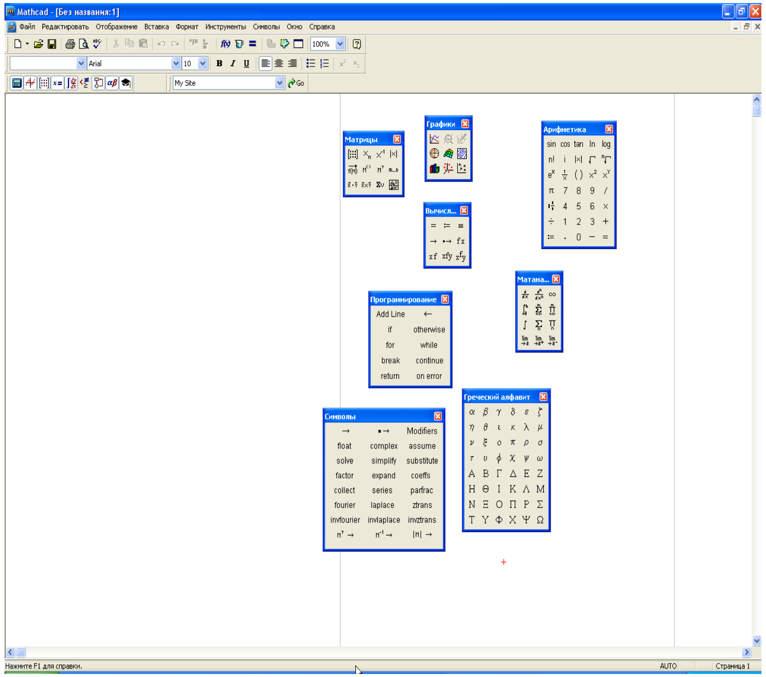


Рис. 2. Рабочий лист MathCAD-документа названия

• всплывающие, или контекстные, меню (pop-up menus, или context menus);

• диалоговые окна или диалоги (dialogs).

Большинство команд можно выполнить как с помощью меню (верхнего или контекстного), так и панелей инструментов или клавиатуры.

1.2. Меню

Строка меню располагается в самой верхней части окна MathCAD. Она содержит девять заголовков:

File (Файл) – команды, связанные с созданием, открытием, сохранением, пересылкой по электронной почте и распечаткой на принтере файлов с документами;

Edit (Правка) – команды, относящиеся к правке текста (копирование, вставка, удаление фрагментов и т. п.);

View (Вид) – команды, управляющие внешним видом документа

в окне редактора MathCAD, а также команды, создающие файлы анимации;

Insert (Вставка) – команды вставки различных объектов в документы;

Format (Формат) – команды форматирования текста, формул и графиков;

Math (Математика) – команды управления вычислительным процессом;

Symbolics (Символика) – команды символьных вычислений;

Window (Окно) – команды управления расположением окон с различными документами на экране;

Help (Справка) – команды вызова контекстно-зависимой справочной информации.

1.3. Панели инструментов

Панели инструментов служат для быстрого выполнения наиболее часто применяемых команд. Все действия, которые можно выполнить с помощью панелей инструментов, доступны и через верхнее меню. Кнопки в панелях сгруппированы по сходному действию команд:

Standard (Стандартная) – служит для выполнения большинства операций, таких как действия с файлами, редакторская правка, вставка объектов и доступ к справочным системам;

Formatting (Форматирование) – для форматирования (изменения типа и размера шрифта, выравнивания и т. п.) текста и формул;

Math (Математика) – для вставки математических символов и операторов в документы.

Панель Math (Математика) предназначена для вызова на экран еще девяти панелей, с помощью которых и происходит вставка математических операций в документы.

Назначение математических панелей:

Calculator (Калькулятор) – служит для вставки основных математических операций;

Graph (График) – для вставки графиков;

Matrix (Матрица) – для вставки матриц и матричных операторов;

Evaluation (Выражения) – для вставки операторов управления вычислениями;

Calculus (Вычисления) – для вставки операторов интегрирования, дифференцирования, суммирования;

Boolean (Булевы операторы) – для вставки логических (булевых) операторов;

Programming (Программирование) – для программирования средствами MathCAD;

Greek (Греческие символы) – для вставки греческих символов;

Symbolic (Символика) – для вставки символьных операторов.

