Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Л. Е. МОРОЗОВА, В. Б. СМИРНОВА

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2011

УДК 519.95 (075.8)

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент А. Л. Трескунов (СПбГАСУ); канд. физ.-мат. наук, доцент М. Ю. Фёдорова (СПбГУ).

Морозова, Л. Е.

Определённый интеграл: учеб. пособие /Л. Е. Морозова, В. Б. Смирнова; СПбГАСУ. – СПб., 2011. – 99 с.

ISBN 978-5-9227-0295-9

Пособие предназначено для самостоятельного изучения раздела «Определённый интеграл» студентами специальностей с сокращенным курсом математики.

Даны основные определения и теоремы. Приводится методика решения задач. Рассмотрены многочисленные примеры.

Табл. 1. Ил. 65. Библиогр.: 4 назв.

Рекомендовано Редакционно-издательским советом СПбГАСУ в качестве учебного пособия.

ISBN 978-5-9227-0295-9

Глава 1. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1.1. Задача о площади криволинейной трапеции

Рассмотрим промежуток $[a,b]$ $(a < b)$ и заданную на нём непрерывную неотрицательную функцию $f(x)$. Фигура, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$ называется ***криволинейной трапецией*** (рис. 1).

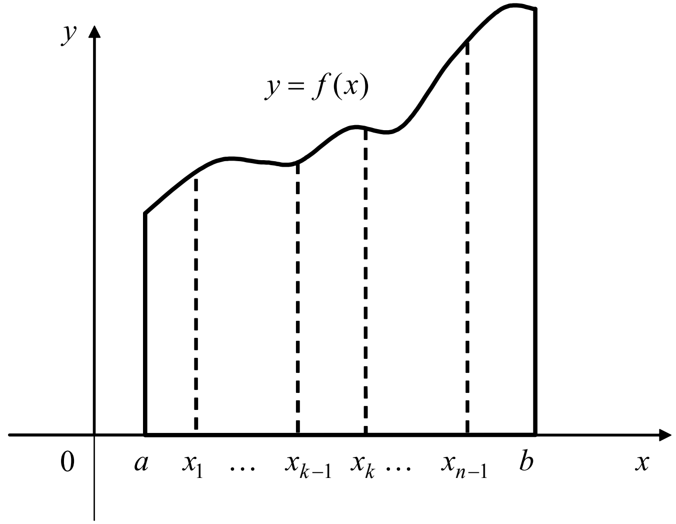

Рис. 1

Будем решать ***задачу о вычислении площади криволинейной трапеции.***

Для этого разобьём отрезок $[a, b]$ на части точками x_i $(i = 0,\dots, n)$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Проведём прямые $x = x_k$ $(k = 0,\dots, n)$. Тогда наша криволинейная трапеция будет представлять собой сумму n узких «криволинейных полосок» (каждая k-я полоска ограничена линиями $x = x_{k-1}$,

$x = x_k$, $y = 0$, $y = f(x)$ $(k = 1,\ldots,n)$). Обозначим площадь криволинейной трапеции через S, а площадь каждой k-й полоски через ΔS_k. Получим

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k.$$

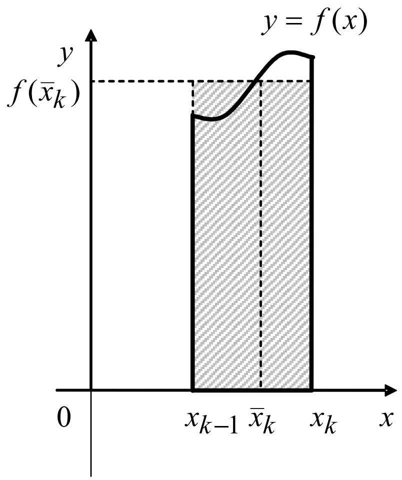

Рис. 2

Площадь каждой полоски приближённо равна площади прямоугольника с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1,\ldots,n)$ и высотой $f(\bar{x}_k)$, где $\bar{x}_k$ – произвольно выбранная точка из промежутка $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1,\ldots,n)$ (рис. 2). Это приближённое равенство тем ближе к точному равенству, чем у́же ширина полоски $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Таким образом,

$$S \cong \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

Введём понятие ***ранга дробления***. Среди всех значений Δx_k выберем наибольшее, обозначим его через λ и назовём рангом дробления, так что

$$\lambda = \text{наиб.}\{\Delta x_1,\ldots, \Delta x_n\}.$$

Можно показать, что в силу непрерывности функции $f(x)$ при $\lambda \to 0$ приближённое равенство (1) переходит в точное равенство

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k. \tag{2}$$

Более того, величина S в этом случае не зависит от выбора точек $x_1,\ldots,x_{n-1}$, $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$.

К необходимости изучать пределы вида (2) приводят многие задачи геометрии, механики, физики. Пределы вида (2) обобщены с помощью понятия ***определённого интеграла***.

1.2. Определение определённого интеграла

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке $[a,b]$ $(a < b)$. Проделаем следующие операции:

1. Разделим промежуток $[a, b]$ на части произвольно выбранными точками $x_1,\ldots,x_{n-1}$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

составим величины $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2,\ldots,n)$ и определим ранг дробления

$$\lambda = \text{наиб.}\{\Delta x_1,\ldots, \Delta x_n\}.$$

2. На каждом промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольным образом точку $\bar{x}_k$ и вычислим $f(\bar{x}_k)$ $(k = 1, 2,\ldots,n)$.

3. Вычислим парные произведения $f(\bar{x}_k)\Delta x_k$ $(k = 1, 2,\ldots,n)$.

4. Сложим все парные произведения и получим сумму вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k,$$

называемую ***интегральной суммой***.

5. Перейдем к пределу при $\lambda \to 0$ и вычислим (если это возможно)

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k. \tag{3}$$

Если предел (3) существует и не зависит ни от способа разбиения промежутка $[a,b]$ на части, ни от выбора точек $\bar{x}_k$, то он называется **определённым интегралом** от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$ и обозначается так:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $[a, b]$ – ***промежутком интегрирования***, a – ***нижним пределом***, b – ***верхним пределом интегрирования***.
Итак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k. \tag{4}$$

***Замечания*:**

1. Из самого определения определённого интеграла следует, что он может для данной функции не существовать, так как может не существовать предел (3). Функции, для которых определённый интеграл существует, называются ***интегрируемыми по Риману***. Любая непрерывная на $[a,b]$ функция, а также любая кусочно-непрерывная[1] на $[a,b]$ функция интегрируема по Риману. (Этот факт мы приводим без доказательства.) Но класс интегрируемых функций значительно шире.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на промежутке $[a,b]$, то функция $\varphi(x)$, отличающаяся от $f(x)$ в конечном числе точек, также интегрируема по Риману на $[a,b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

3. Обозначение переменной интегрирования в определенном интеграле роли не играет:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

4. Если $\lambda\to 0$, то число точек дробления n стремится к бесконечности, но не наоборот. Действительно, мы можем зафиксировать две точки дробления, не помещая между ними никаких других точек. Тогда λ останется постоянным, на какие бы мелкие части мы ни дробили отрезки вне этих точек.

Геометрический смысл определённого интеграла следует из задачи о площади криволинейной трапеции. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[a,b]$ $(a < b)$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$.

[1]Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на промежутк $[a, b]$, если она имеет на этом промежутке конечное число разрывов I рода.

Расширим определение определённого интеграла на случаи $a = b$ и $a > b$. Положим:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \tag{5}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{6}$$

Обе формулы не противоречат приведённому выше определению определённого интеграла.

1.3. Свойства определённого интеграла, выражаемые равенствами

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то для любого числа α верно равенство*

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Доказательство проведём на основании определения определённого интеграла от функции $\alpha f(x)$. Проделаем следующие операции:

1. Разделим промежуток $[a,b]$ на части произвольно выбранными точками $x_1, \ldots, x_{n-1}$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

составим величины $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и определим ранг дробления

$$\lambda = \text{наиб.}\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}.$$

2. На каждом промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольным образом точку $\bar{x}_k$ и вычислим $\alpha\, f(\bar{x}_k)$ $\quad (k=1, 2, \ldots, n)$.

3. Вычислим произведения $(\alpha\, f(\bar{x}_k))\Delta x_k \quad (k=1, 2, \ldots, n)$.

4. Сложим все произведения и получим интегральную сумму вида

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\alpha\, f(\bar{x}_k)\right)\Delta x_k .$$

5. Устремим ранг дробления λ к 0 и будем искать

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha\, f(\bar{x}_k)\right)\Delta x_k. \tag{8}$$

Поскольку функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ по условию теоремы, получим следующую цепочку равенств:

$$\int_a^b \alpha\, f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} \alpha\, f(\bar{x}_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0} \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k =$$

$$= \alpha \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, предел (8) существует и не зависит ни от способа разбиения промежутка $[a,b]$ на части, ни от выбора точек $\bar{x}_k$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a,b]$, то их алгебраическая сумма $f(x) \pm g(x)$ тоже интегрируема на промежутке $[a,b]$ и справедлива формула*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{9}$$

Доказательство аналогично предыдущему доказательству:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} (f(\bar{x}_k) \pm g(\bar{x}_k))\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^{n} g(\bar{x}_k)\Delta x_k \right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k \pm \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\bar{x}_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Заметим, что так как обе функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a,b]$, то разбиение отрезка $[a,b]$ на части и выбор точек $\bar{x}_k$ можно для них обеих и их алгебраической суммы осуществить одинаково.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любых трёх чисел a, b, c справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{10}$$

если все три интеграла существуют.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $a < c < b$. Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения промежутка $[a,b]$ на элементарные части, то будем разбивать $[a,b]$ на промежутки так, чтобы точка c была точкой деления. Обозначим её через x_{n_c} (т. е. $c = x_{n_c}$). Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n_c} f(\bar{x}_k)\Delta x_k + \sum_{k=n_c+1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k \right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n_c} f(\bar{x}_k)\Delta x_k + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=n_c+1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В рассматриваемом случае теорема 3 допускает простую геометрическую иллюстрацию. Предположим, что функция $f(x)$ неотрица-

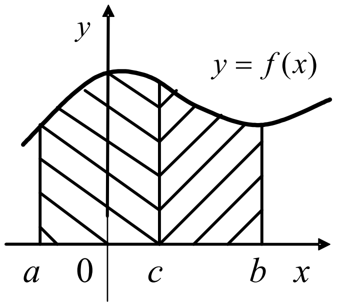

Рис. 3

тельна на отрезке $[a,b]$. Тогда формула (10) означает, что площадь криволинейной трапеции на отрезке $[a,b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно (рис. 3).

2. Пусть теперь заданные числа произвольны. Рассмотрим, например, случай $c<b<a$. Тогда в силу доказанного в п. 1 равенства справедливо

$$\int_c^a f(x)dx=\int_c^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx.$$

Воспользуемся формулой (6) и поменяем пределы интегрирования

$$-\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx-\int_a^b f(x)dx.$$

Получим

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \qquad (10)$$

В остальных случаях: $a<b<c$; $b<a<c$; $b<c<a$; $c<a<b$ – формула (10) выводится аналогично.

Теорема доказана.

1.4. Свойства определённого интеграла, выражаемые неравенствами

Теорема 4. *Пусть $a<b$, функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a,b]$ и при всех $x\in[a,b]$ справедливо неравенство*

$$f(x)\ge g(x). \qquad (11)$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx. \qquad (12)$$

Доказательство. Рассмотрим разность интересующих нас интегралов как интеграл разности данных функций. В силу (9)

$$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

Последний интеграл запишем по формуле (4), т. е. следуя определению определенного интеграла

$$\int_a^b (f(x)-g(x))dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\bar{x}_k)-g(\bar{x}_k)\right)\Delta x_k.$$

Здесь все парные произведения интегральной суммы неотрицательны. Действительно, по условию (11) $f(\bar{x}_k)-g(\bar{x}_k)\ge 0$ при всех $k=1,\dots,n$, а $\Delta x_k>0$ при всех $k=1,\dots,n$, поскольку $a<b$.

