

Министерство образования и науки  
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет

**А. В. ЛЕБЕДЕВ**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА  
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
2012

*Рецензенты:*

канд. техн. наук, доцент Е. Л. Лаппо (СПбГАСУ);  
канд. техн. наук, доцент Ю. В. Бондарев (ООО ТЕКТОН)

**Лебедев, А. В.**

Численные методы расчета строительных конструкций: учеб. пособие / А. В. Лебедев; СПбГАСУ. – СПб., 2012. – 55 с.

ISBN 978-5-9227-0338-3

Представлены основные математические методы приближенного решения дифференциальных уравнений. На простых примерах демонстрируется использование этих методов.

Особое внимание уделено методу конечных элементов. Показано использование метода для решения дифференциальных уравнений и применение его к расчету строительных конструкций.

Приводится ряд примеров решения простых задач, предлагаемых студентам для самостоятельной работы.

Ил. 15. Библиогр.: 5 назв.

*Рекомендовано редакционно-издательским советом СПбГАСУ в качестве учебного пособия.*

**Введение**

В предлагаемом пособии кратко изложены основные численные методы решения задач строительной механики. Главное внимание уделяется методу конечных элементов в традиционном изложении. Численные методы построения аппроксимирующих решений дифференциальных уравнений иллюстрируются простыми примерами. Проводится сравнение полученных результатов с точными решениями. Отслеживается преемственность различных подходов и переход от формального математического изложения к смысловому физическому содержанию используемых математических объектов. При этом математические аспекты применимости излагаемых методов не затрагиваются в рамках настоящего пособия. Интересующиеся этими вопросами могут без труда отыскать ответы на них в соответствующей литературе [1, 4]. Приведены примеры решения простых задач, предлагаемых студентам в виде домашних заданий.

## Глава 1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 1.1. Общие положения

Напряженно-деформированное состояние конструкций или их отдельных элементов описывается дифференциальными уравнениями. Вид этих уравнений для каждого конкретного случая зависит от физических и геометрических гипотез, принимаемых при моделировании поведения системы.

Напряженно-деформированное состояние балки достаточно точно описывается уравнением

$$EJ \cdot Z''(x) = -M(x) \quad (1.1)$$

или

$$EJ \cdot Z^{IV}(x) = q. \quad (1.1')$$

Для расчета тонких изгибаемых плит используется уравнение

$$\frac{\partial^4 z(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z(x, y)}{\partial y^4} = -\frac{q}{D}. \quad (1.2)$$

Вид дифференциального уравнения для описания напряженно-деформированного состояния однотипных конструкций также может быть различным. Если для простой балки достаточно уравнения (1), то для балки на упругом основании необходимо воспользоваться более сложным уравнением

$$EJZ^{IV}(x) + k \cdot Z(x) = q. \quad (1.3)$$

Решение дифференциальных уравнений напряженно-деформированного состояния в виде функции  $Z(x)$  можно получить лишь для

весьма ограниченного числа задач. В подавляющем большинстве случаев для решения подобных дифференциальных уравнений используются различные численные методы, результатом применения которых является не сама функция, представляющая собой решение уравнения, а ее приближенные значения, вычисленные в предварительно намеченных точках, или некоторая аппроксимирующая функция в виде математического ряда.

### 1.2. Методы численного решения дифференциальных уравнений

Рассматриваются основные часто применяющиеся методы численного решения уравнений. На примерах простых дифференциальных уравнений типа (1.1) показано, как можно использовать некоторые из известных методов.

Более подробно излагается метод конечных элементов, являющийся основой большинства современных вычислительных программ расчета конструкций.

#### 1.2.1. Метод конечных разностей

Этот метод основан на конечно-разностном представлении производных. Если на отрезке оси  $0 \leq x \leq L$  построить некоторое количество точек  $x_i, i = 1, 2, \dots, m$ , таких, чтобы  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ , то значение первой производной функции  $Z(x)$  можно вычислить по формулам вида

$$\frac{dZ(x)}{dx} \approx (Z_i - Z_{i-1}) / \Delta x, \quad (1.4)$$

$$\frac{dZ(x)}{dx} \approx (Z_{i+1} - Z_i) / \Delta x, \quad (1.5)$$

$$\frac{dZ(x)}{dx} \approx (Z_{i+1} - Z_{i-1}) / 2 \cdot \Delta x. \quad (1.6)$$

Формулы (1.4)–(1.6) используются для аппроксимации производных разностями назад, вперед и центральной соответственно. Для представления второй производной можно использовать формулу

$$\frac{d^2 Z(x)}{dx^2} \approx (Z_{i+1} - 2 \cdot Z_i + Z_{i-1}) / (2 \cdot \Delta x)^2. \quad (1.7)$$

Для аппроксимации производных 4-го порядка воспользуемся формулой (1.7), применив ее дважды следующим образом:

$$\frac{d^4 Z(x)}{dx^4} = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 Z(x)}{dx^2} \right) = \left( \frac{d^2 Z(x)}{dx^2} \Big|_{i+1} - 2 \cdot \frac{d^2 Z(x)}{dx^2} \Big|_i + \frac{d^2 Z(x)}{dx^2} \Big|_{i-1} \right) / (\Delta x)^2.$$

Подставив сюда выражение (1.7), получим

$$\frac{d^4 Z(x)}{dx^4} \approx (Z_{i+2} - 4 \cdot Z_{i+1} + 6 \cdot Z_i - 4 \cdot Z_{i-1} + Z_{i-2}) / (\Delta x)^4. \quad (1.8)$$

Решение дифференциального уравнения методом конечных разностей рассмотрим на примере.

**Пример 1.** Для балки длиной  $L$ , шарнирно опертой по концам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x). \quad (1.9)$$

Найдем решение методом конечных разностей. Необходимо учесть краевые условия в точках закрепления концов балки  $M(0) = 0$ ;  $M(L) = 0$ .

Пусть  $\Delta x = L/4$ , тогда по длине балки отметим 5 точек сетки  $x = (0, L/4, L/2, 3L/4, L)$ . Так как  $M(0) = M(L) = 0$ , будем определять значения моментов  $M_1, M_2, M_3$  в точках  $x = (L/4, L/2, 3L/4)$  соответственно. Запишем выражения (1.7) для точек 1, 2, 3:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} \Big|_m = (M_{m+1} - 2 \cdot M_m + M_{m-1}) / (\Delta x)^2.$$

Подставляя в (1.9) и принимая  $q(x) = q$  и  $L = 1$ , получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} m = 1 \quad M_2 - 2M_1 + M_0 - q(0,25L)^2 &= 0, \\ m = 2 \quad M_3 - 2M_2 + M_1 - q(0,5L)^2 &= 0, \\ m = 3 \quad M_4 - 2M_3 + M_2 - q(0,75L)^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$M_1 = 0,094q; \quad M_2 = 0,125q; \quad M_3 = 0,094q.$$

Точное решение:

$$M_1 = M_3 = 0,09375q; \quad M_2 = 0,125q.$$

### 1.2.2. Методы взвешенных невязок

Моделирование поведения системы дифференциальными уравнениями предполагает отыскание решения в виде функции  $Z(x)$ , удовлетворяющей граничным условиям. Если построить некоторую функцию  $\psi(x)$ , принимающую на границе области те же значения, что и функция  $Z(x)$ , то можно считать, что функция  $\psi(x)$  и будет искомым решением. Аппроксимацию функции  $Z(x)$  можно отыскивать в виде

$$Z(x) \approx \hat{Z} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m \cdot N_m, \quad (1.10)$$

где  $a_m$  – неопределенные параметры;

$N_m$  – базисные функции, обладающие свойством  $N_{m\Gamma} = 0$  ( $\Gamma$  – граница исследуемой области; для одномерной задачи это граничные точки, для двумерной – линия);

$\hat{Z}$  – аппроксимация функции  $Z$ .

Введем погрешность, или невязку, аппроксимации,

$$R_\omega = Z - \hat{Z}. \quad (1.11)$$

Для уменьшения невязки (1.11) используется условие

$$\int_{\omega} W_l (Z - \hat{Z}) d\omega \equiv \int_{\omega} W_l R_\omega d\omega = 0, \quad (1.12)$$

где  $W_l$  – весовые функции;

$\omega$  – область определения функций.

Запишем дифференциальное уравнение в общем виде [1]:

$$A(Z) = \Lambda \cdot Z + p = 0, \quad (1.13)$$

где  $\Lambda$  – линейный дифференциальный оператор.

Решение уравнения (1.13) должно удовлетворять краевым условиям

$$B(Z) = M \cdot Z + r = 0, \quad (1.14)$$

где  $B$  – соответствующий линейный дифференциальный оператор.

Используем для аппроксимации решения уравнения (1.13) функции (1.10). Подставляя (1.10) в (1.13), получим невязку:

$$R \equiv A(\hat{Z}) = \Lambda \hat{Z} + p \equiv \Lambda \psi + (\sum a_m \cdot \Lambda N_m) + p. \quad (1.15)$$

В соответствии с методом взвешенных невязок выберем весовые функции ( $W_l, l = 1, 2, \dots$ ) и выполним условие (1.12)

$$\int_{\omega} W_l \cdot R \cdot d\omega \equiv \int_{\omega} W_l \{ \Lambda \psi + (\sum_{m=1}^M a_m \cdot \Lambda N_m) + p \} d\omega = 0. \quad (1.16)$$

Выражение (1.16) при  $l = 1, 2, \dots, M$  приводит к системе линейных уравнений вида

$$K \cdot a = f, \quad (1.17)$$

где

$$K_{l,m} = \int_{\omega} W_l \cdot \Lambda \cdot N_m d\omega; \quad (1.18)$$

$$f_l = - \int_{\omega} W_l \cdot p d\omega - \int_{\omega} W_l \cdot \Lambda \psi d\omega;$$

$\omega$  – область решений уравнения (1.13).

Если весовые функции в (1.16) выбираются в виде  $W_l = \delta(x - x_l)$ ,

где  $\delta(x - x_l) = \infty$  при  $x = x_l$  и  $\delta(x - x_l) = 0$  при  $\infty \leq x \leq \infty$  – дельта-

функция Дирака, то метод носит название метода поточечных коллокаций.