1.4. Рабочая область

В рабочую область пользователь вводит математические выражения, текстовые поля и элементы программирования. С помощью курсора отмечается незаполненное место в документе, куда в текущий момент можно вводить формулы или текст. Документ MathCAD строится по принципу размещения формул и текста в рабочей области, которая изначально является подобием чистого листа. Чтобы показать или скрыть расположение регионов с математическими выражениями, текстом или графиками, имеется возможность включить опцию показа границ регионов. Делается это с помощью главного меню View / Regions (Вид / Регионы). В некотором месте будет наблюдаться и прерывистая горизонтальная линия раздела страниц. Эти линии показывают, каким образом будет осуществлено разбиение на страницы при распечатке документа на принтере. Изменить параметры страницы можно с помощью команды File / Page Setup (Файл / Параметры страницы).

1.5. Строка состояния

Она появляется в нижней части окна MathCAD, под горизонтальной полосой прокрутки. В ней отображается самая основная информация о режиме редактирования, разграниченная разделителями (слева направо):

- контекстно-зависимая подсказка о готовящемся действии;
- режим вычислений: автоматический (AUTO) или задаваемый вручную;
- текущий режим раскладки клавиатуры CAP;
- текущий режим раскладки клавиатуры NUM;
- номер страницы, на которой находится курсор.

1.6. Справочная информация

Вместе с MathCAD поставляется несколько источников справочной информации, доступ к которым осуществляется через меню Help (Справка).

Справочные системы по вопросам использования MathCAD:

- MathCAD Help (Справка) – система справки, или технической поддержки.

Электронные книги – коллекции вычислений, снабженные гиперссылками и интерактивными примерами MathCAD-программ:

- Resource Center (Центр Ресурсов) – самостоятельное приложение, оформленное в виде электронной книги с решением множества математических примеров, демонстрирующих практическое применение возможностей MathCAD 2001.

2. Вычисления

2.1. Переменные и функции

Порядок вычислений в документе MathCAD: математические выражения и действия воспринимаются процессором слева направо и сверху вниз. Перечислим основные действия, которые пользователь может совершать для определения и вывода переменных и функций.

2.2. Присваивание переменным значений

Вычисления в MathCAD осуществляются с использованием переменных. Присваивание переменной значения следует осуществить следующим образом: набрать имя переменной (например, *X*); набрать двоеточие (:) (на экране дисплея появится ‘: = “); ввести значение переменной или выражение, определяющее переменную, и нажать на клавишу [ввод]. Для вывода значений переменных после их имени ставится знак равенства (=).

2.3. Функции

В системе MathCad имеется множество встроенных функций (алгебраические, тригонометрические, гиперболические функции, специальные математические и статистические функции, функции прямого и обратного преобразования Фурье и т. д.). Важной особенностью системы является возможность задания внешних функций, или функций пользователя.

Функции в MathCAD записываются в обычной для математика форме:

$f(x,...)$ – функция;

f – имя функции;

$x,...$ – список переменных.

Легче всего ввести написание функции в документ при помощи клавиатуры. В MathCAD формально можно разделить функции на два типа:

- встроенные функции;
- функции, определенные пользователем.

2.4. Определение функции пользователя

Для того чтобы определить функцию пользователя, например $g(x, y) = x^3e^{x+y}$, необходимо:

1) ввести в желаемом месте документа имя функции (g);

2) ввести левую скобку «(», имена переменных через запятую x, y и правую скобку «)»; при вводе левой скобки и запятых автоматически будут появляться соответствующие местозаполнители;

3) ввести оператор присваивания с панели инструментов или нажатием клавиши «:»;

4) ввести в появившийся местозаполнитель выражение, определяющее функцию, пользуясь клавиатурой или панелями инструментов.

Результат ввода иллюстрируется листингом.

Листинг 9

$$g(x,y) := x^3 e^{x+y}$$

2.5. Вывод значений переменных и функций

Чтобы вычислить в документе некоторое математическое выражение, которое может состоять из переменных, операторов и функций (встроенных и определенных пользователем):

- введите это выражение;
- нажмите клавишу «=».

В результате справа от введенного знака равенства появится вычисленное значение выражения.