Значит, и сама интегральная сумма неотрицательна. Тогда по теореме о предельном переходе в неравенстве неотрицателен и её предел. Таким образом, получаем:

$$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\bar{x}_k)-g(\bar{x}_k)\right)\Delta x_k\ge 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $a<b$, функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$ и при всех $x\in[a,b]$ справедливо неравенство $f(x)\ge 0$.*

Тогда $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на промежутке $[a,b]$ и при $a<b$ справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx. \qquad (13)$$

Доказательство. Проведём его только для непрерывных функций. Заметим, что

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \qquad (14)$$

для всех $x \in [a,b]$. К цепочке неравенств (14) применим теорему 4. Получим

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

что равносильно неравенству (13).

1.5. Теорема о среднем значении

Теорема 6. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на промежутке* $[a,b]$ *и пусть функция* $\varphi(x)$ *не меняет знака на этом промежутке. Тогда найдётся такая точка* $c \in [a,b]$, *что справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (15)$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $a < b$, а $\varphi(x) \ge 0$ при $x \in [a,b]$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\varphi(x) \equiv 0$ при всех $x \in [a,b]$. Тогда равенство (15) выполнено очевидным образом.

2. Пусть $\varphi(x)$ не является тождественно равной нулю. Тогда в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ можем утверждать, что

$$\int_a^b \varphi(x)dx > 0.$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$, то она достигает на этом промежутке своего наибольшего значения *M* и своего наименьшего значения *m*, т. е. при всех $x \in [a,b]$ справедливы неравенства

$$m \le f(x) \le M. \qquad (16)$$

Домножим неравенства (16) на положительные значения функции $\varphi(x)$ и получим справедливые при всех $x \in [a,b]$ неравенства

$$m\,\varphi(x) \le f(x)\,\varphi(x) \le M\,\varphi(x). \qquad (17)$$

К цепочке неравенств (17) применим теорему 4 и получим справедливые неравенства

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \le M\int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (18)$$

Разделим все части цепочки неравенств (18) на положительное число $\int_a^b \varphi(x)dx$. Получим

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \le M.$$

Поскольку непрерывная функция $f(x)$ принимает на промежутке $[a,b]$ все значения между своим наибольшим *M* и наименьшим *m*, существует такая точка $c \in [a,b]$, что

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, теорема 6 доказана.

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на промежутке* $[a,b]$, *то можно указать такое значение* $c \in [a,b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \qquad (19)$$

Доказательство. Будем считать $\varphi(x) \equiv 1$ при $x \in [a,b]$. Тогда согласно теореме 6 найдётся такая точка $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\int_a^b dx = f(c)(b-a).$$

В случае, когда $f(x) \ge 0$ при всех $x \in [a,b]$, формула (19) имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$. Согласно равенству (19) площадь этой криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f(c)$ (рис. 4).

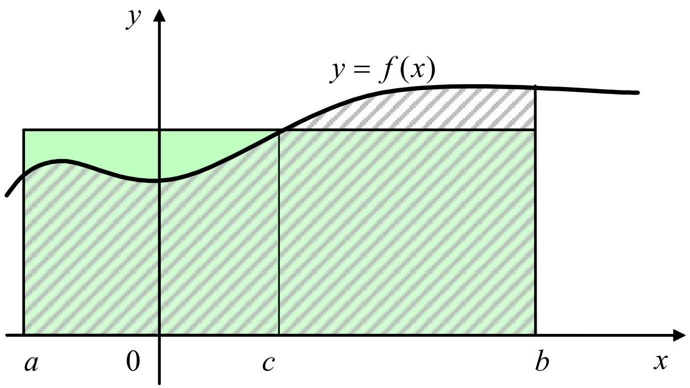

Рис. 4

1.6. Теорема Барроу

Рассмотрим определённый интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (20)$$

Здесь a – число; x – переменная. Таким образом, $F(x)$ является функцией верхнего предела x.

В силу геометрического смысла определённого интеграла, если $f(t) \ge 0$, $x \ge a$, то величина $\int_a^x f(t)\,dt$ является площадью криволинейной трапеции, ограниченной справа прямой $t = x$. Так как x – переменная, то и интеграл (20) изображает трапецию с переменной площадью (рис. 5).

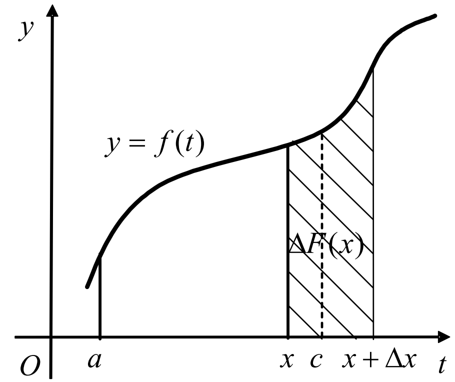

Рис. 5

Справедливо следующее важное утверждение.

Теорема Барроу. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна, то*

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x),$$

т. е. производная определённого интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования.

Доказательство. По определению производной

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

где

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (21)$$

Во втором слагаемом правой части (21) поменяем пределы интегрирования по формуле (6) и на основании теоремы 3 получим:

$$\Delta F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^a f(t)\,dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Величина $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt$ является площадью заштрихованной криволинейной трапеции (см. рис. 5). Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, по теореме 6 о среднем значении найдётся такая точка $c \in [x, x+\Delta x]$, для которой справедливо

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\,\Delta x.$$

Тогда

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x).$$

Теорема доказана.

Приведём примеры применения теоремы Барроу.

Пример 6.1. $\left(\int\limits_{2}^{x} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}\,dt\right)'_x = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}.$

Пример 6.2. $\left(\int\limits_{x}^{5} \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t^2+3}}\,dt\right)'_x = \left(-\int\limits_{5}^{x} \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t^2+3}}\,dt\right)'_x = -\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+3}}.$

Пример 6.3. $\left(\int\limits_{2}^{5} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}\,dt\right)'_x = 0$, так как определённый интеграл с постоянными пределами – это постоянная величина.

Пример 6.4. $\left(\int\limits_{2}^{x^2} \frac{\sin t dt}{t+1}\right)'_x = 2x\frac{\sin x^2}{x^2+1}$. Здесь мы имеем дело со сложной функцией: $F'_x(x^2) = F'_z(z)\,z'(x)$, где $z(x) = x^2$; $F(z) = \int\limits_{2}^{z} \frac{\sin t dt}{t+1}$.

Следствие. *Любая непрерывная на промежутке $[a,b]$ функция имеет на этом промежутке первообразную.*

Действительно, если $f(x)$ – непрерывна, то существует $\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt = F(x)$. Но по теореме Барроу $F'(x) = f(x)$, т. е. $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Таким образом, $\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ – первообразная для $f(x)$.

Замечание. Первообразная непрерывной функции не всегда может быть выражена в терминах элементарных функций.

1.7. Формула Ньютона – Лейбница. Вычисление определённого интеграла

На основе теоремы Барроу выведем формулу для вычисления определённого интеграла от непрерывных функций. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a,b]$. Тогда она имеет на этом промежутке первообразную $\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt = \Phi(x)$. Пусть $F(x)$ – любая другая первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a,b]$. Известно, что две любые первообразные одной и той же функции отличаются разве лишь на постоянное значение, т. е. $\Phi(x) - F(x) = C$. Справедливо равенство

$$\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt = F(x) + C, \tag{22}$$

где C – какая-то постоянная. Вычислим величину C. Положим в (22) $x = a$. Поскольку $\int\limits_{a}^{a} f(t)\,dt = 0$, получим $C = -F(a)$ и формула (22) примет вид

$$\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(a). \tag{23}$$

Положим в (23) $x = b$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(a), \tag{24}$$

где $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$.

Формула (24) носит название ***формула Ньютона – Лейбница***. С помощью формулы (24) можно вычислить определённый интеграл от любой непрерывной функции.

Введём обозначение

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Символ $F(x)\Big|_a^b$ называется ***двойной подстановкой в функцию $F(x)$ в пределах от a до b***. С его помощью формулу (24) можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b$$

или в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[\int f(x)\,dx\right]\Big|_a^b.$$

Если функция $F(x)$ имеет сложный вид, то используют запись

$$\left[F(x)\right]\Big|_a^b.$$

Приведём примеры применения формулы Ньютона – Лейбница.

Пример 7.1. $\int\limits_1^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}.$

Пример 7.2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$

Пример 7.3. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 3x}=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{3}(-1)=\frac{1}{3}.$

Пример 7.4. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$

Пример 7.5.

$$\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|\Big|_0^2=\ln\left(2+\sqrt{8}\right)-\ln 2=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Пример 7.6. $\int\limits_4^5\frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big|_4^5=\frac{1}{6}\ln\frac{2}{8}-\frac{1}{6}\ln\frac{1}{7}=\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}.$

Пример 7.7.

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_1^2=\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$

Пример 7.8.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x\,dx=-\ln\left|\cos x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

Пример 7.9. Вычислить $\int\limits_1^3\frac{xdx}{x^2+1}$**.** Сначала найдём $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$.

Используем замену переменной $z=x^2+1$.

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C.$$

Тогда

$$\int\limits_1^3\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^3=\frac{1}{2}\ln 10-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 5.$$

Пример 7.10. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin 2x\,dx$. Сначала найдём $I=\int x\sin 2x\,dx$. Используем интегрирование по частям. Положим

$u = x, \quad dv = \sin 2x dx$. Получим $du = dx, \quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Тогда

$$I = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Окончательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx = [-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x]\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$$

Пример 7.11. Вычислить $\int_0^b \sqrt{x^2+m}\,dx$. Сначала найдём $\int \sqrt{x^2+m}\,dx$. При вычислении этого интеграла используем приём интегрирования по частям для того, чтобы свести его к себе. Положим $u = \sqrt{x^2+m}$, $dv = dx$. Найдём $du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+m}}$, $v = x$. Получим

$$\int \sqrt{x^2+m}\,dx = x\sqrt{x^2+m} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}} = x\sqrt{x^2+m} - \int \frac{x^2+m-m}{\sqrt{x^2+m}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+m} - \int \frac{x^2+m}{\sqrt{x^2+m}}dx + \int \frac{mdx}{\sqrt{x^2+m}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}\,dx + m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|.$$

Получили уравнение относительно искомого интеграла

$$\int \sqrt{x^2+m}dx = x\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}\,dx + m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|.$$

Решим его и получим

$$2\int \sqrt{x^2+m}dx = x\sqrt{x^2+m} + m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|,$$

$$\int \sqrt{x^2+m}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+m} + \frac{m}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C. \tag{25}$$

Окончательно

$$\int_0^b \sqrt{x^2+m}\,dx = (\frac{x}{2}\sqrt{x^2+m} + \frac{m}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|)\Big|_0^b =$$

$$= \frac{b}{2}\sqrt{b^2+m} + \frac{m}{2}\ln\left|b+\sqrt{b^2+m}\right| - \frac{m}{2}\ln\sqrt{m}. \tag{26}$$

Замечание 1. Двойная подстановка обладает двумя очевидными свойствами:

1) $[\lambda F(x)]\Big|_a^b = \lambda[F(x)]\Big|_a^b$;

2) $[F(x)+G(x)]\Big|_a^b = [F(x)]\Big|_a^b + [G(x)]\Big|_a^b$.

Действительно,

$$[F(x)+G(x)]\Big|_a^b = (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) =$$

$$= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) = [F(x)]\Big|_a^b + [G(x)]\Big|_a^b.$$

Замечание 2. Формула Ньютона – Лейбница (24) справедлива только для непрерывных функций. Ее можно использовать и для кусочно-непрерывных функций. Пусть теперь функция $f(x)$ имеет на заданном промежутке $[a,b]$ конечное число конечных разрывов, например, в точках c_1 и c_2. Тогда определённый интеграл по промежутку $[a,b]$ в силу формулы (10) вычисляется так:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^b f(x)dx.$$

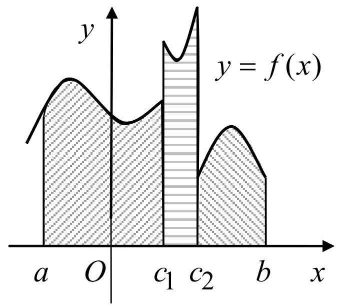

Рис. 6

Это естественно и в силу геометрического смысла определённого интеграла (рис. 6), поскольку площадь всей фигуры равна сумме площадей криволинейных трапеций на отдельных частичных промежутках, на которых функция непрерывна.