Б. Г. Галёркиным было предложено в качестве весовых функций  $W_l$  выбирать сами базисные функции  $N_l$ . Такой метод носит название метода Бубнова – Галёркина.

**Пример 2.** Рассмотрим решение задачи из примера 1 методом Бубнова – Галёркина. Дифференциальный оператор в (1.13) имеет вид

$$\Lambda = \left( \frac{d^2}{dx^2} \right). \text{ Краевые условия:}$$

$$M(0) = M(L) = 0.$$

Выберем в качестве базисных функции вида

$$N_m = x^m (L - x), \quad (1.19)$$

удовлетворяющие краевым условиям. Тогда можно построить аппроксимирующую функцию

$$Z \approx \hat{Z} = \sum_{m=1}^M a_m \cdot N_m,$$

и, подставляя (1.19) в (1.18), получим

$$K_{l,m} = \int_0^L x^l (L - x) \cdot [m(m-1)L \cdot x^{m-2} - m(m+1)x^{m-1}] dx, \quad (1.20)$$

$$f_l = - \int_0^L x^l (L - x) q \cdot dx,$$

где  $L$  – длина балки;  $q$  – распределенная нагрузка.

Ограничиваясь значениями  $l, m = 1, 2$ , получим

$$K_{11} = L^3 / 3; \quad K_{12} = K_{21} = -L^4 / 6; \quad K_{22} = -22 \cdot L^5 / 15;$$

$$f_1 = -q \cdot L^3 / 6; \quad f_2 = -q \cdot L^4 / 12.$$

Решение полученной системы уравнений при  $q = 1$  и  $L = 1$  следующее:  $a_1 = 0,5; a_2 = 0$ .

Искомая функция

$$\varphi = M(x) = a_1 \cdot x(L - x) + a_2 \cdot x^2 (L - x) = L \cdot x / 2 - x^2 / 2$$

представляет собой функцию распределения изгибающего момента по длине балки. Если найти момент в точке  $x = L/2$ , получим  $M(0,5) = 0,125$ , что при принятых значениях  $q$  и  $L$  соответствует точному значению  $M(0,5) = qL^2/8$ .

**Пример 3.** Для балки с двумя защемленными концами дифференциальное уравнение имеет вид (1.1'). В качестве решения будем искать функцию прогибов балки. Краевые условия:  $Z(0) = Z(L) = 0$ ;  $Z'(0) = Z'(L) = 0$ .

Для учета подобных краевых условий в методе Бубнова – Галёркина применяется общий подход, позволяющий одновременно аппроксимировать решение дифференциального уравнения и краевые условия. При этом аппроксимирующая функция

$$Z \approx \hat{Z} = \sum_{m=1}^M a_m \cdot N_m$$

может не удовлетворять краевым условиям. Тогда к невязке (1.15) по области определения функции решения добавляется невязка в краевых условиях

$$R_\Gamma = B(\hat{Z}) = M \hat{Z} + r$$

и условие (1.16) принимает вид

$$\int_{\omega} W_l \cdot R_{\omega} \cdot d\omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l \cdot R_{\Gamma} \cdot d\Gamma = 0. \quad (1.21)$$

В этом случае коэффициенты системы уравнений (1.17) будут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{\omega} W_l \cdot \Lambda N_m d\omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l M N_m d\Gamma, \\ f_l &= -\int_{\omega} W_l \cdot p d\omega - \int_{\Gamma} \bar{W}_l \cdot r d\Gamma, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где  $\Gamma$  – область определения граничных условий.

Для рассматриваемого примера дифференциальные операторы

$$\Lambda = d^4/dx^4, \quad M = d/dx, \quad p = q, \quad r = 0.$$

Выбирая в качестве базисных функции

$$N_m = x^{2m}(L-x)^2; \quad W_l = \bar{W}_l = x^{2l}(L-x)^2,$$

получим для  $l, m = 1, 2$  следующие значения коэффициентов и свободных членов системы (1.17):

$$K_{11} = 0,8 \cdot L^5; \quad K_{12} = (8/35)L^7 + (1/1260)L^{10};$$

$$K_{21} = (8/35)L^7 - (1/1260)L^{10}; \quad K_{22} = (8/35)L^9;$$

$$f_1 = q(0,2 - 0,5L + 0,333L^2); \quad f_2 = q(0,25 - 0,333L + 0,2L^2).$$

Принимая, как и прежде,  $q = 1$ ,  $L = 1$ , найдем  $a_1 = 0,042$ ,  $a_2 = 0,000202$ .

Соответственно функция решения

$$Z(x) = 0,042 \cdot x^2(L-x)^2 + 0,000202 \cdot x^4(L-x)^2$$

при  $x = L/2$   $Z(0,5) = 0,002625$ , что практически соответствует при  $q = L = EJ = 1$  точному значению  $Z(0,5L) = (1/384)qL^4/(EJ) = 0,002604$ .

### 1.2.3. Вариационные методы

Еще одной большой группой приближенных методов анализа напряженно-деформированного состояния конструкций являются вариационные методы.

В отличие от рассмотренных выше методов, при использовании вариационных методов формируется некий вариационный принцип. Например, при анализе напряженно-деформированного состояния механических систем функция, соответствующая истинному напряженному состоянию конструкции, придает минимум функционалу потенциальной энергии системы  $\Pi$ . Записывая условие стационарности функционала потенциальной энергии в виде  $\delta\Pi = 0$ , можно получить систему разрешающих уравнений, аналогичных уравнениям (1.15).

Для упругих систем потенциальную энергию деформации можно определить как сумму работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях. Например, для балки, нагруженной распределенной нагрузкой  $q(x)$ , выражение для работы внешних сил имеет вид

$$U = \int_0^L q(x) Z(x) dx.$$

Работа внутренних сил

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L (EJ \cdot Z(x))^2 dx.$$

Потенциальная энергия системы  $\Pi = U - W$ . Если задаться теперь функцией прогибов балки в виде

$$Z(x) = \sum_{m=1}^M a_m \cdot N_m,$$

то условие стационарности функционала потенциальной энергии примет вид

$$\frac{d\Pi}{da_m} = 0. \quad (1.23)$$

Условие (1.23) приводит к системе линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_m$ . Этот метод был разработан швейцарским математиком В. Ритцем и носит его имя.

**Пример 4.** Рассмотрим решение задачи из примера 1 методом Ритца. Для шарнирно опертой по концам балки примем в качестве базисных функции

$$N_m = a_m \cdot \sin(m\pi x / L).$$

Тогда функционал потенциальной энергии системы

$$\Pi = \int_0^L q \left\{ \sum_{m=1}^M a_m \sin(m\pi x / L) \right\} dx - \frac{1}{2} \int_0^L EJ \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \sum_{m=1}^M a_m \sin(m\pi x / L) \right\}^2 dx. \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в (1.23) при  $M = 3$ , получим систему линейных уравнений, решив которую, найдем значения

$$a_1 = 0,013071(qL^4/EJ); \quad a_2 = 0; \quad a_3 = 0,000054(qL^4/EJ)$$

и функцию прогибов балки в виде

$$Z(x) = 0,013071(qL^4/EJ) \sin(\pi x / L) + 0,0000538(qL^4/EJ) \sin(3\pi x / L).$$

Для  $x = 0,5$   $Z(0,5) = 0,013071$  при  $q = L = EJ = 1$ . Точное решение для принятых значений  $q, L, EJ$   $Z(0,5) = 5/384 = 0,01302$ .

Точность получаемых результатов во всех рассмотренных выше примерах существенно зависит от выбора базисных функций. Если в последнем примере выбрать, например, функцию

$$N_m = a_m x^m (x - L),$$

то

$$Z(x) = 0,0417(qL^2/EJ)x(x - L)$$

и  $Z(0,5) = 0,0104$ . Погрешность составит 20 %.

#### 1.2.4. Метод конечных элементов для решения дифференциальных уравнений

Рассмотренные выше методы решения дифференциальных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние различных систем, как уже было отмечено, удобно применять для анализа континуальных систем с непрерывно изменяющейся нагрузкой и краевыми условиями. Это связано с тем, что решение задачи ищется в виде одной функции, описывающей поведение конструкции в целом.

В большинстве встречающихся на практике случаев исследуемые системы состоят из некоторого числа различных конструктивных элементов или рассчитываются на нагрузку в виде сосредоточенных сил либо распределенную нагрузку, приложенную в ограниченных областях. Моделирование таких систем при помощи одной функции представляется весьма затруднительным, так как приходится применять специальные разрывные функции или строить системы дифференциальных уравнений, описывающих различные части конструкции. Решение таких дифференциальных уравнений существенно усложняет процесс анализа и не всегда приводит к удовлетворительному результату.

Естественным развитием рассмотренных выше численных методов стал метод конечных элементов. С математической точки зрения метод конечных элементов (МКЭ) представляет собой один из численных методов решения дифференциальных уравнений. Более

того, приведенные выше методы можно считать частным случаем метода конечных элементов при числе элементов, равном 1.

Основное отличие МКЭ от рассмотренных методов состоит в том, что в этих методах решение уравнения отыскивается в виде функции, аппроксимирующей решение уравнения в целом, в то время как в МКЭ решение строится в виде набора однотипных функций, описывающих области конечных размеров. При этом каждая такая область или конечный элемент обладает теми же свойствами, что и вся система в целом. Все конечные элементы соединяются между собой в узлах.

Формальное математическое представление аппроксимирующих функций в методе конечных элементов имеет вид

$$\int_{\omega} W_l R_{\omega} d\omega = \sum_{e=1}^E \int_{\omega_e} W_l R_{\omega} d\omega, \quad (1.25)$$

$$\int_{\Gamma} \bar{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \bar{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma, \quad (1.25')$$

при этом  $\sum_{e=1}^E \omega_e = \omega$ ;  $\sum_{e=1}^E \Gamma_e = \Gamma$ ,

где  $E$  – число подобластей или элементов, на которые разделяются области определения решения  $\omega$  и граничных условий  $\Gamma$ .

Если подобласти, на которые разделена система, имеют простую форму и свойства, определяемые базисными функциями, то процесс получения решения сводится к представлению сложной области набором простых элементов с известными свойствами, соединяющихся между собой в узлах. В этом и заключается основная идея метода конечных элементов.