2.6. Вычисление выражения

Листинг 10

$$d := 3.28$$

$$t := 0.012$$

$$r := d^{log(10,t)}$$

$$r = 0.539$$

2.7. Вывод значения функции

Листинг 11

$$g(x,y) := x^3 \cdot e^{x+y}$$

$$g(1.8,-0.9) = 14.344$$

3. Операторы

Каждый оператор в MathCAD обозначает некоторое математическое действие в виде символа. В полном согласии с терминологией, принятой в математике, ряд действий (например, сложение, деление, транспонирование матрицы и т. п.) реализован в MathCAD в виде встроенных операторов, а другие действия (например, *sin, erf* и т. п.) – в виде встроенных функций. Каждый оператор действует на одно или два числа (переменную или функцию), которые называют операндами. Если в момент вставки оператора одного или обоих операндов не хватает, то недостающие операнды будут отображены в виде местозаполнителей. Символ любого оператора в нужное место документа вводится одним из двух основных способов:

- нажатием соответствующей клавиши (или сочетания клавиш) на клавиатуре;

• нажатием указателем мыши соответствующей кнопки на одной из математических панелей инструментов.

Большинство математических панелей содержат сгруппированные по смыслу математические операторы, а вызвать эти панели на экран можно нажатием соответствующей кнопки на панели *Math*.

3.1. Арифметические операторы

Операторы, обозначающие основные арифметические действия, вводятся с панели *Calculator*:

• сложение и вычитание – умножение и деление;
• факториал – квадратный корень;
• корень *n*-й степени;
• возведение *x* в степень *y*;
• изменение приоритета;
• численный вывод: =.

Листинг 12

$$d := 3.28$$

$$2 + 2 = 4$$

$$-(-2.71) = 2.71$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$2 \cdot 4 \cdot 16 = 128$$

$$5! = 120$$

$$\left|-25\right| = 25$$

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

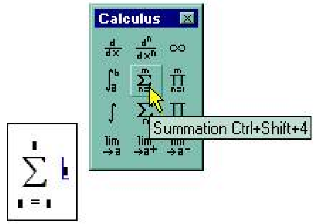
$$e^{cos(2)} = 0.66$$

$$d^{3.1} = 39.738$$

$$(21 + 4) \cdot 48 = 1.2 \times 10^3$$

3.2. Вычислительные операторы

Вычислительные операторы вставляются в документы при помощи панели инструментов *Calculus*. При нажатии любой из кнопок в документе появляется символ соответствующего математического действия, снабженный несколькими местозаполнителями. Количество и расположение местозаполнителей определяется типом оператора и в точности соответствует их общепринятой математической записи.



После ввода какого-либо вычислительного оператора имеется возможность вычислить его значение либо численно (нажатием клавиши «=»), либо символьно (с помощью оператора символьного вывода «→»).

Основные вычислительные операторы: дифференцирование и интегрирование; производная; N-я производная; определенный интеграл; неопределенный интеграл; суммирование и вычисление произведения; сумма; произведение; сумма ранжированной переменной; произведение ранжированной переменной пределы.

Листинг 13

$$\frac{d}{dx} cos(x) \rightarrow -sin(x)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} sin(x) \rightarrow -cos(x)$$

$$\int_{20} tan(x)\, dx \rightarrow -ln(cos(x))$$

$$\sum_{k=1}^{20} k^2 \rightarrow 2870$$

$$\prod_{j=1}^{25} j \rightarrow 15511210043330985984000000$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow exp(1)$$

$$exp(1) = 2.718$$

3.3. Логические операторы

Результатом действия логических, или булевых, операторов являются только числа 0 (если логическое выражение, записанное с их помощью, истинно) или 1 (если логическое выражение ложно). Логические операторы:

- больше (*Greater Than*) $x > y$;
- меньше (*Less Than*) $x < y$;
- больше или равно (*Greater Than or Equal*) $x \geq y$;
- меньше или равно (*Less Than or Equal*) $x \leq y$;
- равно (*Equal*) $x = y$;
- не равно (*Not Equal to*) $x \neq y$;
- и (*And*);
- или (*Or*);
- исключающее или (*Exclusive or*);
- отрицание (*Not*).