1.8. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Для того чтобы применить формулу Ньютона – Лейбница, нужно сначала найти неопределённый интеграл от подынтегральной функции. Для этого часто применяются формулы интегрирования по частям в неопределённом интеграле (примеры 7.10 и 7.11) и замены переменной в неопределённом интеграле (пример 7.9). Но одноименные формулы существуют и для определённого интеграла. И гораздо удобнее использовать для вычисления определённого интеграла именно эти формулы.

Теорема 7. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на промежутке $[a,b]$. Справедлива формула*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \big[u(x)\,v(x)\big]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx, \qquad (27)$$

или в более компактной[1] записи

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = \big[u(x)\,v(x)\big]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x). \qquad (28)$$

Доказательство. Применим формулу Ньютона – Лейбница и формулу интегрирования по частям в неопределённом интеграле:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[\int u(x)\,v'(x)\,dx\Big]\Big|_a^b =$$

[1] В интегралах, участвующих в формуле (28), переменной интегрирования является x.

$$= \Big[u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx\Big]\Big|_a^b =$$

$$= \big[u(x)\,v(x)\big]\Big|_a^b - \Big[\int v(x)\,u'(x)\,dx\Big]\Big|_a^b =$$

$$= \big[u(x)\,v(x)\big]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Формула (27) доказана.

***Замечания*:**

1. При решении задач обычно пользуются компактной формой (28), а не развёрнутой формой (27).
2. Типы функций, которые следует интегрировать по частям, такие же, как и в случае вычисления неопределённого интеграла.
3. Форма записи решения такая же, как и в случае неопределённого интеграла.

Приведём примеры.

Пример 8.1. Вычислить $\int_1^e \ln x\,dx$.

Положим $u = \ln x$, $dv = dx$. Получим $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x$. Тогда

$$\int_1^e \ln x\,dx = (x\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - \ln 1 - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1.$$

Пример 8.2. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Положим $u = x$, $dv = \cos x\,dx$. Получим $du = dx$, $v = \sin x$. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = [x\sin x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 8.3. Вычислить $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

Положим $u = \operatorname{arctg} x,\ dv = dx$. Найдем $du = \dfrac{dx}{x^2+1},\ v = x$. Получим

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = [x \operatorname{arctg} x]\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

Воспользуемся тем, что $\int \dfrac{x}{x^2+1}\,dx$ вычислен в примере 7.9. Тогда

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = [x \operatorname{arctg} x]\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Пример 8.4. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx$.

Положим $u = \arcsin x,\ dv = dx$. Найдём $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ v = x$.

Получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx = [x \arcsin x]\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

Мы воспользовались первообразной для функции $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, полученной с помощью замены $z = 1-x^2$ следующим образом:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\sqrt{z} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 8.5. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx$.

При вычислении этого интеграла используем приём интегрирования по частям, для того чтобы свести его к самому себе. Положим $u = \sqrt{x^2+3},\ dv = dx$. Найдём $du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+3}},\ v = x$. Получим

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx = x\sqrt{x^2+3}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+3}} = 2 - \int\limits_0^1 \frac{x^2+3-3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx =$$

$$= 2 - \int\limits_0^1 \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx + \int\limits_0^1 \frac{3dx}{\sqrt{x^2+3}} = 2 - \int\limits_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|\Big|_0^1 =$$

$$= 2 - \int\limits_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx + 3\ln 3 - 3\ln\sqrt{3} = 2 + 3\ln\sqrt{3} - \int\limits_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx.$$

Получили уравнение относительно искомого интеграла:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx = 2 + 3\ln\sqrt{3} - \int\limits_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx.$$

Решим его и получим

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx = 1 + \frac{3}{2}\ln\sqrt{3}.$$

Сравните полученный результат с результатом (26) примера 7.11.

1.9. Замена переменной в определённом интеграле

Òåî ðåì à 8. *Справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(z(x))\,z'(x)\,dx = \int\limits_{z(a)}^{z(b)} f(t)dt. \qquad (29)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для функции $f(x)$. Используем для левой части формулы (29) теорему о замене переменной в неопределённом интеграле и формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(z(x))\,z'(x)\,dx = [\int f(z(x))\,z'(x)\,dx]\Big|_a^b = [F(z(x))]\Big|_a^b = F(z(b)) - F(z(a)).$$

К правой части формулы (29) достаточно применить формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_{z(a)}^{z(b)} f(t)dt = [F(t)]\Big|_{z(a)}^{z(b)} = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Таким образом, левая часть формулы (29) равна её правой части, и тем самым справедливость формулы (29) доказана.

Замечание. Применяя формулу (29), мы переходим к новой переменной интегрирования (делаем подстановку $z(x) = t$). При этом меняется вид подынтегральной функции, изменяется дифференциал $dt = z'(x)\,dx$, изменяются пределы интегрирования (они теперь отраææàþ ò èçì åí åí èå ï åðåì åí í î é t). Воспользовавшись формулой (29), уже не нужно возвращаться к первоначальной переменной интегрирования x.

Приведём примеры замены переменной в определённом интеграле.

Пример 9.1. Вычислить $\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}dx$. Сделаем замену $t = x^2 + 1$.

Найдём $dt = (x^2+1)'dx = 2xdx$ и вычислим новые пределы интегрирования $t(1) = 2, t(3) = 10$. Тогда

$$\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'dx = \frac{1}{2}\int_2^{10}\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln t\Big|_2^{10} = \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln 5.$$

(Сравните с примером 7.9.)

Пример 9.2. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Сделаем замену $t = 1 - x^2$.

Найдём $dt = (1-x^2)'dx = -2xdx$ и новые пределы интегрирования $t(0) = 1, t(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Тогда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{4}}\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}2\sqrt{t}\Big|_1^{\frac{3}{4}} = -\sqrt{t}\Big|_1^{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

(Сравните с примером 8.4.)

Пример 9.3. Вычислить $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{x^8 + 2x^4 + 2}$. Сделаем замену $t = x^4$.

Найдём $dt = (x^4)'dx = 4x^3dx$ и вычислим $t(0) = 0, t(2) = 16$. Тогда

$$\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{x^8+2x^4+2} = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{(x^4)'\,dx}{x^8+2x^4+2} = \frac{1}{4}\int_0^{16}\frac{dt}{t^2+2t+2} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{16}\frac{dt}{(t+1)^2+1} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(t+1)\Big|_0^{16} = \frac{1}{4}(\operatorname{arctg}17 - \frac{\pi}{4}).$$

Пример 9.4. Вычислить $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 3}}$. Сделаем замену $t = \ln x$.

Найдём $dt = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$ и новые пределы интегрирования $t(e^2) = 2, t(e^3) = 3$. Тогда

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+3}} = \int_{e^2}^{e^3} \frac{(\ln x)'\,dx}{\sqrt{\ln^2 x+3}} = \int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+3}\right|\Big|_2^3 = \ln\frac{3+\sqrt{12}}{2+\sqrt{7}}.$$

Пример 9.5. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+9}}$. Сделаем замену $t=\operatorname{tg} x$. Найдём $dt=(\operatorname{tg} x)'dx=\frac{dx}{\cos^2 x}$ и новые пределы интегрирования $t(0)=\operatorname{tg} 0=0, t(\frac{\pi}{4})=1$. Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+9}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x)'\,dx}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+9}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x\ d\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+9}}=$$

$$=\int\limits_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+9}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{(t^2+9)'\,dt}{\sqrt{t^2+9}}.$$

Снова введём новую переменную $z=t^2+9$, найдём $dz=2tdt$ и поменяем пределы интегрирования: $z(0)=9,\ z(1)=10$. Получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{(t^2+9)'\,dt}{\sqrt{t^2+9}}=\frac{1}{2}\int\limits_9^{10} \frac{dz}{\sqrt{z}}=\sqrt{z}\Big|_9^{10}=\sqrt{10}-3.$$

Пример 9.6. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$. Сделаем замену $t=\sin x$. Найдём $dt=(\sin x)'dx=\cos x\,dx$ и вычислим новые пределы интегрирования $t(0)=\sin 0=0, t(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x\cos x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1-\sin^2 x)(\sin x)'\,dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-t^2}{t^{\frac{3}{5}}}dt=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (t^{-\frac{3}{5}}-t^{\frac{7}{5}})dt=[\frac{5}{2}t^{\frac{2}{5}}-\frac{5}{12}t^{\frac{12}{5}}]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt[5]{\frac{3}{4}}-\frac{5}{12}\frac{3}{4}\sqrt[5]{\frac{3}{4}}=\frac{35}{16}\sqrt[5]{\frac{3}{4}}.$$

Пример 9.7. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+16}dx$. Сделаем замену $t=e^x$.

Найдём $dt=(e^x)'dx=e^x\,dx$ и новые пределы интегрирования: $t(0)=e^0=1, t(1)=e$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+16}dx=\int\limits_0^1 \frac{(e^x+1)(e^x)'}{e^{2x}+16}dx=\int\limits_1^e \frac{t+1}{t^2+16}dt=$$

$$=\int\limits_1^e \frac{t}{t^2+16}dt+\int\limits_1^e \frac{1}{t^2+16}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+16)\Big|_1^e+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}\Big|_1^e=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(e^2+16)-\frac{1}{2}\ln 17+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{4}.$$

Пример 9.8. Вычислить $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Сделаем замену

$$x=2\sin t \tag{30}$$

и найдём $dx=(2\sin t)'dt=2\cos t dt$. Чтобы найти новые пределы интегрирования, нужно решить два уравнения, которые получатся, если в (30) подставить исходные пределы интегрирования $x=0$ и $x=2$ соответственно. Таким образом, решая уравнения $2\sin t=0$ и $2\sin t=2$, получим значения нижнего $t=0$ и верхнего $t=\frac{\pi}{2}$ пределов интегрирования. Окончательно

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = 2(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

1.10. Несобственные интегралы

Расширим понятие определённого интеграла.

1.10.1. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \ge a$ и интегрируема на каждом конечном промежутке $[a, A]$ $(A > a)$. Рассмотрим предел

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx. \tag{31}$$

Его называют ***интегралом функции*** $f(x)$ ***в пределах от*** a ***до*** $+\infty$ или ***несобственным интегралом II рода***, и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{32}$$

Таким образом,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Если предел (31) существует и конечен, то говорят, что интеграл (32) существует или ***сходится***. Функцию $f(x)$ при этом называют интегрируемой на промежутке $[a, +\infty)$. Если же рассматриваемый предел (31) не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл (32) не существует, или ***расходится***.

Пример 10.1

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 10.2

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^A = \lim_{A\to+\infty} (-\frac{1}{A}+1) = 1.$$

Пример 10.3

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln x\Big|_2^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln A - \ln 2) = +\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, b]$ и интегрируема на любом конечном промежутке $[B, b]$ $(B < b)$. ***Несобственным интегралом II рода***, или ***интегралом функции*** $f(x)$ ***в пределах от*** $-\infty$ ***до b***, называется

$$\lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)dx. \tag{33}$$

Этот интеграл обозначается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx. \tag{34}$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)dx.$$

Если предел (33) существует и конечен, то говорят, что интеграл (34) существует или ***сходится***. Функцию $f(x)$ при этом называют интегрируемой на промежутке $(-\infty, b]$. В противном случае говорят, что несобственный интеграл (34) не существует, или ***расходится***.

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и интегрируема на каждом промежутке $[B, A]$ $(B < A)$.

Тогда будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема на всей числовой оси и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (35)$$

где c – любое число, если оба интеграла в правой части (35) сходятся.

Вычисляя интегралы по бесконечным промежуткам, можно пользоваться формулой Ньютона – Лейбница. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке $[a, +\infty)$. Введём обозначение

$$F(+\infty) = \lim_{A\to+\infty} F(A),$$

если вычисляемый предел существует. Тогда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}.$$

Точно так же, если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке $(-\infty, b]$ и если положить

$$F(-\infty) = \lim_{B\to-\infty} F(B),$$

то справедлива запись

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}.$$

Тогда, если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Пример 10.4. Вычислить $\int_{0}^{+\infty} xe^{-2x}dx$.