**Пример 5.** Рассмотрим балку, шарнирно опертую и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q$ .

На длине балки  $0 \leq x \leq L$  выберем  $M + 1$  узлов (рис. 1.1). Узлу с номером  $m$  сопоставим функцию  $N_m$  и построим аппроксимацию

$$Z \approx \hat{Z} = \sum_{m=1}^{M+1} Z_m N_m,$$

где  $Z_m$  – значение аппроксимации в узле  $m$ .

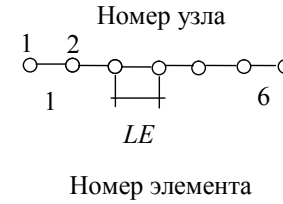


Рис. 1.1. Нумерация узлов и конечных элементов для примера 5

Выберем базисные функции для конечного элемента

$$N_1 = x/LE; \quad W_1 = N_1; \quad N_2 = (LE - x)/LE; \quad W_2 = N_2, \quad (1.26)$$

где  $LE = (x_{i+1} - x_i)$  – расстояние между узлами, или длина конечного элемента.

Дифференциальный оператор  $\Lambda$  в (1.15) имеет вид  $d/dx^2$ , и уравнение (1.21) принимает вид

$$\int_0^L W_l (d^2 \hat{Z} / dx^2) dx = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M + 1.$$

Интегрирование по частям позволяет получить более простое выражение вида

$$-\int_0^L \left( \frac{dW_l}{dx} \frac{d\hat{Z}}{dx} \right) dx = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M + 1.$$

Система линейных уравнений метода Галёркина имеет вид

$$K \cdot Z = f, \quad (1.27)$$

где коэффициенты и свободные члены определяются по формулам

$$K_{lm} = \int_0^L [(dN_l/dx) \cdot (dW_m/dx) + N_l W_m] dx, \quad (1.28)$$

$$f_l = \int_0^L q N_l dx, \quad l \leq l, \quad m \leq M + 1.$$



Выполняя вычисления по формулам (1.28), для первого конечного элемента длиной  $LE$  получим

$$K_{11} = (3 + LE^2)/(3LE); \quad K_{12} = (-6 + LE^2)/(6LE); \quad K_{21} = K_{12}; \quad K_{22} = K_{11};$$

$$f_1 = q/(72LE); \quad f_2 = q(12LE - 1)/(72LE).$$

Получение разрешающей системы уравнений для всей конструкции осуществляется при помощи процедуры объединения конечных элементов. Для этого матрицы коэффициентов  $K$  конечных элементов суммируются в узлах с одинаковыми номерами и записываются в общую матрицу, размерность которой равна  $(M + 1) \cdot (M + 1)$ . Так, для  $M = 6$  матрица коэффициентов системы уравнений (1.27) имеет вид

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & k_{12}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 + k_{11}^5 & k_{12}^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^5 & k_{22}^5 + k_{11}^6 & k_{12}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^6 & k_{22}^6 \end{bmatrix}.$$

$$k_{11}^i = 6,056; \quad k_{12}^i = -5,972; \quad f_1 = 0,083; \quad f_2 = 0,083$$

при  $LE = 0,167; \quad q = 1; \quad i = 1, 2, \dots, 6.$

Свободные члены и неизвестные системы уравнений:

$$f = [f_1 \quad f_1 + f_2 \quad f_1 + f_2 \quad f_1 + f_2 \quad f_1 + f_2 \quad f_1 + f_2 \quad f_2]^T,$$

$$\varphi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4 \quad \varphi_5 \quad \varphi_6 \quad \varphi_7]^T.$$

Для учета граничных условий  $\varphi_1 = 0, \quad \varphi_7 = 0$  достаточно вычеркнуть из матрицы  $K$  соответствующие строки и столбцы. Решение полученной системы уравнений следующее:

$$\varphi = [-0,064 \quad -0,101 \quad -0,113 \quad -0,101 \quad -0,064].$$

Значения в строке  $\varphi$  являются величинами изгибающих моментов в узлах (рис. 1.1) для  $q = LE = 1$ . Точное значение изгибающего момента в середине пролета для балки равно 0,125. Расхождение составляет 9,6 %. Такое большое расхождение объясняется тем, что аппроксимация функциями (1.26) представляет балку в виде набора прямых стержневых элементов, соединенных в узлах шарнирами, то есть без учета изгибных деформаций. В действительности в узлах необходимо учитывать не только линейные перемещения, но и углы поворота.

### 1.2.5. Основные выводы

Все рассмотренные методы сводят решение дифференциальных уравнений к решению системы линейных уравнений относительно некоторых параметров  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Решение дифференциального уравнения отыскивается в виде одной функции, описывающей поведение конструкции целиком. Эта функция в результате решения задачи получается в виде набора дискретных значений в некоторых точках или узлах, как в методе конечных разностей, или в виде системы аппроксимирующих функций, как в методах Галёркина или вариационном. Различие в приведенных выше методах заключается в способе построения разрешающей системы линейных уравнений. В методе конечных разностей эта система получается «автоматически» из разностного представления производных, в то время как в методах взвешенных невязок и вариационном – в результате удовлетворения соответствующих условий. Общие черты рассмотренных методов:

- искомое решение дифференциального уравнения отыскивается для всей области определения функции (в рассмотренных примерах – целиком для всей балки);
- точность получаемого решения зависит от выбора системы базисных функций;
- выбор базисных функций предполагает неформальный анализ рассматриваемой системы, что затрудняет построение простых вычислительных алгоритмов;
- аппроксимация решения дифференциального уравнения в виде функции, описывающей поведение системы в целом, затрудняет учет сосредоточенных факторов, таких как сосредоточенные силы или опирание в дискретных точках и т. п.

В методе конечных элементов решение ищется в виде набора функций, представляющих не всю область решения уравнения, а лишь отдельные участки. Все участки имеют одинаковые параметры, и функции, описывающие их, также одинаковы. Окончательное решение получается путем соединения отдельных элементов в узлах. При этом функция решения получается в виде набора числовых значений в узловых точках.

## Глава 2. РАСЧЕТ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

### 2.1. Метод конечных элементов (МКЭ) в расчетах строительных конструкций

В отличие от формальной математической процедуры решения дифференциального уравнения, рассмотренной выше, применение МКЭ в расчетах строительных конструкций удобно изучать с позиций физического смысла задачи. Такой подход не заменяет общие математические рассуждения, позволяя вместе с тем оценить метод с инженерной точки зрения.

Для большинства стержневых конструкций конечно-элементное представление системы является совершенно естественным, так как такие системы уже состоят из отдельных одинаковых элементов, соединенных между собой в узлах.

Тип и характеристики конечных элементов, образующих систему, определяются параметрами самой конструкции. Так, ферма (рис. 2.1, *a*), конструктивно состоящая из отдельных одинаковых по способу закрепления и загрузки стержней, однозначно может быть представлена набором элементов *a*.

Для изгибаемых стержневых систем конечными элементами также являются стержни, но, в отличие от ферм, для таких систем необходимо, чтобы концевые сечения элементов могли быть не только шарнирными, но и защемленными. При этом для расчета балок (см. рис. 2.1, *б*) достаточно учесть лишь угловые и вертикальные перемещения концов стержней *b*, в то время как для рамных систем (см. рис. 2.1, *в*) необходимо учитывать и продольные деформации *c*.

Для расчета плит (см. рис. 2.1, *з*) конечные элементы обычно выбирают в виде прямоугольных пластин *d*. Для массивных трехмерных конструкций (см. рис. 2.1, *д*) используются трехмерные объемные конечные элементы *e*.

Несмотря на то что для континуальных систем можно с успехом применять приближенные методы, рассмотренные выше, МКЭ успешно конкурирует с ними, так как позволяет легко учитывать любые сложные краевые условия и сосредоточенные нагрузки.

## 2.2. Метод перемещений как основа МКЭ

Основой для понимания идеологии расчета строительных конструкций методом конечных элементов может служить классический метод перемещений. Как известно, основная система метода перемещений состоит из отдельных стержней, соединенных между собой в узлах. При этом имеются заранее составленные таблицы, при помощи которых можно определить усилия в этих отдельных стержнях от всех возможных воздействий, которые представляют собой угловые и линейные перемещения узлов и действующая на систему нагрузка.

Основным этапом решения задачи методом перемещений является формирование и решение системы канонических уравнений, коэффициентами которых являются реакции в связях, соединяющих стержни системы между собой, от единичных перемещений, заданных по направлению этих связей. В результате формируется система канонических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений.

В методе конечных элементов роль основной системы играет так называемая конечно-элементная модель. Она отличается от основной системы метода перемещений тем, что точки деления системы на конечные элементы могут находиться не только в естественных узлах системы, но и в любых местах между узлами. При этом опорные узлы и узлы, в которых соединяются стержни системы, являются равноправными. То есть, в отличие от основной системы метода перемещений, во всех узлах конечно-элементной модели возможны все перемещения, присущие рассматриваемой расчетной схеме. Такой подход позволяет более гибко учитывать приложенные сосредоточенные нагрузки и краевые или граничные условия.