Примеры записи

Листинг 14

$1 = 2 =$

$2 \geq -10$

$\neg 0 = 1$

$1 \wedge 1 =$

3.3. Матричные операторы

Матричные операторы предназначены для совершения различных действий над векторами и матрицами. MathCAD оперирует двумя типами массивов. Первый – это одномерные массивы, или векторы, второй – это матрицы. Матрицы можно рассматривать как *n* одномерных массивов, каждый из которых имеет *m* элементов. Элементы векторов характеризуются порядковым номером или индексом. Вектор и элементы матрицы обычно нумеруют, начиная с нулевой строки и нулевого столбца. Чтобы изменить этот порядок, следует заменить значение встроенной переменной *ORIGIN*. Например, *ORIGIN:*=1. Оператор *ORIGIN* нужно печатать заглавными буквами, поскольку все имена переменных чувствительны к регистру. Элементы вектора имеют только один индекс. Например, если задан вектор V, его элементами будут V_0, V_1, V_2 и т. д., в общем виде V_i, где i – индекс. Матрицы имеют элементы с двумя индексами, один из которых указывает на номер строки, а другой – на номер столбца. Например, если задана матрица M, то ее элементами будут $M_{0,0}$, $M_{0,1}$, $M_{2,3}$ и т. д., в общем случае – $M_{i,j}$. Для задания вектора или матрицы следует установить курсор на место, где планируется задать вектор или матрицу. Выбрать Matrices (Матрицы) из меню Math или нажать *[Ctrl]+[M]*. В появившемся диалоговом окне указывается число строк и столбцов матрицы (для вектора число столбцов равно 1). Заметим, что система MathCAD выводит значения элементов векторов и матриц в виде таблиц. Предельное число столбцов при вводе матриц в шаблон на экране дисплея равно 100.

3.4. Программные операторы

В MathCAD имеется небольшое число операторов языка программирования, позволяющих решать довольно сложные задачи. Рассмотрим здесь несколько конструкций этого языка, используемых нами для решения задач численных методов.

А. Оператор условного перехода

if (*<cond >, <x>, <y>*).

Возвращает *x*, если логическое условие *cond* истинно, если иначе – *y*.

Параметры**:**

cond – логический оператор;

x – возвращенное значение, когда *cond* истинен;

y – возвращенное значение, когда *cond* – ложь.

Б. Конструкция для проведения циклических вычислений

В MathCAD задание переменных с пределами изменения фактически определяет возможность циклических вычислений. Для осуществления таких вычислений с целочисленной управляющей переменной цикла используется следующая конструкция:

<Имя переменной>: $N_{нач}$; $N_{кон}$.

На экране отобразится:

<Имя переменной>: $N_{нач}$ ... $N_{кон}$.

Переменные такого типа в системе Mathcad называются переменными с заданными пределами изменения. Шаг можно задавать любым, используя конструкцию задания таких переменных:

<Имя переменной>: $N_{нач}$, $N_{след}$, $N_{кон}$.

Описанные конструкции можно рассматривать как заголовки цикла. Все следующие за ними вычислительные блоки выполняются циклически и, следовательно, входящие в них переменные становятся элементами массивов.

V. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Таблица 1

Задачи к главе I

Номер варианта	$f(x)$	Номер варианта	$f(x)$
1	$\ln(x) = \frac{1}{x^2}$	16	$e^{-x} - \sqrt{x-1}$
2	$2\ln(x) - \frac{x}{2} + 1$	17	$2\sin(3x) - 1{,}5x$
3	$\frac{1-x}{x} - 3\cos(4x)$	18	$0{,}1e^{-x} - \frac{x}{2}$
4	$\mathrm{ctg}(x) - x^2$	19	$\ln(1{,}2x) - 1{,}5x + 2$
5	$\mathrm{tg}(\frac{x}{4}) - x - 2$	20	$tg(2{,}5x) - 5x$
6	$\sqrt{x} - 3\sin(x)$	21	$\ln(x) - 2\cos(x)$
7	$\sqrt{x} - \cos(\frac{x}{2})$	22	$\sqrt{2 - x^2} - e^x$
8	$2\ln(x) - \frac{1}{x}$	23	$e^{-(x+1)} + x^2 + 2x - 1$
9	$x - 3\cos^2(x)$	24	$e^{-x} - 2 + x^2$
10	$\mathrm{tg}(7{,}5x) - 2(x+1)$	25	$xe^{-x} - x - 1$
11	$\ln x - \frac{7}{(2x+6)}$	26	$(\cos(x))^2 - 0{,}5\cos(x) + 0{,}25$
12	$e^{-x} - (x-1)^2$	27	$\sin(x+2) - x^2 + 2x - 1$
13	$e^x + x^2 - 2$	28	$x - e^{-x^2}$
14	$e^x - 2(x-1)^2$	29	$x\ln x - x^2 + 3x - 1$
15	$e^x + 2x^2 - 3$	30	$e^{-x} - 5x^2 + 10x$