Сначала вычислим $\int xe^{-2x}dx$, применяя интегрирование по частям. Положим $u = x$, $dv = \mathrm{e}^{-2x}dx$. Получим $du = dx$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

Тогда

$$\int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

Затем, применяя правило Лопиталя, найдём:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]\Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим по-прежнему функцию $f(x)$, интегрируемую на любом конечном промежутке. Пусть существует конечный предел вида

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

Этот предел называется ***главным значением*** интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и обозначается следующим образом:

$$\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

1.10.2. Несобственный интеграл от неограниченной функции

Рассмотрим теперь конечный промежуток $[a, b]$, на котором функция $f(x)$ не ограничена.

Пусть функция $f(x)$ задана, ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, но в точке $x = b$ функция $f(x)$ является бесконечно большой, т. е. $\lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (36)$$

Этот предел называется ***несобственным интегралом функции*** $f(x)$ ***от a до b***, или ***несобственным интегралом I рода***, и обозначается как обычно:

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{37}$$

Если предел (36) существует и конечен, то говорят, что интеграл (37) существует, или ***сходится***, а функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$. Если предел (36) бесконечен или не существует, то говорят, что интеграл (37) не существует, или ***расходится***.

Пример 10.5

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}(-2\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon\to+0}(-2\sqrt{\varepsilon}+2) = 2.$$

Пример 10.6

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ задана, ограничена и интегрируема на любом отрезке$[a+\varepsilon,b]$ $(\varepsilon>0)$, но в точке $x=a$ функция $f(x)$ является бесконечно большой, т. е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$. Тогда несобственный интеграл функции $f(x)$ в пределах от *a до b* определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{38}$$

Если предел, стоящий в правой части (38), существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл существует, или ***сходится***, а функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$. Если же предел бесконечен или не существует, то говорят, что интеграл не существует, или ***расходится***.

Пример 10.7

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\ln\varepsilon)=\infty.$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл расходится.

Теперь рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ определена, ограничена и интегрируема в промежутках $[a,c)$ и $(c,b]$ и является бесконечно большой в точке $x=c$, т. е. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$. Тогда несобственный интеграл функции $f(x)$ в пределах от *a* до *b* определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \tag{39}$$

Если оба предела в правой части (39) существуют и конечны при стремлении к нулю ε_1 и ε_2 $(\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0)$ произвольно и независимо друг от друга, то несобственный интеграл ***сходится***. В противном случае он ***расходится***. Сравнивая (36), (38) и (39), видим, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{40}$$

Несобственный интеграл в левой части (40) сходится, если сходятся оба несобственных интеграла в правой части. Если хотя бы один из интегралов справа расходится, то расходится и исходный интеграл слева.

Главным значением несобственного интеграла функции $f(x)$ от *a* до *b* в этом случае называется конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right),$$

если он существует. Главное значение обозначается так:

$$\mathrm{V.p.}\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 10.8. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2-4}dx$$

или доказать, что он расходится.

Решение. Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв внутри промежутка интегрирования при $x = 2$. Согласно определению

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2-4}dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_0^{2-\varepsilon_1}\frac{x}{x^2-4}dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{2+\varepsilon_2}^3\frac{x}{x^2-4}dx.$$

Рассмотрим каждый из двух пределов отдельно:

а) $$\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_0^{2-\varepsilon_1}\frac{x}{x^2-4}dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|\Big|_0^{2-\varepsilon_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon_1\to+0}\ln\left|-4\varepsilon_1+\varepsilon_1^2\right| - \frac{1}{2}\ln 4 = -\infty;$$

б) $$\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{2+\varepsilon_2}^3\frac{x}{x^2-4}dx = \lim_{\varepsilon_2\to+0}\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|\Big|_{2+\varepsilon_2}^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon_2\to+0}\ln\left|4\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\right| = +\infty.$$

В итоге рассматриваемый интеграл расходится. Но он сходится в смысле главного значения. Действительно,

$$\mathrm{V.p.}\int_0^3\frac{x}{x^2-4}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^{2-\varepsilon}\frac{x}{x^2-4}dx + \int_{2+\varepsilon}^3\frac{x}{x^2-4}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 2 + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\varepsilon^2-4\varepsilon}{\varepsilon^2+4\varepsilon}\right| = \ln\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\varepsilon-4}{\varepsilon+4}\right| = \ln\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Пример 10.9. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^3 x}$$

или доказать его расходимость.

Решение. С помощью правила Лопиталя вычислим $L = \lim\limits_{x\to+0} x\ln^3 x$.

$$L = \lim_{x\to+0}\frac{\ln^3 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -3\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = -3\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= 6\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 6\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 0.$$

Следовательно, подынтегральная функция является бесконечно большой при $x\to+0$. Согласно определению

$$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^3 x}.$$

Вычислим $\int_\varepsilon^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^3 x}$, сделав замену $z=\ln x$. Тогда $dz = \frac{1}{x}dx, z(\varepsilon) = \ln\varepsilon, z(\frac{1}{e}) = -1$. Получим:

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \int_{\ln\varepsilon}^{-1}\frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{2z^2}\Big|_{\ln\varepsilon}^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln^2\varepsilon}.$$

В результате

$$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\ln^2\varepsilon} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 10.10. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^2\frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$$

или доказать его расходимость.

Решение. Подынтегральная функция является бесконечно большой при $x\to 2-0$. Согласно определению

$$\int_0^2\frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}.$$

Вычислим $\int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$, сделав замену переменной $z^2 = 2 - x\ (z > 0)$. Найдём $dx = -2zdz$ и новые пределы интегрирования $z(0) = \sqrt{2},\ z(2-\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда

$$\int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} = -2\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{zdz}{(1+z^2)z} = -2\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{dz}{(1+z^2)} = -2\,\mathrm{arctg}\, z\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\varepsilon}} =$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\varepsilon}.$$

В итоге

$$\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2} - 2\lim_{\varepsilon\to+0}\mathrm{arctg}\sqrt{\varepsilon} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2}.$$

Пример 10.11. Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \ln x dx$$

или доказать его расходимость.

Решение. Подынтегральная функция стремится к $-\infty$ при стремлении переменной x к нулю справа. Согласно определению

$$\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^1 \ln x dx.$$

Применим метод интегрирования по частям, выбрав $u = \ln x,\ dv = dx$, и вычислим

$$\int\limits_{\varepsilon}^1 \ln x dx = (x\ln x)\Big|_{\varepsilon}^1 - \int\limits_{\varepsilon}^1 dx = -\varepsilon\ln\varepsilon - x\Big|_{\varepsilon}^1 = -\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon.$$

Вычисляя предел полученного выражения, воспользуемся правилом Лопиталя. Тогда

$$\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 = -1.$$

Глава 2. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

2.1. Общий подход к приложениям определённого интеграла

Прежде чем использовать определённый интеграл для нахождения неизвестных величин в области геометрии, механики и физики, изложим общий подход к решению прикладных задач с применением определённого интеграла. Отметим, что при этом обобщаются рассуждения, изложенные нами при вычислении площади криволинейной трапеции.

Пусть нужно найти значение некоторой величины G, являющейся функцией промежутка $[a,b]$. При этом предполагается, что если $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]\ \ (a < c < b)$, то значение G для промежутка $[a,b]$ равно сумме значений G для промежутков $[a,c]$ и $[c,b]$. Для вычисления величины G выполним следующие действия:

1. Выделим внутри отрезка $[a,b]$ элементарный отрезок $[x, x+\Delta x]$, где Δx – бесконечно малая величина. Пусть ΔG – значение величины G для промежутка $[x, x+\Delta x]$, а dG – значение, удовлетворяющее условию

$$\Delta G = dG + o(\Delta x), \tag{41}$$

где $o(\Delta x)$ – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем $\Delta x = dx$. Назовём dG ***бесконечно малым элементом*** величины G.

2. Исходя из условий задачи, составим формулу для вычисления бесконечно малого элемента dG:

$$dG = g(x)dx, \tag{42}$$

«пожертвовав» величинами более высокого порядка малости, чем $dx = \Delta x$.

3. Вычислим величину G, интегрируя равенство (42) на промежутке $[a,b]$. Тогда

$$G = \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{43}$$

Замечание. Во всех последующих задачах будем сразу выражать бесконечно малый элемент вычисляемой величины точным равенством вида (42). Тот факт, что при его вычислении исключались величины более высокого порядка, чем $dx = \Delta x$, оставляем всюду без доказательства.

2.2. Геометрические приложения определённого интеграла

2.2.1. Вычисление площадей

А. Площадь F криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ $(a < b,\ f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b])$ вычисляется по формуле

$$F = \int_a^b f(x)dx. \qquad (44)$$

Она получена так. Выделяем промежуток $[x, x+dx]$. Ему соответствует элемент площади ΔF, заштрихованный на рис. 7. В качестве бесконечно малого элемента dF возьмём площадь прямоугольника с шириной dx и высотой $f(x)$. Тогда

$$dF = f(x)dx. \qquad (45)$$

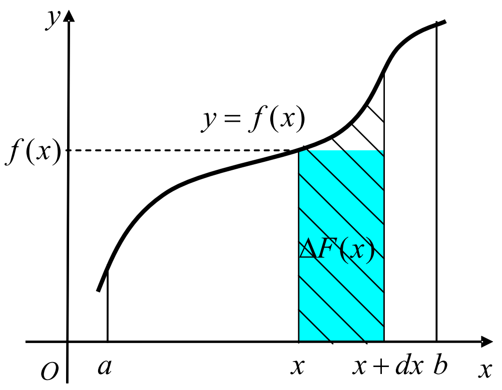

Рис. 7

Затем интегрируем равенство (45) на промежутке $[a,b]$ и получаем формулу (44). Заметим здесь, что формула (44) справедлива также в силу геометрического смысла определённого интеграла.

Пример 2.1.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x = 9$ (рис. 8).

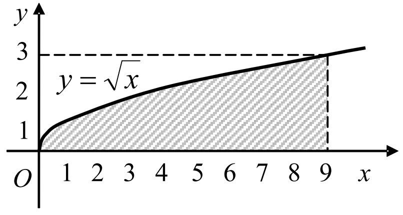

Рис. 8

Решение. Данная фигура является криволинейной трапецией. Её площадь вычисляется по формуле

$$F = \int_0^9 \sqrt{x}dx,$$

откуда

$$F = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^9 = \frac{2}{3}\cdot 27 = 18.$$

Пример 2.1.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 2^x$, $x = -1$, $x = 2$ (рис. 9).

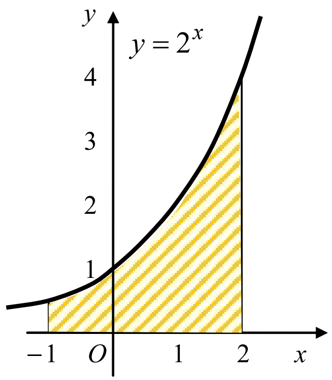

Рис. 9

Решение. Данная фигура является криволинейной трапецией. Её площадь вычисляется по формуле

$$F = \int_{-1}^{2} 2^x dx,$$

откуда

$$F = \frac{1}{\ln 2}2^x\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{\ln 2}(4 - \frac{1}{2}) = \frac{7}{2\ln 2}.$$

Пример 2.1.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \ln x$, $x = 3$ (рис. 10).

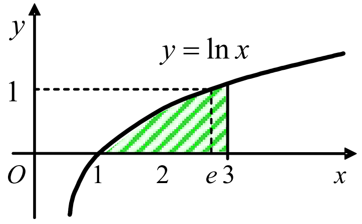

Рис. 10

Решение. Рассматриваемая фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции $y = \ln x$, а слева и справа – прямыми $x = 1$, $x = 3$ соответственно. Её площадь вычисляется по формуле

$$F = \int_1^3 \ln x dx.$$

Используем формулу интегрирования по частям и получим:

$$F = \int_1^3 \ln x dx = (x \ln x)\Big|_1^3 - \int_1^3 dx = 3\ln 3 - 2.$$

Пример 2.1.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = |\ln x|$, $x = e^{-2}$, $x = e$ (рис. 11).