## 2.3. Основные параметры конечных элементов

Конечные элементы, из которых собирается расчетная схема любой конструкции, имеют общие характеристики. Так, для любого конечного элемента определяющим является число его степеней свободы, то есть общее число всех возможных перемещений во всех узлах конечного элемента. При этом для элемента одного типа можно учитывать как все, так и лишь некоторые из возможных перемещений

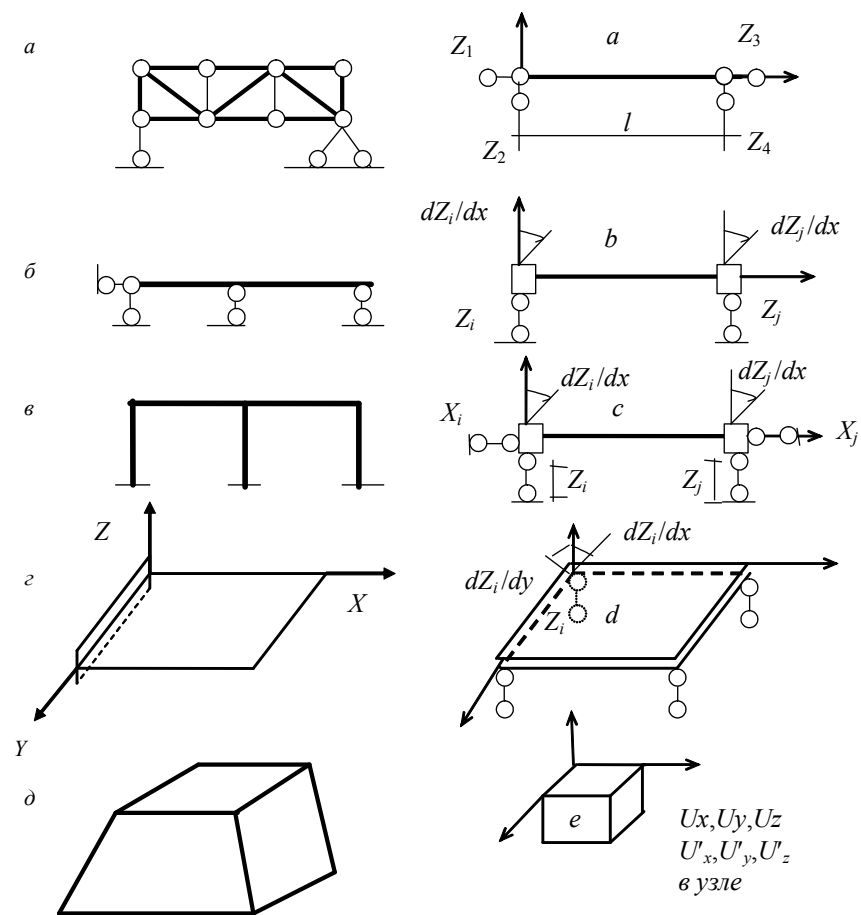


Рис. 2.1. Примеры расчетных схем и конечных элементов

в узле. Количество учитываемых узловых перемещений определяется контекстом решаемой задачи.

Выбор типов конечных элементов для моделирования конструкции определяется в первую очередь особенностями исходной системы. В каждом конкретном случае для моделирования системы выбираются соответствующие конечные элементы с числом и характером степеней свободы (узловых перемещений), определяющих основные особенности работы системы.

В зависимости от числа учитываемых в расчете степеней свободы в узле конечного элемента формируется *матрица жесткости конечного элемента*.

Матрица жесткости представляет собой универсальный математический объект, используемый в методе конечных элементов для описания упругих свойств как отдельных элементов, так и более крупных частей рассматриваемой системы, а также всей системы целиком. Матрица жесткости может быть составлена и для бесконечно малого элемента.

По определению *матрица жесткости* представляет собой *таблицу значений реакций в связях* узлов конечного элемента *от единичных перемещений, последовательно задаваемых по направлению этих связей*.

Фактически матрица коэффициентов при неизвестных канонических уравнений метода перемещений представляет собой матрицу жесткости конструкции.

Если обратиться к таблицам традиционного метода перемещений, легко заметить, что в них содержатся элементы матрицы жесткости стержневого конечного элемента  $b$ .

Порядок матрицы жесткости определяется числом учитываемых степеней свободы конечного элемента. Для конечного элемента  $a$  с двумя степенями свободы в каждом узле (это линейные перемещения по направлению каждой из осей системы координат) порядок матрицы жесткости  $(4 \times 4)$ .

Для конечного элемента  $b$ , также имеющего две степени свободы в узле (линейное вертикальное перемещение и угол поворота), порядок матрицы, как и в предыдущем случае,  $(4 \times 4)$ .

Для конечного элемента  $c$  с тремя степенями свободы в узле (двумя линейными перемещениями по направлению осей координат и углом поворота) порядок матрицы жесткости  $(6 \times 6)$ . Заметим, что элемент  $c$  объединяет элементы  $a$  и  $b$ . Тем не менее все рассматриваемые конечные элементы имеют право на самостоятельное существование.

Конечный элемент  $d$  используется для расчета тонких плит. В каждом узле такого конечного элемента учитываются три степени свободы. Порядок матрицы жесткости элемента  $(12 \times 2)$ .

Последний конечный элемент  $e$  может быть использован для расчета массивных конструкций. В каждом узле такого элемента учитывается шесть степеней свободы.

При разработке компьютерных программ, реализующих метод конечных элементов, в каждой программе создается библиотека элементов для всех типов конструкций, расчет которых предполагается выполнять, используя данную программу. При необходимости можно построить матрицу жесткости для любого конечного элемента с любыми заданными свойствами. Алгоритм метода конечных элементов не зависит от параметров используемых матриц жесткости. Это является важной особенностью МКЭ, позволяющей при помощи одной компьютерной программы определять напряженно-деформированное состояние самых различных конструкций заданной стандартной конфигурации, а также создавать расчетные схемы систем, содержащие элементы разных типов.

#### 2.4. Матрица жесткости шарнирно-стержневого конечного элемента

Следуя приведенному выше определению матрицы жесткости как таблицы реакций в узловых связях конечного элемента от последовательно задаваемых единичных перемещений, можно получить матрицу жесткости для некоторых простых конечных элементов, выполняя указанные действия непосредственно.

Рассмотрим шарнирно-стержневой конечный элемент (рис. 2.2) и последовательно зададим перемещения по направлению узловых связей. Для такого конечного элемента усилия, возникающие в стержне от задаваемых продольных перемещений, легко определяются непосредственно из закона Гука.

Если задать перемещение  $Z_1 = 1$ , то в стержне возникает усилие  $N = EF/l$ . Реакции в связях 1 и 3  $r_{11} = EF/l$  и  $r_{31} = EF/l$ , а реакции  $r_{21} = r_{41} = 0$ . Задавая последовательно единичные узловые перемещения и вырезая узлы, получим из уравнений проекций на оси  $OX$  и  $OY$  для каждого из четырех единичных перемещений 16 значений реакций в связях конечного элемента. Записывая значения реакций в виде таблицы, получим матрицу жесткости шарнирно-стержневого конечного элемента (2.1). Вторая и четвертая строки в матрице (2.1) полностью нулевые. Такие значения реакций соответствуют вертикальным перемещениям узлов.

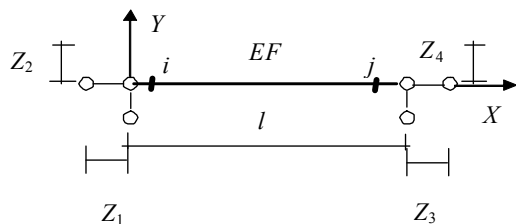


Рис. 2.2. Шарнирно-стержневой конечный элемент

$$r = (EF/l) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

При выводе матрицы жесткости (2.1) единичные перемещения задавались по направлениям осей системы координат, совпадающих с главными центральными осями инерции сечения конечного элемента. Такая система координат называется в МКЭ локальной. Матрицы жесткости конечных элементов строятся, как правило, в локальной системе координат.

При помощи матрицы (2.1) можно определить усилия в сечении конечного элемента, если известны перемещения его концов. Обычно расчетные сечения для определения усилий располагаются вблизи узлов конечного элемента (см. рис. 2.2, сечения  $i$  и  $j$ ). Для шарнирно-стержневого конечного элемента матрица значений усилий в расчетных сечениях имеет вид

$$N = \begin{bmatrix} N_i \\ Q_i \\ N_j \\ Q_j \end{bmatrix}, \quad N = r \cdot Z = r \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $Z$  – перемещения по направлению узловых связей конечного элемента;

$N_i, Q_i, N_j, Q_j$  – продольные и поперечные силы в сечениях  $i$  и  $j$  соответственно.

Каждому усилию, вычисляемому по формуле (2.2), соответствует задаваемое при выводе матрицы (2.1) перемещение. Очевидно, что для рассматриваемого конечного элемента значения поперечных сил всегда будут нулевыми, поскольку матрица (2.1) содержит две нулевые строки, однако необходимо сохранять эту избыточную информацию в матрице жесткости и усилий, так как в общем случае матрица шарнирно-стержневого конечного элемента не содержит полностью нулевых строк.

### 2.5. Локальная и глобальная системы координат

Построение матриц жесткости конечных элементов удобно осуществлять в локальной системе координат. Это позволяет не привязывать конечные элементы к реальным системам, а иметь библиотеку «инвариантных» конечных элементов. При построении расчетных схем для решения конкретных задач обычно все операции проводят в системе координат, единой для всей расчетной схемы, так называемой глобальной системе координат. Пример глобальной и локальной систем координат показан на рис. 2.3.

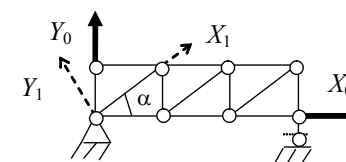


Рис. 2.3. Глобальная и локальная системы координат:

$X_1, Y_1$  – локальные координаты;  
 $X_0, Y_0$  – глобальные координаты

В процессе решения приходится вначале приводить матрицы жесткости всех конечных элементов к глобальной системе координат, а на завершающей стадии расчета, при определении усилий в элементах, выполнять обратное преобразование. Таким образом, перемещения в узлах расчетной схемы определяются в глобальной системе координат.

ординат, а усилия в конечных элементах – в локальных системах координат для каждого конечного элемента.

Переход от локальной системы координат к глобальной и обратно выполняется при помощи известных формул линейной алгебры. Так, перемещения концов стержней в глобальной системе координат через заданные перемещения в локальной системе координат определяются по формулам

$$\begin{aligned} Z_{1i0} &= Z_{1i1} \cdot \cos \alpha_{11} + Z_{2i1} \cdot \cos \alpha_{21}, \\ Z_{2i0} &= Z_{1i1} \cdot \cos \alpha_{12} + Z_{2i1} \cdot \cos \alpha_{22}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обратное преобразование выполняется по формулам

$$\begin{aligned} Z_{1i1} &= Z_{1i0} \cdot \cos \alpha_{11} + Z_{2i0} \cdot \cos \alpha_{21}, \\ Z_{2i1} &= Z_{1i0} \cdot \cos \alpha_{12} + Z_{2i0} \cdot \cos \alpha_{22}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $Z_{1i0}, Z_{2i0}$  – перемещения узла конечного элемента с номером  $i$  в глобальной системе координат;  $Z_{1i1}, Z_{2i1}$  – перемещения узла конечного элемента с номером  $i$  в локальной системе координат;  $\alpha_{ij}$  – углы, образованные осями локальной и глобальной систем координат.