Таблица 2

Задачи к главе II

Номер варианта	Дифференциальные уравнение	Начальные условия	
1	2	3	4
1	$y''-y'x+x^2y=2x+1$	$y(1)=0$	$y(2)=2$
2	$y''-y'x+2y=4$	$y(0)=0$	$y(1)=2$
3	$y''-y'\ln 2+y=2^x$	$y(2)=4$	$y(3)=8$
4	$y''-y'x-y=x\cos(x)$	$y(0.5)=0.479$	$y(1.5)=0.997$
5	$y''-y'\frac{1}{x-2}+(x-1)y=1$	$y(2)=1$	$y(3)=0.5$
6	$y''-y'x+2y=10$	$y(1)=5$	$y(2)=20$
7	$y''-e^x y'-y=1$	$y(-1)=2.718$	$y(0)=1$
8	$y''-y'x+y=x^2$	$y(1)=1$	$y(2)=4$
9	$y''-2xy'+xy=x^2-1$	$y(0)=1$	$y(1)=3$
10	$y''+y'x-\frac{2y}{x}=3$	$y(2)=1.5$	$y(2.5)=2$
11	$y''-y'x-x^2y=\cos(x)$	$y(0)=-0.5$	$y(1)=0.5$
12	$y''+y'-\cos(x)y=\sin(x)$	$y(0)=1$	$y(1)=2$
13	$y''+\frac{1}{x+1}y'+\frac{2}{x}y=3$	$y(1)=3$	$y(2.5)=3.3$
14	$y''-\frac{x}{x+1}y'+4xy=\ln(x)$	$y(1)=0.2$	$y(2.5)=1$

Окончание табл. 2

1	2	3	4
15	$y''+2y'x+e^x y=3$	$y(1)=0$	$y(2)=0.5$
16	$y''-x^2y'+\frac{1}{x-1}y=\sin(x)$	$y(1)=1$	$y(2)=3$
17	$y''-\frac{y'}{x}+xy=x^2$	$y(2)=1$	$y(3)=2$
18	$y''+2xy'+x^2y=3.6x$	$y(0)=0$	$y(1)=2.5$
19	$y''+y'x-x^2y=2x+3$	$y(2)=3$	$y(3)=4$
20	$y''+2x^2y'-xy=4x+2$	$y(1)=0$	$y(2)=1$
21	$y''-y'x+x^2y=3x$	$y(1)=0$	$y(2)=2$
22	$y''+2xy'-x^2y=3x$	$y(3)=1$	$y(4)=2$
23	$y''+2xy'+xy=x^2+1$	$y(0)=1$	$y(1)=3$
24	$y''-\frac{y'}{x}+x^2y=4x$	$y(1)=0$	$y(2)=2$
25	$y''-4xy'+2y=x^2-x$	$y(1)=0$	$y(2)=1$
26	$y''-y'x+x^2y=3x$	$y(1)=0$	$y(2)=2$
27	$y''-\frac{y'}{x}+xy=x^2$	$y(2)=1$	$y(3)=2$

Рекомендуемая литература

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
2. *Вагер Б. Г.* Численные методы решения дифференциальных уравнений: учеб. пособие; СПбГАСУ. – СПб., 2003. – 114 с.
3. *Букунова О. В*. и др.; Численные методы решения задач строительного профиля в среде MathCAD: методические указания по выполнению контрольных заданий для студентов-заочников всех специальностей. СПбГАСУ. – СПб., 1999. – 32 с.

Учебное издание

Анатолий Михайлович Кокорин

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОФИЛЯ В СРЕДЕ MATHCAD

Редактор О. Д. Камнева
Корректор К. И. Бойкова
Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 04.10.2007. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,62. Тираж 500 экз. Заказ 157. «С» 70.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, д. 4.
Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, д. 5.

ДЛЯ ЗАПИСЕЙ