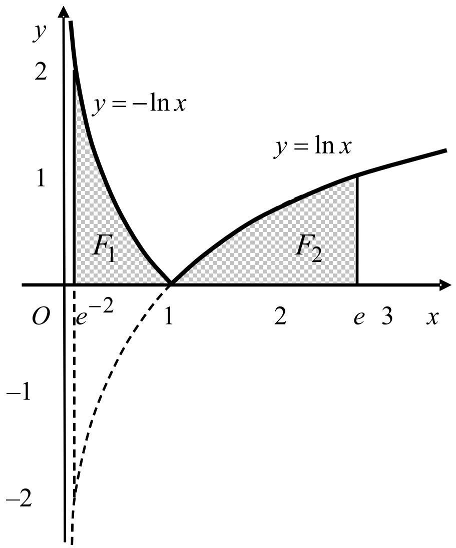

Рис. 11

Решение. Площадь заданной фигуры следует рассматривать как сумму площадей двух криволинейных трапеций. Пусть F_1 – площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = e^{-2}$, $x = 1$, $y = 0$, $y = -\ln x$, а F_2 – площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = 1$, $x = e$, $y = 0$, $y = \ln x$. Тогда площадь всей фигуры

$$F = F_1 + F_2,$$

где $F_1 = \int_{e^{-2}}^{1} (-\ln x) dx$, $F_2 = \int_1^e \ln x dx$.

Вычисляем интегралы, используя формулу интегрирования по частям.

$$F_1 = \int_{e^{-2}}^{1} (-\ln x) dx = -\int_{e^{-2}}^{1} \ln x dx = -(x \ln x - x)\Big|_{e^{-2}}^{1} =$$

$$= -(-1) + e^{-2}(-2) - e^{-2} = -3e^{-2} + 1.$$

$$F_2 = \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x)\Big|_1^e = e - e - (-1) = 1.$$

Итак, $F = F_1 + F_2 = 2 - 3e^{-2}$.

Пример 2.1.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \sin\dfrac{x}{2}$, $x = 0$, $x = 2\pi$ (рис. 12).

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления площади криволинейной трапеции. Тогда

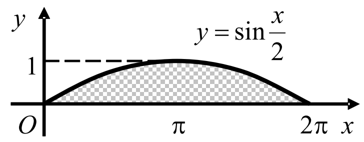

Рис. 12

$$F = \int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{2} dx = -2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} = -2(\cos\pi - \cos 0) = 4.$$

Пример 2.1.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \operatorname{tg} x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ (рис. 13).

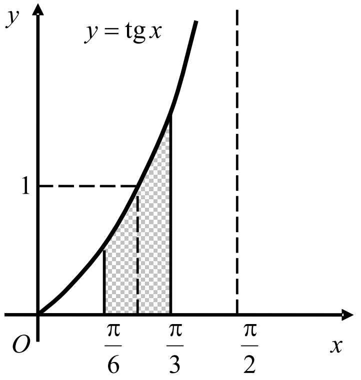

Рис. 13

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления площади криволинейной трапеции.

$$F = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -(\ln\cos\frac{\pi}{3} - \ln\cos\frac{\pi}{6}) = -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Пример 2.1.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \operatorname{arctg} x$, $x = -1$, $x = 1$ (рис. 14).

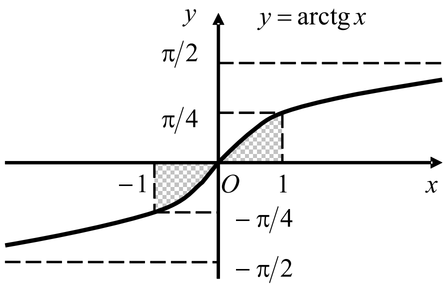

Рис. 14

Решение. Рассматриваемая фигура симметрична относительно начала координат. Поэтому её площадь F можно вычислить по формуле

$$F = 2F_0,$$

где F_0 – площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \operatorname{arctg} x$, т. е.

$$F_0 = \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$$

Для вычисления интеграла применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$ и найдём $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Тогда

$$F_0 = \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Введём новую функцию $z = 1 + x^2$. Заметим, что $dz = 2xdx$, $z(0) = 1$, $z(1) = 2$. Получим:

$$F_0 = \operatorname{arctg} 1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln|z|\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

В итоге

$$F = 2(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2) = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

Пример 2.1.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной координатными осями и правой верхней четвертью эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

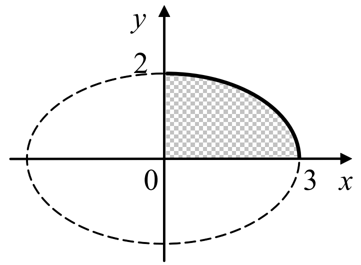

Рис. 15

Решение. Рассматриваемая фигура (рис. 15) является криволинейной трапецией, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, $x = 0$, $x = 3$. Её площадь вычисляется по формуле

$$F = \frac{2}{3}\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx.$$

Чтобы вычислить интеграл, используем замену переменной $x = 3\sin t$ $(t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. Тогда $dx = 3\cos t dt$ и $\sqrt{9 - x^2} = 3\cos t$. Значению $x = 0$ соответствует значение $t = 0$, а значению $x = 3$ соответствует значение $t = \frac{\pi}{2}$. Получаем:

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \frac{9}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{4}.$$

Окончательно

$$F = \frac{3\pi}{2}.$$

Б. Рассмотрим фигуру, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \le f_2(x)$ при $x \in [a, b])$. Она изображена на рис. 16.

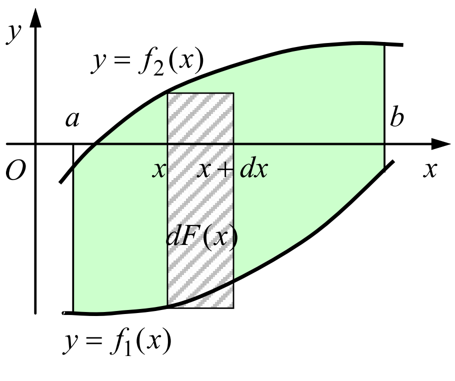

Рис. 16

Вычислим её площадь. За бесконечно малый элемент площади примем площадь заштрихованной полоски шириной dx и высотой, равной $f_2(x) - f_1(x)$.

Тогда

$$dF = (f_2(x) - f_1(x))dx,$$

$$F = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

Пример 2.1.9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - 3$, $y = (x - 1)^2$.

Решение. Найдем точки пересечения прямой и параболы и построим заданную фигуру (рис. 17).

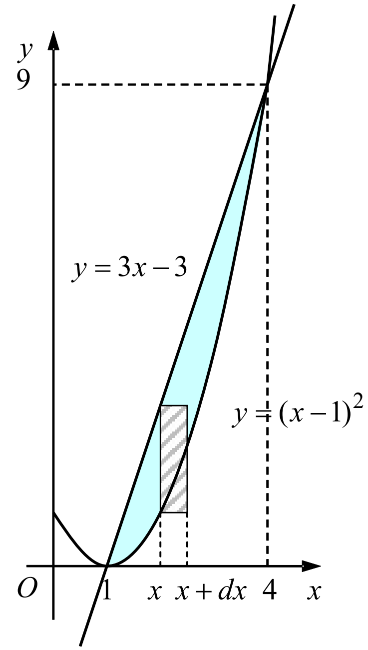

Рис. 17

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 3x - 3; \\ y = (x - 1)^2. \end{cases}$$

Она равносильна системе

$$\begin{cases} y = 3(x - 1); \\ (x - 1)^2 - 3(x - 1) = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 3(x - 1); \\ (x - 1)(x - 4) = 0, \end{cases} \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1; \\ y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4; \\ y = 9. \end{cases} \end{array}\right.$$

Определим dF – бесконечно малый элемент вычисляемой площади. Он равен площади прямоугольника, заштрихованного на рис. 17, т. е.

$$dF = [(3x-3)-(x-1)^2]dx = (-x^2+5x-4)dx.$$

Интегрируем его в пределах изменения переменной x от 1 до 4 и получаем искомую площадь:

$$F = \int_1^4 (-x^2+5x-4)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \left(-\frac{64}{3}+40-16\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right) = \frac{9}{2}.$$

Пример 2.1.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2+4x,\ x+y=6.$

Решение. Построим заданную фигуру (рис. 18).

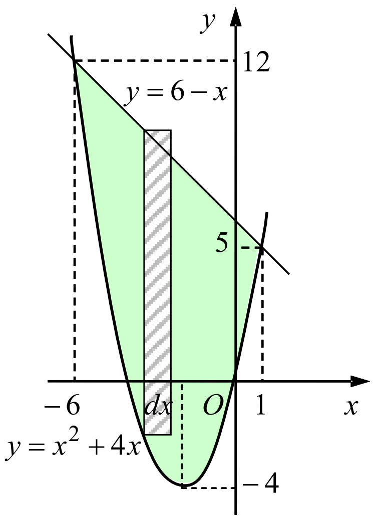

Рис. 18

Найдём точки пересечения указанных в условии линий. Решим для этого систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2+4x; \\ x+y=6. \end{cases}$$

Она равносильна системе

$$\begin{cases} x^2+5x-6=0; \\ y=6-x, \end{cases} \text{откуда} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1; \\ y=5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6; \\ y=12. \end{cases} \end{array}\right.$$

Бесконечно малый элемент dF вычисляемой площади равен площади прямоугольника, заштрихованного на рис. 18, т. е.

$$dF = [(6-x)-(x^2+4x)]dx = (-x^2-5x+6)dx.$$

Искомую площадь получаем, проинтегрировав полученный результат в пределах изменения переменной x от –6 до 1. Тогда

$$F = \int_{-6}^{1} (-x^2-5x+6)dx = \left(-\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_{-6}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+6-(72-90-36) = \frac{343}{6}.$$

Пример 2.1.11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=0,\ x=1,\ y=x+1,$ $y=\arccos x-1.$

Решение. Построим заданную фигуру (рис. 19).

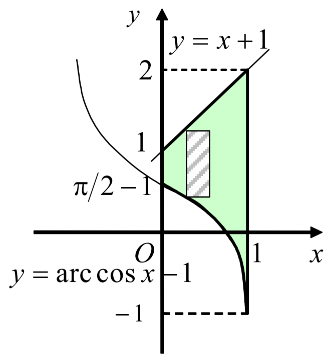

Рис. 19

Бесконечно малый элемент dF искомой площади равен площади заштрихованного на рис. 19 прямоугольника и вычисляется по формуле

$$dF = [(x+1)-(\arccos x-1)]dx = (x+2-\arccos x)dx.$$

Тогда

$$F=\int_0^1 (x+2-\arccos x)dx=\left.\frac{(x+2)^2}{2}\right|_0^1-\int_0^1 \arccos x dx=\frac{9}{2}-2-\int_0^1 \arccos x dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, вычисляем, пользуясь приёмом интегрирования по частям, выбрав $u=\arccos x; dv=dx$. Тогда

$$\int_0^1 \arccos x dx=x\arccos x\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Осуществим теперь замену переменной. Пусть $z=1-x^2$. Тогда $dz=-2xdx,\ z(0)=1,\ z(1)=0$ и

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z}}=\sqrt{z}\Big|_0^1=1.$$

Итак,

$$F=\frac{9}{2}-2-1=\frac{3}{2}.$$

Пример 2.1.12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=xe^{-x}$, $y=1-e^{x}$, $x=2$.

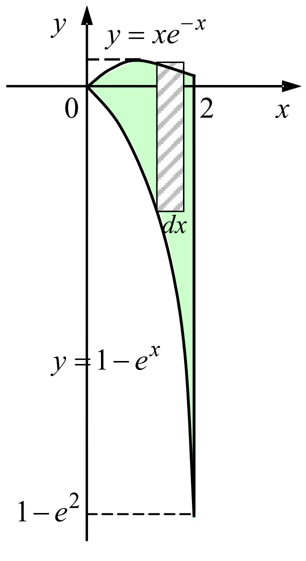

Рис. 20

Решение. Построим заданную фигуру (рис. 20).

График функции $y=xe^{-x}$ имеет в точке $x=1$ максимум, равный $\frac{1}{e}$, а в точке $x=2$ – перегиб, причём $y(2)=\frac{2}{e^2}$.