Эти же зависимости в матричной форме имеют вид

$$Z_0 = A' \cdot Z_1, \quad (2.5)$$

$$Z_1 = A \cdot Z_0. \quad (2.6)$$

Матрицы  $A$  и  $A'$  содержат направляющие косинусы углов между осями локальной и глобальной систем координат. В случае, когда обе координатные системы прямоугольные, матрица  $A$  принимает вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

где  $\alpha$  – угол между осями  $X_0$  и  $X_1$ .

Косинус угла  $\alpha$  между осями глобальной и локальной систем координат можно вычислить по формуле

$$\cos \alpha = (X_j - X_i) / l, \quad (2.8)$$

где  $l$  – длина конечного элемента;

$X_i$  и  $X_j$  – координаты узлов элемента в глобальной системе координат.

Стандартная матрица преобразования координат шарнирно-стержневого конечного элемента с двумя узлами имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Для приведенного выше конечного элемента матрица преобразования координат

$$A = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.9')$$

Отличие в знаках элементов матриц (2.9) и (2.9') обусловлено выбором положительных направлений единичных перемещений, принимаемых при выводе матрицы жесткости (2.1). Перемещение вдоль оси стержня для левого узла задавалось по направлению отрицательных значений оси  $X$ . Выбор такого направления единичного перемещения в дальнейшем позволяет получить усилия в стержне с действительными знаками. Если задавать направления всех единичных перемещений совпадающими с положительными направлениями координатных осей, то знак усилия в первом сечении будет обратным. Подробные сведения о преобразованиях в различных системах координат можно найти в [5].

### 2.6. Матрица жесткости шарнирно-стержневого элемента в глобальной системе координат

Рассмотрим шарнирно-стержневой конечный элемент, произвольно ориентированный относительно глобальной системы координат (рис. 2.5).

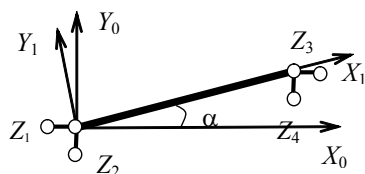


Рис. 2.5. Шарнирно-стержневой элемент в глобальной системе координат

Для вывода матрицы жесткости этого конечного элемента воспользуемся принципом возможных перемещений. По определению коэффициенты матрицы жесткости представляют собой реакции в связях от единичных перемещений. Задавая последовательно по направлению узловых связей единичные перемещения, составим уравнения возможных работ внешних и внутренних сил. Внешними силами в данном случае будут искомые реакции в связях, а внутренними – усилия в элементе, возникающие от задаваемых единичных перемещений, которые и выполняют здесь роль возможных.

Всего необходимо вычислить 16 значений величин реакций (по 4 реакции от каждого из 4 единичных перемещений). Эти реакции, записанные в виде таблицы, и образуют искомую матрицу жесткости

$$r_0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}.$$

Последовательно задаваемые единичные перемещения по направлению глобальных осей координат можно представить единичной матрицей

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Работу внешних сил определим по формуле

$$U = r_0 \cdot Z_0. \quad (2.11)$$

Работа внутренних сил представляет собой работу усилий в стержне  $N$  на деформациях  $V$ . Значения внутренних усилий и деформаций определяются для фиксированных сечений стержня и в матричной форме могут быть представлены в виде

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_m \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где  $m$  – число расчетных сечений конечного элемента.

Итак, работа внутренних сил

$$W = V' \cdot N. \quad (2.13)$$

Операция транспонирования матрицы  $V$  в (2.13) обусловлена правилами матричной алгебры.

Определим усилия. Усилия в конечном элементе вычисляются в локальной системе координат по формуле

$$N = r_1 \cdot Z_1,$$

но, согласно (2.5),

$$Z_1 = A \cdot Z_0$$

и соответственно

$$N = r_1 \cdot A \cdot Z_0, \quad (2.14)$$

или

$$N = r_1 \cdot A,$$

так как матрица  $Z_0$  представляет собой единичную матрицу.

Деформации также определяются в локальной системе координат

$$V = A \cdot Z_0 = A.$$

Подставляя в (2.13) выражения для  $V$  и  $N$ , получим для работы внутренних сил выражение

$$W = A' \cdot r_1 \cdot A.$$

Приравнивая выражения для работы внешних и внутренних сил, получим для вычисления матрицы жесткости в глобальной системе координат формулу

$$r_0 = A' \cdot r_1 \cdot A. \quad (2.15)$$

Формула (2.15) может быть использована для вычисления матрицы жесткости любого конечного элемента, если известна его матрица в локальной системе координат  $r_1$  и матрица преобразования  $A$ .

**Пример 6.** Рассмотрим решение задачи с использованием выведенной матрицы жесткости шарнирно-стержневого конечного элемента. На рис 2.6 показаны заданная система и соответствующая ей конечно-элементная модель. Последняя представляет собой конечные элементы, соединенные между собой в узле. Конечные элементы, узлы и связи конечно-элементной модели пронумерованы. При этом номера конечных элементов можно задавать произвольно, а номера узлов должны соответствовать номерам элементов. Узлы каждого конечного элемента должны быть пронумерованы подряд. Номера перемещений (или связей) в узлах также должны соответствовать номерам узлов конечных элементов, при этом первым в каждом узле нумеруется перемещение вдоль оси  $X_0$  и следом за ним перемещение вдоль оси  $Y_0$  (см. рис. 2.6).

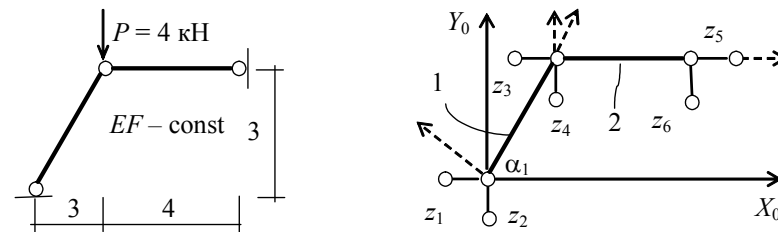


Рис. 2.6. Заданная система и конечно-элементная модель

Матрицы жесткости конечных элементов в локальной системе координат имеют вид

$$r_1 = (EF / l_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad r_2 = (EF / l_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Направляющие косинусы:

для элемента 1  $\cos(\alpha_1) = 0,6$ ;  $\sin(\alpha_1) = 0,8$ ;

для элемента 2  $\cos(\alpha_2) = 1$ ;  $\sin(\alpha_2) = 0$  (система координат для стержня 2 совпадает с глобальной системой координат, поэтому  $\alpha_2 = 0$ ).

Матрицы преобразования координат для элементов 1 и 2 имеют следующий вид:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,6 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости конечных элементов 1 и 2 в глобальной системе координат, вычисленные по формуле (2.15):



$$r_{10} = (EF / 5) \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix},$$

$$r_{20} = (EF / 4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (EF / 5) \begin{bmatrix} 1,25 & 0 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,25 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь для удобства дальнейших вычислений общие множители обеих матриц приведены к одному значению.

Номера строк и столбцов в матрице  $r_{10}$  – (1, 2, 3, 4), а в матрице  $r_{20}$  – (3, 4, 5, 6), что соответствует номерам узловых перемещений этих конечных элементов.

Для построения матрицы жесткости конечно-элементной модели объединим две полученные матрицы в одну таким образом, чтобы реакции в связях, относящихся к обоим конечным элементам (это связи 3 и 4), суммировались. Полная матрица жесткости конечно-элементной модели имеет вид

$$K = (EF / 5) \begin{bmatrix} 0,35 & 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & 0,64 & 0 & 0 \\ -0,36 & -0,48 & 1,61 & 0,48 & -1,25 & 0 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,25 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Процесс объединения матриц жесткости в МКЭ обычно называют ансамблированием. Фактически он представляет собой суммирование коэффициентов матриц с одинаковыми номерами и запись их в соответствующие ячейки матрицы жесткости всей системы.

Определим реакции в связях конечно-элементной модели от нагрузки. Для этого вырежем узел, в котором приложена сосредоточенная сила  $P = 4$  кН, и составим уравнения равновесия. Так как конечно-элементная модель фактически представляет собой основную систему метода перемещений, то усилия в стержнях от узловой нагрузки не возникают. Тогда реакции в связях

$$R_{1p}, \dots, R_{3p} = 0, \quad R_{4p} = 4, \quad R_{5p}, R_{6p} = 0.$$

Система канонических уравнений МКЭ (в форме метода перемещений) для конечно-элементной модели принимает вид

$$K \cdot Z + R = 0,$$

или в развернутой форме вид

$$\begin{bmatrix} 0,35 & 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & 0,64 & 0 & 0 \\ -0,36 & -0,48 & 1,61 & 0,48 & -1,25 & 0 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,25 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Как отмечалось выше, при построении конечно-элементной модели изначально предполагается, что по направлению всех узловых связей могут возникать перемещения. Это означает, что конечно-элементная модель не закреплена в каких-то конкретных точках. Для установления эквивалентности конечно-элементной модели заданной системе необходимо учесть граничные условия или условия опирания, то есть прикрепить конечно-элементную модель к неподвижным точкам либо к земле так же, как прикреплена заданная система. Учет граничных условий математически осуществляется приравнением нулю заведомо отсутствующих в заданной системе перемещений. Для этого достаточно вычеркнуть из системы уравнений (2.16) строки и столбцы, соответствующие этим нулевым перемещениям. В рассматриваемой системе граничные условия имеют вид

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 0; \quad z_5 = 0; \quad z_6 = 0 \quad (2.17)$$

и система уравнений с учетом граничных условий

$$\begin{bmatrix} 1,61 & 0,48 \\ 0,48 & 0,64 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ее решение

$$\begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 40,25 \end{bmatrix} (1/EF).$$

Для определения усилий в стержнях воспользуемся выражением (2.14). Составим векторы перемещений конечных элементов в глобальной системе координат:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 40,25 \end{bmatrix} (1/EF); \quad Z_2 = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 40,25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1/EF).$$

и вычислим усилия:

$$N_1 = r_1 \cdot A_1 \cdot Z_1 =$$

$$= \frac{EF}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 40,25 \end{bmatrix} \frac{1}{EF};$$

$$N_2 = r_2 \cdot A_2 \cdot Z_2 = \frac{EF}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -12 \\ 40,25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EF}.$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Векторы усилий в конечных элементах  $N_1$  и  $N_2$  содержат усилия в сечениях, расположенных на левом и правом концах конечного элемента. Первая строка представляет собой значение продольной силы, вторая строка – значение поперечной силы (соответствует второму перемещению при выводе матрицы жесткости конечного элемента). Третья и четвертая строки – те же усилия для сечения, расположенного на правом конце стержня.

## 2.7. Общая формула вычисления матриц жесткости

Выше было показано, как можно получить матрицу жесткости конечного элемента, задавая единичные перемещения в узлах и определяя соответствующие реакции в связях. Таким способом можно получить матрицы жесткости лишь для самых простых стержневых элементов, когда зависимость между усилиями и деформациями известна. Как правило, для большинства конечных элементов, используемых в расчетах сложных систем, зависимости между усилиями и деформациями не устанавливаются простыми формулами, и определить реакции в узловых связях из простых уравнений равновесия невозможно. В этом случае для вывода матрицы жесткости конечного элемента необходимо задать функцию, описывающую его напряженно-деформированное состояние.

Выведем формулу, позволяющую вычислить элементы матрицы жесткости. Воспользуемся принципом возможных перемещений.

Для определенности рассмотрим конечный элемент, показанный на рис. 2.7. Для этого конечного элемента в каждом узле будем учитывать две степени свободы: линейное перемещение, перпендикулярное оси стержня, и угол поворота. Тогда матрица жесткости будет иметь порядок  $(4 \times 4)$ .

Для описания деформированного состояния такого стержня используем дифференциальное уравнение изогнутой оси в виде

$$EJ \cdot Z''(x) = M(x), \quad (2.18)$$

где  $Z(x)$  – функция прогибов стержня.

Так как функция  $Z(x)$  заранее не известна, необходимо задать ее так, чтобы она удовлетворяла уравнению (2.18). Подробно вопросы выбора функций и их параметров для различных дифференциальных уравнений можно найти в [1]. В данном случае функция, аппроксимирующая функцию  $Z(x)$ , должна иметь не равные нулю производные до 4-го порядка включительно. Например, можно задать эту функцию в виде полинома третьей степени по  $x$  [2]

$$Z(x) = f_1 + f_2x + f_3x^2 + f_4x^3 \quad (2.19)$$

или в матричной форме

$$Z = W [f] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot [f]. \quad (2.20)$$

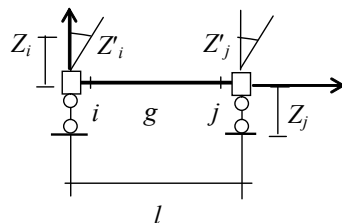


Рис. 2.7. Изгибаемый стержневой конечный элемент с двумя степенями свободы в узле

Для вывода матрицы жесткости зададим по направлению узловых связей конечного элемента линейные и угловые единичные перемещения. Линейные перемещения можно определить непосредственно по формуле (2.20). Для определения углов поворота продифференцируем (2.20) по  $x$ . Получим

$$Z' = W' [f] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \cdot [f]. \quad (2.21)$$

Подставляя в (2.20) и (2.21) координаты левого и правого узлов стержня, составим выражения для единичных перемещений и углов поворота. Все перемещения последовательно запишем в виде матрицы

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \cdot [f] = A [f],$$

откуда

$$[f] = A^{-1}.$$

В каждом столбце матрицы  $Z_0$  записаны перемещения, заданные по направлению узловых связей последовательно. Так, в первом столбце  $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = 0$ , во втором  $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = 0$  и т. д.

Для определения деформаций стержня запишем выражение второй производной функции перемещений:

$$Z'' = W'' [f] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6x \end{bmatrix} \cdot [f], \quad (2.21')$$

$$Z'' = B \cdot A^{-1}.$$

Работа внутренних сил на деформациях, соответствующих перемещениям  $Z_0$ ,

$$W = \int_0^l (M \cdot M / EJ) dx = \int_0^l Z''(x) \cdot EJ \cdot Z(x) \cdot dx. \quad (2.22)$$

Подставляя в (2.22) выражение для  $Z''$  (2.21'), получим

$$W = \int_0^l (A^{-1} \cdot B)' \cdot EJ \cdot (B \cdot A^{-1}) \cdot dx. \quad (2.23)$$

Работа внешних сил определяется выражением (2.11) и в данном случае

$$U = r \cdot Z_0 = r.$$

Приравнивая работу внешних и внутренних сил, получим окончательно для определения матрицы жесткости стержневого изгибаемого элемента (см. рис. 2.7) выражение

$$r = (A^{-1})' \int_0^l B'(EJ)B A^{-1}. \quad (2.24)$$

Операция транспонирования матриц в (2.23) обусловлена правилами матричной алгебры.

Формула (2.24), выведенная для изгибаемого стержня с двумя степенями свободы в узле, в действительности может быть использована для получения матриц жесткости любого конечного элемента. Достаточно лишь подставить в (2.24) соответствующие выражения для перемещений и деформаций, а также дифференциальные зависимости между усилиями и деформациями [2].

Матрица жесткости, вычисленная по формуле (2.24) для положительных направлений узловых перемещений по рис. 2.7, имеет вид

$$r = \frac{2EJ}{l} \begin{bmatrix} 6/l^2 & -3/l & 6/l^2 & -3/l \\ -3/l & 2 & -3/l & 1 \\ 6/l^2 & -3/l & 6/l^2 & -3/l \\ -3/l & 1 & -3/l & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Используя матрицу (2.25), можно решать задачи расчета статически неопределимых балок и рам. Однако для расчета рамных систем необходимо объединить матрицы (2.1) и (2.25). Объединение этих матриц дает матрицу (2.26). Матрица жесткости изгибаемого стержня с шарнирным концом приводится в приложении.

$$r = \begin{bmatrix} l/EF & 0 & 0 & l/EF & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l \\ l/EF & 0 & 0 & l/EF & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l & 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

### 2.8. Определение усилий

При расчете стержневых систем усилия в расчетных сечениях конечных элементов определяются по формуле (2.14) при помощи матрицы жесткости.

При расчете континуальных систем, например плит, усилия при выводе дифференциального уравнения изгиба предполагаются распределенными. Они вычисляются при помощи матрицы усилий, которую необходимо определять дополнительно.

Процесс получения матрицы усилий продемонстрируем на примере стержневого элемента. В общем случае матрица усилий определяется через матрицу жесткости бесконечно малого элемента  $C$ . Для стержневого изгибаемого элемента  $C = EJ$ , для шарнирно-стержневого элемента  $C = EF$ .

Для бесконечно малого элемента усилие  $S = C \cdot v$ . Деформации определяются по (2.21'):  $v = B \cdot A^{-1}$ . Тогда усилия в конечном элементе

$$S = C \cdot B \cdot A^{-1} \cdot Z = N \cdot Z, \quad (2.27)$$

где  $N$  – матрица усилий;

$Z$  – перемещения в узлах конечного элемента.

Элементы матрицы  $N$  в (2.27) зависят от координат точек, в которых определяются усилия. Можно задать любые координаты в пределах соответствующего конечного элемента и для этих точек вычислять усилия по выражению (2.27) [2].

Например, для изгибаемого стержня с двумя степенями свободы в узле изгибающие моменты определяются по формуле  $M = EJ \cdot Z''(x)$ , а поперечные силы  $Q = dM/dx$ . Подставляя в матрицу  $B$  (2.21) координаты трех расчетных сечений  $[0, l/2, l]$  и записывая их последовательно по строкам, получим матрицу для вычисления изгибающих моментов и поперечных сил.

$$N = B \cdot A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3l \\ 0 & 0 & 2 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} EJ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ -2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$N = EJ \begin{bmatrix} 6/l^2 & -4/l & 4/l^2 & -2/l \\ 0 & -1/l & 0 & 1/l \\ 6/l^2 & 2/l & 6/l^2 & 4/l \\ -12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Последняя строка в матрице  $B$  (2.28) является выражением для поперечной силы, постоянной по длине стержня.

Умножая матрицу  $N$  (2.29) на вектор узловых перемещений, можно определить изгибающие моменты в трех сечениях конечного элемента (по концам и в середине) и поперечную силу. Матрица  $A^{-1}$  (2.28) приводится в [2].

### 2.9. Приведение нагрузки к узлам

Важной особенностью метода конечных элементов, как и классического метода перемещений, является невозможность непосредственного учета нагрузок, приложенных вне узлов конечно-элементной модели. Нагрузки, приложенные вне узлов, должны приводиться к узлам. Как показано в [2], замена распределенной нагрузки эквивалентной узловой может быть выполнена на основе равенства работ распределенной и узловой нагрузок.

Работа распределенной нагрузки  $q(x)$ , приложенной к стержневому конечному элементу, определяется по формуле

$$A_{\text{распр}} = \int_0^l q(x) z(x) dx.$$

Работа узловой нагрузки

$$A_{\text{узл}} = Z' \cdot P,$$

где  $Z'$  – матрица единичных перемещений.

Как было показано выше,

$$Z = W \cdot A^{-1},$$

тогда вектор узловых нагрузок

$$P = (A^{-1})' \cdot \int_0^l W' \cdot q(x) dx. \quad (2.30)$$

Вычисление по формуле (2.30) для равномерно распределенной нагрузки, приложенной к конечному элементу длиной  $l$  с двумя защемлениями, дает

$$P = \begin{bmatrix} ql^2/12 & ql/2 & ql^2/12 & ql/2 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

что соответствует узловым моментам и реакциям из таблицы метода перемещений. Равномерно распределенная нагрузка на конечный элемент и эквивалентная ей узловая нагрузка показаны на рис. 2.8.