Бесконечно малый элемент dF искомой площади равен площади заштрихованной вертикальной полосы. На рис. 20 это прямоугольник шириной dx и высотой $xe^{-x}-(1-e^{x})$. Тогда

$$dF=(xe^{-x}-(1-e^{x}))dx.$$

$$F=\int_0^2 (xe^{-x}-1+e^{x})dx=\int_0^2 xe^{-x}dx-x\Big|_0^2+e^{x}\Big|_0^2=\int_0^2 xe^{-x}dx-2+e^2-e^0.$$

Для вычисления последнего интеграла используем формулу интегрирования по частям, выбрав $u=x,\ dv=e^{-x}dx$.

$$\int_0^2 xe^{-x}dx=(-xe^{-x})\Big|_0^2+\int_0^2 e^{-x}dx=-2e^{-2}-e^{-x}\Big|_0^2=$$

$$=-2e^{-2}-e^{-2}+e^{0}=-3e^{-2}+1.$$

Окончательно получаем

$$F=-3e^{-2}+1-2+e^2-1=-3e^{-2}+e^2-2.$$

Пример 2.1.13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^{x}$, $y=e^{2-x}$, $y=1-x^2$, $x=2$.

Решение. В данном случае верхняя граница фигуры и её левая и правая границы составлены из различных кривых (рис. 21).

Поэтому, чтобы применить стандартные рассуждения, фигуру следует расчленить на части. Рассматриваемая фигура является объединением фигур I и II, как показано на рис. 21. Площадь рассматриваемой фигуры представим как сумму двух площадей:

$$F=F_1+F_2.$$

Здесь F_1 – площадь фигуры I, ограниченной линиями $y=e^{x}$, $y=1-x^2$, $x=1$; F_2 – площадь фигуры II, ограниченной линиями $y=e^{2-x}$, $y=1-x^2$, $x=1$, $x=2$.

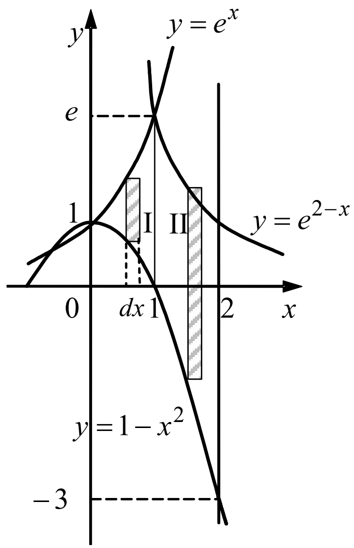

Рис. 21

Теперь можно применить стандартную схему. Вычислим бесконечно малые элементы площадей F_1 и F_2 (соответствующие вертикальные полоски показаны на чертеже):

$$dF_1 = (e^x - (1 - x^2))dx,$$

$$dF_2 = (e^{2-x} - (1 - x^2))dx.$$

Тогда

$$F_1 = \int_0^1 (e^x - (1 - x^2))dx = (e^x - x + \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = e - 1 + \frac{1}{3} - e^0 = e - \frac{5}{3}.$$

$$F_2 = \int_1^2 (e^{2-x} - (1 - x^2))dx = (-e^{2-x} - x + \frac{x^3}{3})\Big|_1^2 =$$

$$= -e^0 - 2 + \frac{8}{3} - (-e - 1 + \frac{1}{3}) = e + \frac{1}{3}.$$

В итоге

$$F = 2e - \frac{4}{3}.$$

В. Рассмотрим фигуру, ограниченную линиями $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ ($\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ при $y \in [c, d]$) (рис. 22).

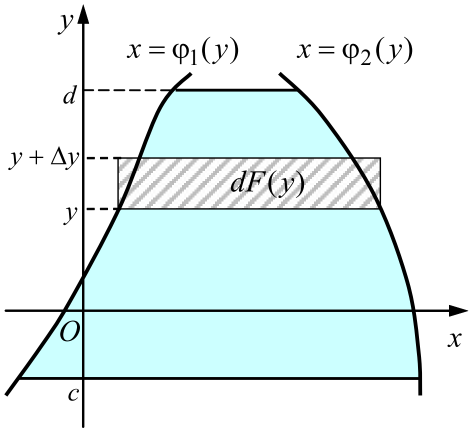

Рис. 22

Вычислим её площадь. За бесконечно малый элемент площади примем площадь заштрихованной полоски с высотой $\Delta y = dy$ и шириной, равной $\varphi_2(y) - \varphi_1(y)$. Тогда

$$dF = (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy,$$

$$F = \int_c^d \left(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\right)dy.$$

Пример 2.1.14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной правой ветвью гиперболы $x^2 - y^2 = 3$ и параболой $y^2 + x - 3 = 0$.

Решение. Построим заданные в условии кривые (рис. 23)

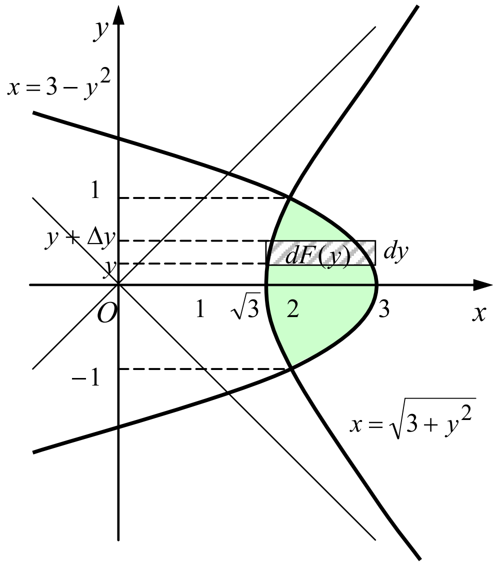

Рис. 23

и найдём их точки пересечения. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \; x > 0; \\ y^2 = 3 - x. \end{cases}$$

Она равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \quad x > 0; \\ y^2 = 3 - x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 2; \\ y^2 = 3 - x, \end{cases} \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2; \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2; \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассматриваемая фигура симметрична относительно оси Ox. Так что её площадь вычисляется по формуле

$$F = 2F_0,$$

где F_0 – площадь фигуры, ограниченной гиперболой, параболой и осью Ox.

Бесконечно малый элемент dF_0 искомой площади F_0 равен площади заштрихованной горизонтальной полосы (см. рис. 23) высотой $dy = \Delta y$. Чтобы найти длину полосы, выразим из уравнений границы фигуры переменную x как функцию y. Правая ветвь гиперболы есть график функции $x = \sqrt{y^2 + 3}$, а из уравнения параболы получаем $x = 3 - y^2$, откуда длина полосы равна $(3 - y^2) - \sqrt{y^2 + 3}$. Тогда

$$dF_0 = [(3 - y^2) - \sqrt{y^2 + 3}]dy.$$

$$F_0 = \int_0^1 [(3 - y^2) - \sqrt{y^2 + 3}]dy = (3y - \frac{y^3}{3})\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \sqrt{y^2 + 3}\, dy = \frac{8}{3} - \int_0^1 \sqrt{y^2 + 3}\, dy.$$

Интеграл, стоящий в правой части цепочки равенств, вычислен в примере 8.5.

$$\int_0^1 \sqrt{y^2 + 3}\, dy = 1 + \frac{3}{2} \ln \sqrt{3}.$$

Тогда

$$F_0 = \frac{8}{3} - 1 - \frac{3}{2} \ln \sqrt{3} = \frac{5}{3} - \frac{3}{4} \ln 3$$

и

$$F = \frac{10}{3} - \frac{3}{2} \ln 3.$$

Пример 2.1.15. Вычислить площадь фигуры, расположенной в правой полуплоскости и ограниченной линиями $x^2 + (y+1)^2 = 16$ и $y^2 + 2y + x - 15 = 0$.

Решение. Определим сначала тип заданных в условии линий. Линия, описываемая уравнением

$$x^2 + (y+1)^2 = 16,$$

представляет собой окружность радиусом 4 с центром в точке $(0; -1)$. Уравнение

$$y^2 + 2y + x - 15 = 0 \tag{46}$$

приведём к каноническому виду

$$(y+1)^2 = -(x - 16).$$

Получена парабола с осью симметрии $y = -1$, вершиной в точке $(16; -1)$ и направлением от директрисы к фокусу, противоположным направлению оси Ox. Обе кривые пересекают ось Oy в точках $(0; -5)$ и $(0; 3)$. Заданная фигура с искомой площадью F представлена на рис. 24 и обозначена II.

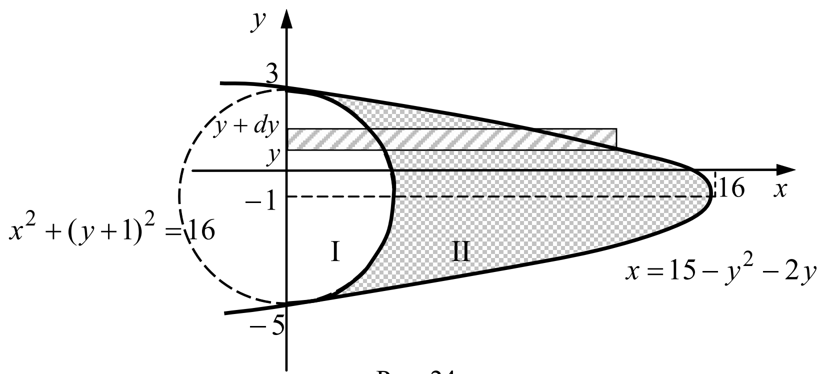

Рис. 24

Площадь фигуры I, являющейся полукругом радиусом 4, обозначим F_1. Так как площадь круга радиусом R вычисляется как πR^2, то $F_1 = 8\pi$.

Площадь фигуры, ограниченной параболой (46) и осью Oy, обозначим F_0.

Заметим, что площадь F данной фигуры II можно представить как разность площадей F_0 и F_1. Тогда

$$F = F_0 - 8\pi.$$

Вычисляем F_0. Бесконечно малый элемент dF_0 равен площади прямоугольника, заштрихованного на рис. 24, высотой dy и переменной длиной, которую найдём, выражая $x = 15 - y^2 - 2y$ из уравнения параболы (46). Таким образом,

$$dF_0 = (15 - y^2 - 2y)dy,$$

$$F_0 = \int_{-5}^{3}(15 - y^2 - 2y)dy = (15y - \frac{y^3}{3} - y^2)\Big|_{-5}^{3} =$$

$$= (45 - 9 - 9) - (-75 + \frac{125}{3} - 25) = \frac{256}{3}.$$

В итоге

$$F = \frac{256}{3} - 8\pi.$$

Пример 2.1.16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $x = y^2 - 2y$, $x = -y^2 - 4y$.

Решение. Построим заданную фигуру. Найдём точки пересечения парабол, решая уравнение $y^2 - 2y = -y^2 - 4y$, или $2y^2 + 2y = 0$. Его корни суть $y = 0$, $y = -1$. Заданные параболы пересекаются в точках $(0;\ 0)$ и $(3;\ -1)$. Рассматриваемая фигура представлена на рис. 25.

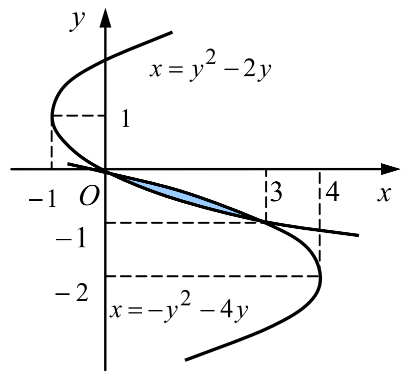

Рис. 25

Бесконечно малый элемент площади имеет вид

$$dF = [(-y^2 - 4y) - (y^2 - 2y)]dy\cdot$$

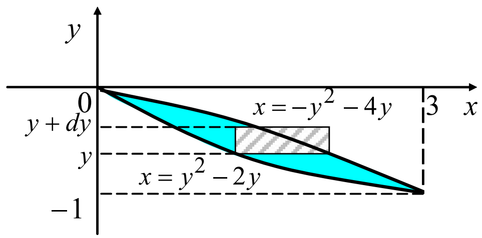

Рис. 26

На рис. 26 его изображает заштрихованная горизонтальная полоска. Итак,

$$dF = (-2y^2 - 2y)dy\cdot$$

Тогда

$$F = \int_{-1}^{0}(-2y^2 - 2y)dy = -2(\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2})\Big|_{-1}^{0} = 2(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}.$$

2.2.2. Вычисление объёма тела через площадь его сечения

Пусть тело в пространстве расположено между плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис. 27). Будем искать объём V этого тела.