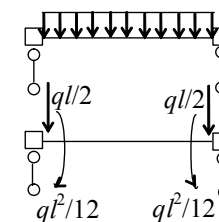


Рис. 2.8. Распределенная и узловая нагрузки

Для стержневых конечных элементов приведение нагрузки к узловой можно выполнять при помощи таблиц метода перемещений, однако предпочтительнее строить конечно-элементную модель так, чтобы сосредоточенные силы оказывались приложенными в узлах.

### 2.10. Матрица учета реакций упругого основания

Для расчета конструкций на упругом основании методом конечных элементов достаточно к матрице жесткости стержневого элемента добавить матрицу, учитывающую реакции упругого основания. При этом реакцию упругого основания можно представить в виде распределенной по длине конечного элемента нагрузки. Используем для моделирования упругого основания гипотезу Винклера, в соответствии с которой величина реакции упругого основания принимается пропорциональной величинам вертикальных перемещений:

$$p(x) = k \cdot Z(x), \tag{2.31}$$

где  $k$  – коэффициент «постели», характеризующий упругие свойства основания.

Подставим, как показано в [2], выражение прогиба (2.20) в (2.31):

$$p(x) = k \cdot Z(x) = k \cdot W \cdot A^{-1} \cdot Z.$$

Задавая последовательно единичные узловые перемещения  $Z$ , получим

$$p(x) = k \cdot W \cdot A^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (2.30) вместо  $q(x)$ , определим

$$p = (A^{-1})' \left[ k \cdot \int_{L_e} W' \cdot W \cdot dx \right] A^{-1}. \tag{2.32}$$

В (2.32)  $L_e$  – длина конечного стержневого элемента. Предполагается, что в пределах длины конечного элемента коэффициент «постели»  $k$  постоянен. Матрицы, полученные по (2.32) для изгибаемых стержневых элементов, приводятся в приложении.

### 2.11. Построение конечно-элементной модели

При построении конечно-элементных моделей конструкций узлы конечно-элементной модели должны обязательно располагаться:

- в характерных точках расчетной схемы, а именно в точках изменения геометрии или жесткостных характеристик системы;
- точках, где приложены сосредоточенные силы или моменты;
- точках, где начинается или заканчивается равномерно распределенная нагрузка;
- точках, где изменяются параметры упругого основания.

Кроме того при назначении узлов конечно-элементной модели желательно, чтобы линейные размеры конечных элементов были одинаковыми или не очень сильно отличались друг от друга.

На рис. 2.9 приводится пример расчетной схемы балки и возможной конечно-элементной модели.

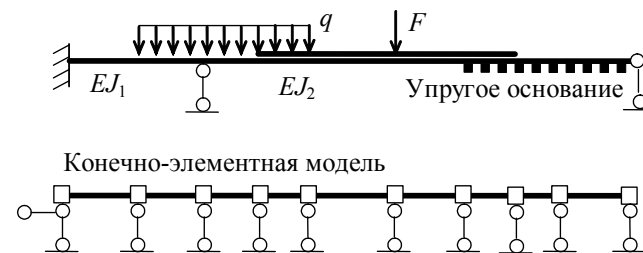


Рис. 2.9. Схема балки и возможная конечно-элементная модель

**Пример 7.** Расчет балки методом конечных элементов. Расчетная схема, конечно-элементная модель балки и нумерация узлов, конечных элементов и узловых перемещений приводятся на рис. 2.10. Для расчета будем использовать матрицу (2.25).

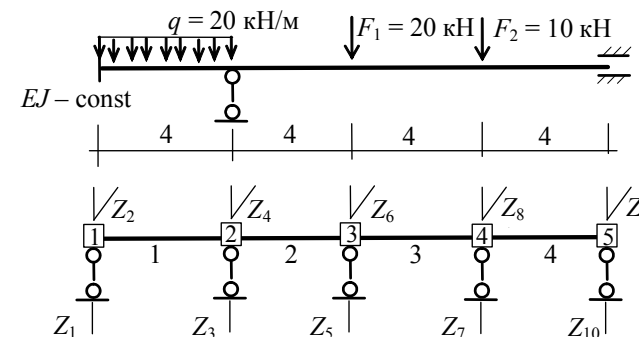


Рис. 2.10. Схема балки и конечно-элементная модель

Матрицы жесткости конечных элементов (2.25) имеют вид

$$r_{1,\dots,4} = EJ \begin{bmatrix} 0,1875 & -0,375 & 0,1875 & -0,375 \\ -0,375 & 1 & -0,375 & 0,5 \\ 0,1875 & -0,375 & 0,1875 & -0,375 \\ -0,375 & 0,5 & -0,375 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Для решения задачи переведем матрицы (2.33) в глобальную систему координат (2.15). Матрица преобразования координат

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате преобразования (2.15) матрицы примут вид

$$r_{1,\dots,4} = EJ \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375 & -0,1875 & 0,375 \\ 0,375 & 1 & -0,375 & 0,5 \\ -0,1875 & -0,375 & 0,1875 & -0,375 \\ 0,375 & 0,5 & -0,375 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как все конечные элементы имеют одинаковые размеры и жесткости, матрицы для них одинаковые. Знаки элементов 1-й строки и 1-го столбца матрицы соответствуют направлению линейного перемещения левого узла конечного элемента вниз, в отличие от направления, показанного на рис. 2.7. Такое правило знаков удобнее использовать при расчете балок. Матрицы  $r_{1,\dots,4}$  подставляются в матрицу конечно-элементной модели в соответствии с номерами узловых перемещений каждого элемента.

При формировании матрицы  $K$  матрицы конечных элементов записываются в матрицу так, чтобы их главная диагональ совпадала

с главной диагональю матрицы  $K$ . Так как у соседних элементов номера узловых перемещений совпадают, то в соответствующие ячейки матрицы  $K$  попадают одновременно коэффициенты матриц  $r_1, \dots, r_4$ , представляющие собой реакции в связях от перемещений, задаваемых на правом конце конечного элемента с номером  $g$  и левом конце конечного элемента с номером  $g + 1$ . Эти коэффициенты суммируются. Матрица жесткости конечно-элементной модели имеет порядок  $(10 \times 10)$  в соответствии с общим числом узловых перемещений.

Свободные члены системы уравнений определяются, как в методе перемещений. Вычислив для элемента 1 значения узловых составляющих нагрузки (2.31), получим

$$[R_{1p} \ R_{2p} \ R_{3p} \ R_{4p}] = [-40 \ -26,67 \ -40 \ 26,67].$$

Соответственно  $R_{5p} = -20$ ,  $R_{7p} = -10$ . Остальные свободные члены равны 0.

После учета граничных условий  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_9 = Z_{10} = 0$  получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & -0,375 & 0,5 & 0 & 0 \\ -0,375 & 0,375 & 0 & -0,1875 & 0,375 \\ 0,5 & 0 & 2 & -0,375 & 0,5 \\ 0 & -0,1875 & -0,375 & 0,375 & 0 \\ 0 & 0,375 & 0,5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 26,67 \\ -20 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

откуда

$$Z = [13,33 \ 193,58 \ 38,52 \ 161,97 \ -45,93] \frac{1}{EJ}.$$

Для определения усилий можно воспользоваться либо матрицей (2.29), либо матрицей жесткости (2.25). В первом случае изгибающие моменты вычисляются в трех сечениях стержня, во втором – в сечениях, расположенных по концам элемента.

Чтобы вычислить усилия, сформируем векторы перемещений для всех конечных элементов. Для этого выберем из вектора решения системы уравнений  $Z$  не равные нулю перемещения в узлах конечных

элементов и дополним их нулевыми значениями из вектора граничных условий. Например, для элемента с номером 1 первые три перемещения нулевые, а четвертое (угол поворота узла 2) равно 13,33. Аналогично формируются и остальные векторы перемещений. Они имеют вид (множитель  $1/EJ$  опущен):

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13,33 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13,33 \\ 193,58 \\ 38,52 \end{bmatrix}, \quad Z_3 = \begin{bmatrix} 192,58 \\ 38,52 \\ 161,97 \\ -45,93 \end{bmatrix}, \quad Z_4 = \begin{bmatrix} 191,97 \\ -45,93 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Умножая матрицу (2.32) последовательно на векторы  $Z_1, \dots, Z_4$ , получим

$$S_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6,67 \\ -5 \\ 13,33 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} -16,85 \\ -40 \\ 16,85 \\ -27,4 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 3,15 \\ 27,4 \\ -3,15 \\ 14,81 \end{bmatrix}, \quad S_4 = \begin{bmatrix} 13,15 \\ 14,81 \\ -13,15 \\ 37,78 \end{bmatrix}.$$

Каждый из векторов усилий содержит значения поперечных сил и моментов в концевых сечениях конечного элемента от узловой нагрузки. Положение расчетных сечений показано на рис. 2.7. Усилия в расчетных сечениях

$$S_i = \begin{bmatrix} -Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Отрицательное значение поперечной силы в левом сечении каждого конечного элемента обусловлено используемым правилом знаков для единичного перемещения  $Z_1$  при вычислении матрицы жесткости (2.33).

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил приводятся на рис. 2.11.