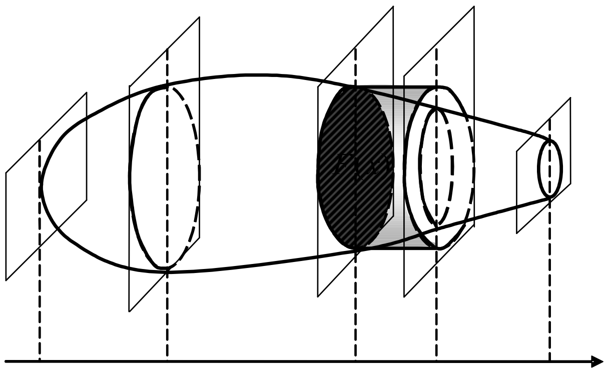

Рис. 27

Рассечём тело на слои в различных точках x $(a \le x \le b)$ плоскостями, перпендикулярными оси Ox. Пусть в каждой точке x известна площадь этого сечения $F(x)$. Она является функцией переменной x.

Выделим элемент объёма ΔV – объём тела, расположенного между параллельными плоскостями, проходящими через через точки x и $x + dx$ на оси Ox.

За бесконечно малый элемент искомого объёма dV примем объём бесконечно узкого цилиндра высотой dx и площадью основания $F(x)$. Тогда

$$dV = F(x)dx,$$

и объём тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b F(x)dx.$$

2.2.3. Вычисление объёма тела вращения

А. На рис. 28 показано тело, полученное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$.

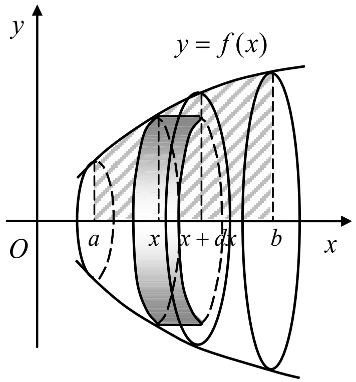

Рис. 28

Будем искать его объём. Обозначим его через V_x. Рассечём тело плоскостью, перпендикулярной оси Ox, в произвольной точке $x \in [a, b]$. Рассмотрим элемент объёма ΔV_x, полученный вращением криволинейной трапеции, опирающейся на отрезок $[x, x + dx]$ длиной dx. За бесконечно малый элемент объёма dV_x примем объём цилиндра с высотой dx и площадью основания, равной площади круга радиусом $f(x)$:

$$dV_x = \pi f^2(x)dx.$$

Тогда

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{47}$$

Пример 2.3.1. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной осью Ox и полуволной синусоиды ($y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$) (рис. 29).

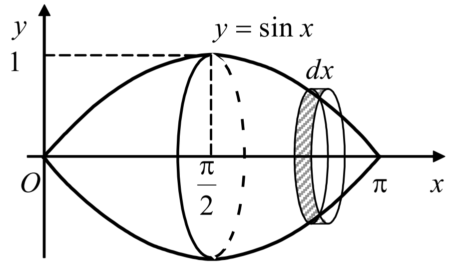

Рис. 29

Решение.

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Пример 2.3.2. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной кривой $y^2 + x = 2$ и прямой $x + 4 = 0$.

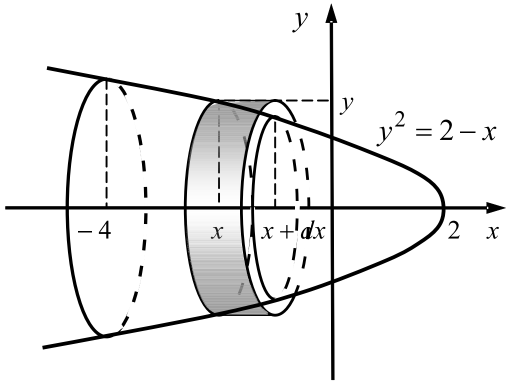

Рис. 30

Решение. Построим заданную в условии плоскую фигуру. Она ограничена параболой $y^2 = 2 - x$ и прямой $x = -4$. Будем вращать её вокруг оси Ox (рис. 30). Полученное тело вращения рассечём плоскостью, перпендикулярной оси Ox. В сечении получим круг площадью πy^2, где $y^2 = 2 - x$. Для вычисления искомого объёма воспользуемся формулой (47). Тогда

$$V_x = \pi \int_{-4}^{2} (2 - x) dx = \pi(2x - \frac{x^2}{2})\Big|_{-4}^{2} = \pi(4 - 2) - \pi(-8 - 8) = 18\pi.$$

Пример 2.3.3. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $xy = 8$; $y = 0$; $x = 8$.

Решение. Построим заданную в условии плоскую фигуру (рис. 31).

Эта криволинейная трапеция состоит из двух частей. Первая часть ограничена сверху параболой $y = x^2$, заключённой между прямыми $x = 0$ и $x = 2$, вторая часть – гиперболой $y = \frac{8}{x}$, отсечённой слева и справа прямыми $x = 2$ и $x = 8$.

Будем вращать фигуру вокруг оси Ox. Полученное тело вращения (рис. 32) будет иметь объём, состоящий из двух слагаемых:

$$V_x = V_1 + V_2.$$

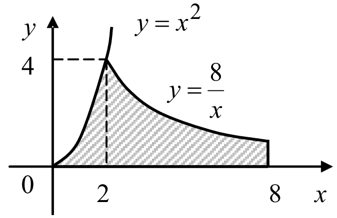

Рис. 31

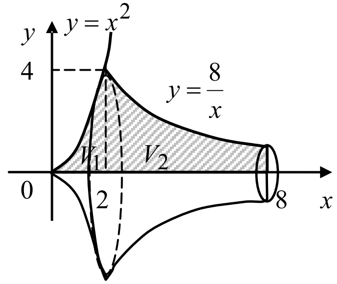

Рис. 32

Воспользуемся формулой (47). При вычислении V_1 возьмём $f(x) = x^2$, где $x \in [0; 2]$. Тогда

$$V_1 = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \pi \frac{32}{5}.$$

При вычислении V_2 возьмём $f(x) = \frac{8}{x}$, где $x \in [2; 8]$. Тогда

$$V_2 = \pi \int_2^8 \left(\frac{8}{x}\right)^2 dx = 64\pi \int_2^8 \frac{dx}{x^2} = -\frac{64\pi}{x}\Big|_2^8 = -\pi(\frac{64}{8} - \frac{64}{2}) = 24\pi.$$

В итоге получим

$$V_x = V_1 + V_2 = \frac{32\pi}{5} + 24\pi = \frac{152}{5}\pi = 30{,}4\pi.$$

Б. Пусть тело получено вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = c$, $y = d$, $x = 0$, $x = \varphi(y)$ (рис. 33). Обозначим его объём через V_y и будем искать этот объём. Рассечём тело плоскостью, перпендикулярной оси Oy. Бесконечно малый элемент dV_y вычисляется как объём цилиндра, полученного вращением вокруг оси Oy прямоугольника с основанием $[y, y + dy]$ и высотой $\varphi(y)$. Это цилиндр высотой dy, основанием которого является круг радиусом $\varphi(y)$. Тогда

$$dV_y = \pi\varphi^2(y)dy.$$

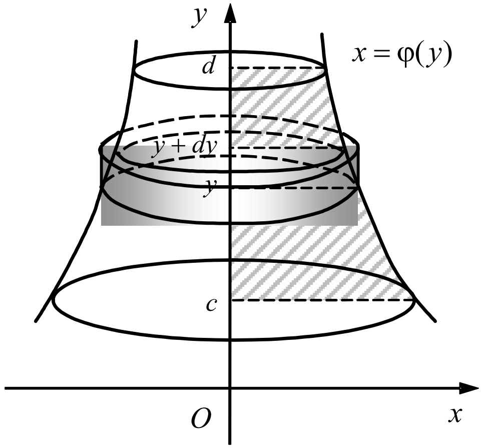

Рис. 33

Проинтегрируем это равенство по промежутку $[c, d]$ и получим

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy. \qquad (48)$$

Пример 2.3.4. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \operatorname{tg} x^2$; $y = \sqrt{3}$; $x = 0$.

Решение. Построим заданную плоскую фигуру.

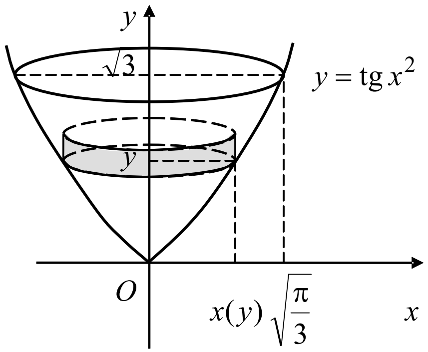

Рис. 34

Будем вращать её вокруг оси Oy (рис. 34). Полученное тело вращения рассечём плоскостью, перпендикулярной оси Oy. В сечении получим круг площадью πx^2, где $x^2 = \operatorname{arctg} y$. Для вычисления искомого объёма воспользуемся формулой (48). Тогда

$$V_y = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} y dy = \pi(y \operatorname{arctg} y \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{ydy}{1+y^2}) =$$

$$= \pi(\sqrt{3}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_0^{\sqrt{3}}) = \pi(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln 4) = \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} - \pi \ln 2.$$

Пример 2.3.5. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $\frac{y}{3} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $y = 3$.

Решение. Построим заданную плоскую фигуру. Будем вращать её вокруг оси Oy (рис. 35).

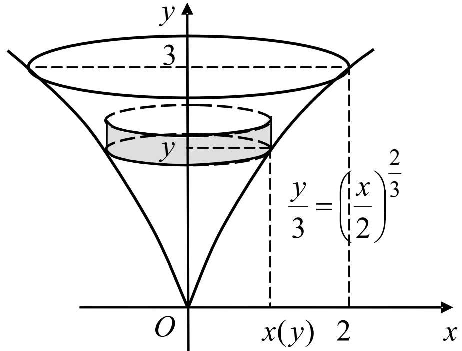

Рис. 35

Полученное тело вращения рассечём плоскостью, перпендикулярной оси Oy. В сечении получим круг. Для определения радиуса круга обратимся к заданной кривой

$$\frac{y}{3} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Возведём в куб левую и правую части уравнения и получим

$$\left(\frac{y}{3}\right)^3 = \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Отсюда выразим $x^2 = \frac{4}{27}y^3$ и площадь круга $\pi x^2 = \frac{4}{27}\pi y^3$.

Для вычисления искомого объёма воспользуемся формулой (48). Тогда

$$V_y = \pi \frac{4}{27}\int_0^3 y^3 dy = \pi \frac{y^4}{27}\Big|_0^3 = 3\pi.$$

В. Будем теперь вычислять объём тела вращения с полостью. Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную линиями $x = a, x = b$, $y = f_1(x), y = f_2(x)$ $(a < b, 0 \le f_1(x) \le f_2(x))$. Пусть тело получено вращением вокруг оси Ox этой плоской фигуры, заштрихованной на рис. 36.

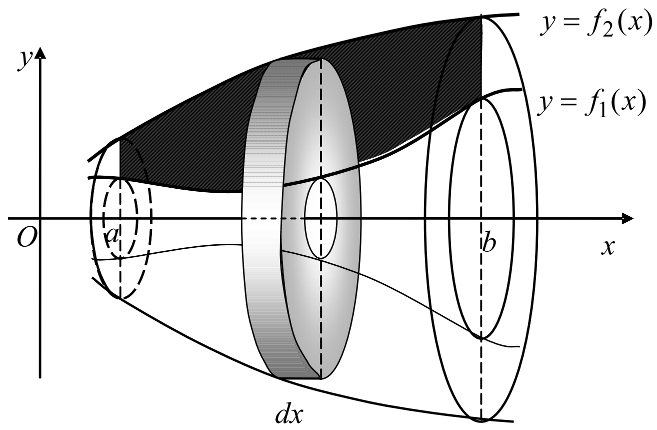

Рис. 36

Бесконечно малый элемент dV_x искомого объёма вычисляется как объём цилиндрического тела высотой dx, в основании которого кольцо площадью $\pi(f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x))$. Тогда

$$dV_x = \pi(f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x))dx; \tag{49}$$

$$V_x = \pi\int_a^b (f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x))dx. \tag{50}$$

Пусть тело получено вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = c, y = d, x = \varphi_1(y), x = \varphi_2(y)$, где $c < d, 0 \le$ $\le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ (на рис. 37 эта плоская фигура заштрихована).