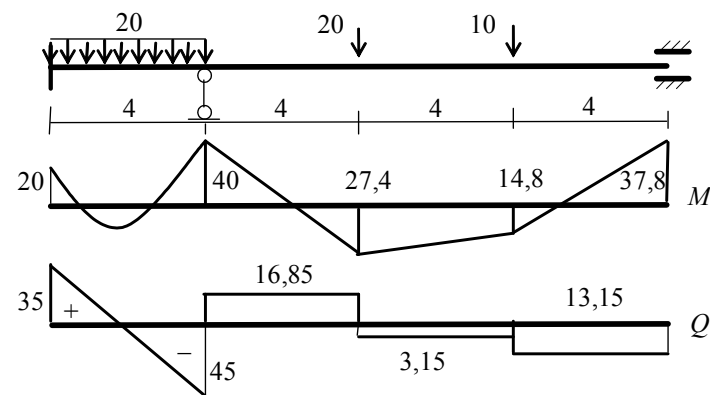


Рис. 2.11. Эпюры моментов и поперечных сил

Для построения эпюры моментов в элементе 1 к узловой эпюре, значения которой содержатся в векторе  $S_1$ , нужно приплюсовать табличную эпюру метода перемещений  $S_q$  для стержня с двумя защемленными концами:

$$S_{1\text{расп}} = S_{1\text{уэл}} + S_q = \begin{bmatrix} -5 \\ 6,67 \\ -5 \\ 13,33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 \\ -26,67 \\ -40 \\ 26,67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 20 \\ -45 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

**Пример 8.** Расчет балки на упругом основании. Расчетная схема балки и конечно-элементная модель приведены на рис. 2.12. Для учета упругого основания используем матрицы из приложения. При расчете балки на упругом основании необходимо задаться числовыми значениями жесткостей стержней и упругого основания. Примем  $EJ = 14\,000 \text{ кН/м}^2$ ,  $k_0 = 4500 \text{ кН/м}^2$ . Коэффициент постели  $k$  в (2.31) имеет размерность  $\text{кН/м}^3$ . Для вычисления коэффициента  $k_0$  коэффициент  $k$  умножается на ширину поперечного сечения балки, которая в данном примере принята равной 1 м.



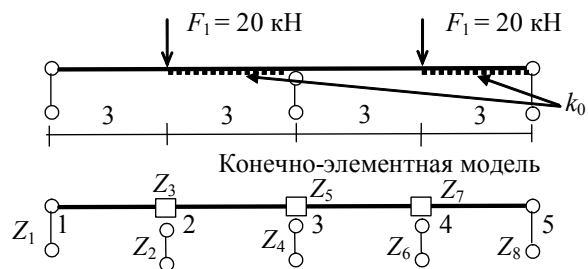


Рис. 2.12. Схема балки для примера 8

Граничные условия для рассматриваемой системы:  $Z_1 = Z_4 = Z_8 = 0$ .

При вычислении коэффициентов матриц жесткости для элементов 1 и 4 необходимо матрицу из приложения перевести в глобальную систему координат по формуле (2.15). Матрица преобразования будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу жесткости для элемента 4 необходимо также подвергнуть преобразованию по (2.15) при помощи матрицы

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это преобразование переводит матрицу жесткости для элемента с шарниром на левом конце и правым защемлением (элемент 1) в матрицу для элемента с левым защемлением и правым шарниром (элемент 4). Координатным преобразованиям должны быть подвергнуты и матрицы реакций упругого основания для элементов 4 и 2. Матрица преобразования координат для этих элементов имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выполняя необходимые вычисления, получим:

$$r_1 = 14000 \begin{bmatrix} 1/9 & -1/9 & 1/3 \\ -1/9 & 1/9 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$r_2 = r_3 = \left(\frac{2}{3}\right) 14000 \begin{bmatrix} 2/3 & 1 & -2/3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2/3 & -1 & 2/3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$r_4 = 14000 \begin{bmatrix} 1/9 & 1/3 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/9 & -1/3 & 1/9 \end{bmatrix};$$

$$p_2 = 385,7 \begin{bmatrix} 13 & 33/6 & 4,5 & -39/12 \\ 33/6 & 3 & 39/12 & -9/4 \\ 4,5 & 39/12 & 13 & -33/6 \\ -39/12 & -9/4 & -33/6 & 3 \end{bmatrix};$$

$$p_4 = 385,7 \begin{bmatrix} -33/4 & -33/8 & 39/8 \\ -33/8 & 6 & -9 \\ 39/8 & -9 & 17 \end{bmatrix}.$$

При формировании матрицы жесткости конечно-элементной модели для элемента 1 возьмем матрицу  $r_1$ , для элемента 2 – матрицу  $r_2 + p_2$ , для элемента 3 – матрицу  $r_3$  и для элемента 4 – матрицу  $r_4 + p_4$ .

Матрица системы уравнений с учетом граничных условий, вектор свободных членов и решение системы уравнений следующие:

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 1,28 & 0,68 & 0,81 & 0 & 0 \\ 0,68 & 3,38 & 0,85 & 0 & 0 \\ 0,81 & 0,85 & 3,85 & -0,93 & 0,93 \\ 0 & 0 & -0,93 & 1,1 & -0,63 \\ 0 & 0 & 0,93 & -0,63 & 3,5 \end{bmatrix};$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad Z = 10^{-4} \begin{bmatrix} 16,49 \\ -3,76 \\ 1,81 \\ 21,73 \\ 3,4 \end{bmatrix}.$$

Вычислим усилия в расчетных сечениях. При вычислении усилий в элементах берутся матрицы, использованные при формировании системы уравнений. Для элемента 1 – матрица  $r_1$ , для элемента 2 – матрица  $r_2 + p_2$  и т. д. Векторы перемещений конечных элементов (множитель  $10^{-4}$  опущен):

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 16,49 \\ -3,76 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 16,49 \\ -3,76 \\ 0 \\ 1,81 \end{bmatrix}, \quad Z_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,81 \\ 21,73 \\ 3,4 \end{bmatrix}, \quad Z_4 = \begin{bmatrix} 21,73 \\ 3,4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Усилия в расчетных сечениях:

$$S_1 = \begin{bmatrix} -4,32 \\ 4,32 \\ -12,96 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 15,68 \\ 12,96 \\ -6,43 \\ 13,73 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} -8,65 \\ -13,72 \\ 8,65 \\ -12,23 \end{bmatrix}, \quad S_4 = \begin{bmatrix} 11,34 \\ 12,23 \\ -2,06 \end{bmatrix}.$$

Эпюры усилий в балке приводятся на рис. 2.13.

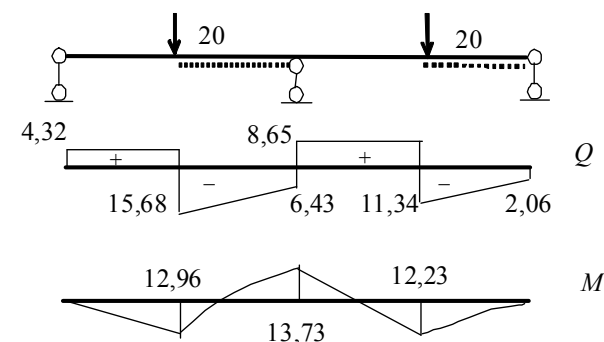


Рис. 2.13. Эпюры усилий для примера 8

Эпюры моментов и поперечных сил на участках балки с упругим основанием криволинейные. Для уточнения характера эпюр на этих участках необходимо добавить в конечно-элементную модель дополнительные узлы.

## Список использованной литературы

Приложение

1. *Зенкевич, О.* Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: МИР, 1986.

2. *Масленников, А. М.* Расчет конструкций методом конечных элементов / А. М. Масленников. – Куйбышев, 1983.

3. *Масленников, А. М.* Приложение метода конечных элементов к расчету строительных конструкций / А. М. Масленников. – Л., 1978.

4. *Розин, Л. А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам / Л. А. Розин. – М.: Стройиздат, 1977.

5. *Лебедев, В. А.* Статика твердого тела на основе матричных методов с применением ЭВМ / В. А. Лебедев. – Л., 1981.

Матрицы жесткости и упругого основания стержневого элемента с шарнирным концом:

$$r = \frac{3 \cdot EJ}{l} \begin{bmatrix} 1/l^2 & 1/l^2 & -1/l \\ 1/l^2 & 1/l^2 & -1/l \\ -1/l & -1/l & 1 \end{bmatrix};$$

$$p = \frac{k_0 \cdot l}{35} \begin{bmatrix} 13 & -39/8 & 11l/8 \\ -39/8 & 17 & -3l \\ 11l/8 & -3l & 2l^2/3 \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости и упругого основания стержневого элемента с защемленными концами (см. рис. 2.7):

$$r = \frac{2EJ}{l} \begin{bmatrix} 6/l^2 & -3/l & 6/l^2 & -3/l \\ -3/l & 2 & -3/l & 1 \\ 6/l^2 & -3/l & 6/l^2 & -3/l \\ -3/l & 1 & -3/l & 2 \end{bmatrix};$$

$$p = \frac{k_0 l}{35} \begin{bmatrix} 13 & -11l/6 & -9/2 & -13/12l \\ -11l/6 & l^2/3 & -13/12l & -l^2/4 \\ -9/2 & -13/12l & 13 & -11l/6 \\ -13/12l & -l^2/4 & 11l/6 & l^2/3 \end{bmatrix}.$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
<b>Глава 1. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений .....</b>	<b>4</b>
1.1. Общие положения .....	4
1.2. Методы численного решения дифференциальных уравнений .....	5
1.2.1. Метод конечных разностей .....	5
1.2.2. Методы взвешенных невязок .....	7
1.2.3. Вариационные методы .....	11
1.2.4. Метод конечных элементов для решения дифференциальных уравнений .....	13
1.2.5. Основные выводы .....	17
<b>Глава 2. Расчет строительных конструкций .....</b>	<b>19</b>
2.1. Метод конечных элементов (МКЭ) в расчетах строительных конструкций .....	19
2.2. Метод перемещений как основа МКЭ .....	20
2.3. Основные параметры конечных элементов .....	20
2.4. Матрица жесткости шарнирно-стержневого конечного элемента .....	23
2.5. Локальная и глобальная системы координат .....	25
2.6. Матрица жесткости шарнирно-стержневого элемента в глобальной системе координат .....	28
2.7. Общая формула вычисления матриц жесткости .....	35
2.8. Определение усилий .....	39
2.9. Приведение нагрузки к узлам .....	40
2.10. Матрица учета реакций упругого основания .....	42
2.11. Построение конечно-элементной модели .....	42
Список использованной литературы .....	52
Приложение .....	53

Учебное издание

**Лебедев Александр Валентинович**

### **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие

Редактор А. В. Афанасьева  
Корректоры К. И. Бойкова, М. А. Молчанова  
Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 17.04.12. Формат 60×84 1/8. Бум. офсетная.  
Усл. печ. л. 3,3. Тираж 100 экз. Заказ 44. «С» 17.  
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.  
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.  
Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 5.

**ДЛЯ ЗАПИСЕЙ**