Бесконечно малый элемент dV_y вычисляется как объём цилиндрического тела высотой dy и площадью основания, равной площади

кольца с внутренним радиусом $\varphi_1(y)$ и внешним радиусом $\varphi_2(y)$. Тогда

$$dV_y = \pi(\varphi_2{}^2(y) - \varphi_1{}^2(y))dy. \tag{51}$$

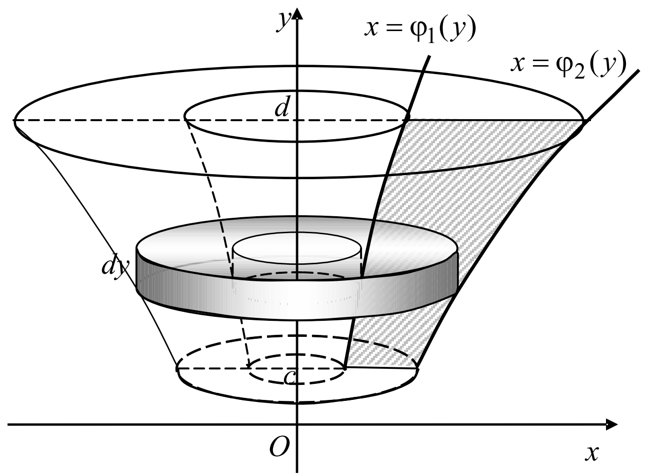

Рис. 37

Интегрируя полученный результат по переменной y от c до d, получим

$$V_y = \pi\int_c^d (\varphi_2{}^2(y) - \varphi_1{}^2(y))dy. \tag{52}$$

Пример 2.3.6. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2\cos x$; $y = \cos x$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Построим заданную плоскую фигуру (рис. 38). Заметим, что ось Oy является осью симметрии этой фигуры. Будем вращать фигуру вокруг оси Ox. Получим тело вращения с полостью. Рассечём его плоскостью, перпендикулярной оси Ox. В сечении получим кольцо с внутренним радиусом $y = \cos x$ и внешним радиусом

$y = 2\cos x$ и площадью $\pi((2\cos x)^2 - \cos^2 x) = 3\pi\cos^2 x$. В силу симметрии можно вычислять половину искомого объёма и удваивать результат. Для вычисления половины объёма воспользуемся формулой (50) для $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Тогда

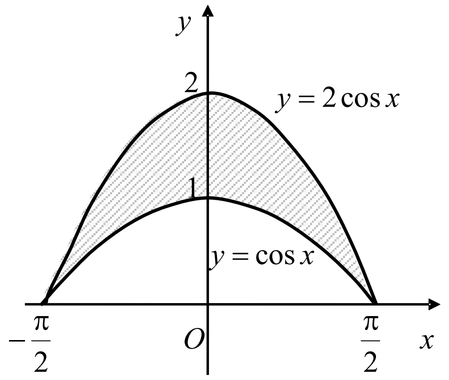

Рис. 38

$$\frac{1}{2}V_x = 3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx = \frac{3}{2}\pi(x + \frac{1}{2}\sin 2x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi^2}{4}.$$

Окончательно получаем

$$V_x = \frac{3\pi^2}{2}.$$

Пример 2.3.7. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 8x - 12$, $y = 0$.

Решение. Заданная кривая является параболой. Чтобы её построить, уравнение

$$y = -x^2 + 8x - 12 \tag{53}$$

приведём к каноническому виду:

$$y + x^2 - 8x + 16 - 16 + 12 = 0,$$

$$(x-4)^2 = -(y-4). \tag{54}$$

Получена парабола с осью симметрии $x = 4$, вершиной в точке (4; 4) и направлением от директрисы к фокусу, противоположным направлению оси Oy. Кривая пересекает ось Ox в точках $x = 2$ и $x = 6$. Заданная фигура заштрихована на рис. 39, *а*. Вращая её вокруг оси Oy, получим тело с полостью.

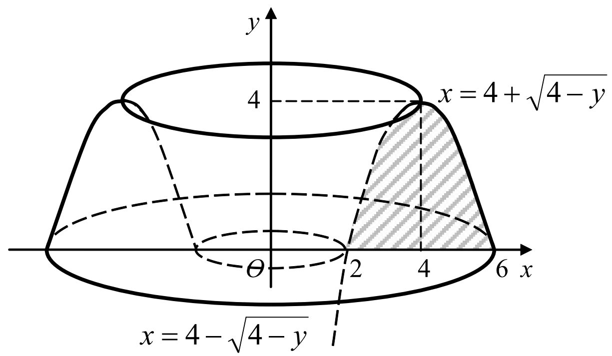

Рис. 39, *а*

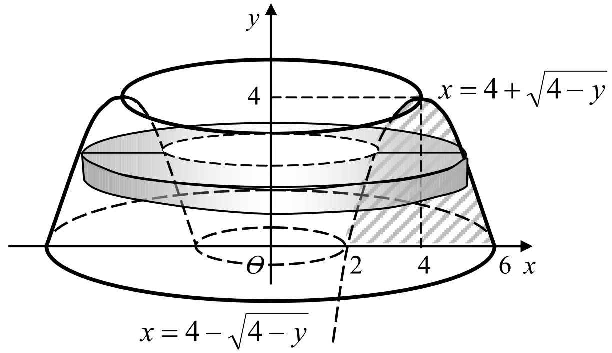

Рис. 39, *б*

Рассечём его плоскостью, перпендикулярной оси Oy. В сечении получим кольцо (рис. 39, *б*). Чтобы определить внутренний и внешний радиусы этого кольца, обратимся снова к заданной кривой. Из уравнения (54) найдём

$$x-4=\pm\sqrt{4-y},$$

т. е.

$$\left[\begin{aligned} x&=4+\sqrt{4-y};\\ x&=4-\sqrt{4-y}.\end{aligned}\right.$$

Очевидно, что первая функция задает внешний радиус кольца, а вторая – внутренний. Найдём бесконечно малый элемент искомого объёма по формуле (51):

$$dV_y=\pi((4+\sqrt{4-y})^2-(4-\sqrt{4-y})^2)dy=16\pi\sqrt{4-y}dy.$$

Для вычисления объёма проинтегрируем полученный результат по переменной $y\in[0;4]$. Тогда

$$V_y=16\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy=-32\pi\left.\frac{(4-y)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^4=\frac{256\pi}{3}.$$

Пример 2.3.8. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2$, $x=0$, $x=1$, $x=\sqrt{y-2}$.

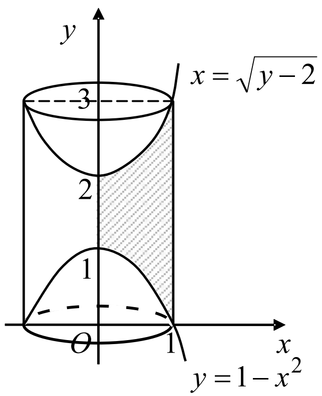

Рис. 40

Решение. Заданная фигура заштрихована на рис. 40. Справа она ограничена прямой $x=1$, а слева – тремя разными кривыми. Таким образом, тело вращения состоит из трёх частей.

Для $y\in[0;1]$ фигура ограничена слева параболой

$$y=1-x^2.$$

Приведём её к каноническому виду, выразив

$$x^2=1-y.$$

При вращении этой части фигуры вокруг оси Oy получится тело с полостью, и в сечении плоскостью, перпендикулярной оси Oy, мы получим кольцо площадью $\pi(1-(1-y))=\pi y$.

Для $y\in[1;2]$ объём тела равен объёму цилиндра постоянного радиуса $x=1$.

При $y\in[2;3]$ фигура ограничена слева линией

$$x=\sqrt{y-2}. \tag{55}$$

Возведём обе части уравнения (55) в квадрат:

$$x^2=y-2.$$

Вращая эту часть фигуры вокруг оси Oy, также получим тело с полостью, а в сечении плоскостью, перпендикулярной оси Oy, получим кольцо площадью $\pi(1-(y-2))=\pi(3-y)$.

Для каждой из трёх частей применим формулу (52) и получим:

$$V_y=\pi\int_0^1 ydy+\pi\int_1^2 1dy+\pi\int_2^3(3-y)dy=\pi\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1+\left.y\right|_1^2+\left.(3y-\frac{y^2}{2})\right|_2^3\right)=$$

$$=\pi(\frac{1}{2}+2-1+9-\frac{9}{2}-6+2)=2\pi.$$

2.2.4. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть кривая описывается уравнением $y=f(x)$ (рис. 41). Рассмотрим дугу этой кривой при $x\in[a,b]$. Обозначим длину этой дуги через S. Предположим, что на промежутке $[a,b]$ существует непрерывная производная $f'(x)$.

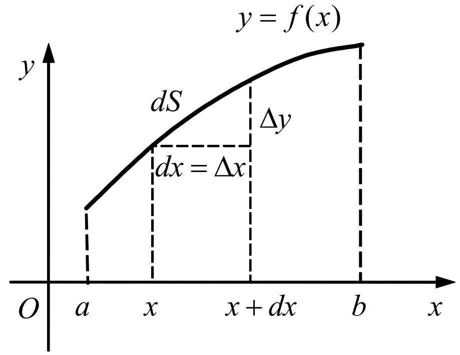

Рис. 41

Чтобы вычислить длину дуги, выделим на дуге элементарный участок, соответствующий изменению аргумента x на промежутке $[x, x+dx]$. Обозначим бесконечно малый элемент длины дуги через dS. Вычислим dS, заменив бесконечно малую дугу её хордой, величину Δy – величиной dy и применив теорему Пифагора.

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad (56)$$

или

$$dS = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \qquad (57)$$

Тогда

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Замечание. Если дуга кривой описана уравнением $x = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$, то из формулы (56) получим

$$dS = \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\,dy \qquad (58)$$

и

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\,dy.$$

Если же дуга описывается параметрически:

$$\begin{cases} x = \omega(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$
$$t \in (\alpha, \beta),$$

то

$$dS = \sqrt{(\omega'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \qquad (59)$$

и

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\omega'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

Пример 2.4.1. Определить длину дуги кривой $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, отсечённой прямой $x = 3$.

Решение. Заданная дуга CAB изображена на рис. 42. Обозначим её длину через S. Дуга CAB составлена из двух дуг одинаковой дли-

ны: дуги AB и дуги AC. Найдём бесконечно малый элемент длины дуги AB. Эта дуга описывается уравнением

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{3}{2}},$$

где $x \in [1; 3]$. Воспользуемся формулой (57). Вычислим предварительно

$$y' = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}.$$

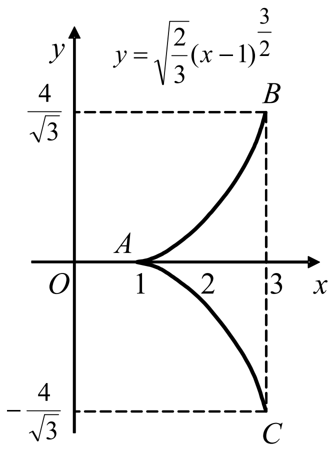

Рис. 42

Тогда

$$(y')^2 = \frac{3}{2}(x-1)$$

и

$$dS = \sqrt{1 + \frac{3}{2}(x-1)}\,dx = \sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}\,dx.$$

Таким образом,

$$S = 2\int_1^3 \sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}\,dx = 2 \cdot \frac{2}{3}\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}\right)^3\Bigg|_1^3 = \frac{8}{9}(8-1) = \frac{56}{9}.$$

Пример 2.4.2. Вычислить длину дуги параболы $y^2 = 4x$ от вершины до точки $A(4; 4)$ (рис. 43).

Решение. Заданная дуга OA описывается уравнением

$$x = \frac{y^2}{4},$$

где $y \in [0; 4]$. Бесконечно малый элемент длины этой дуги будем искать по формуле (58). Найдём сначала

$$x' = \frac{y}{2}.$$

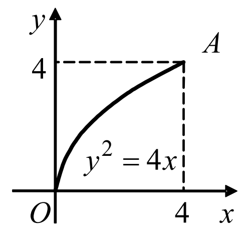

Рис. 43

Тогда

$$dS = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{4 + y^2}\, dy$$

и

$$S = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4 + y^2}\, dy.$$

При вычислении этого интеграла используем приём интегрирования по частям для того, чтобы свести его к себе самому. Положим

$u = \sqrt{4 + y^2}$, $dv = dy$. Найдём $du = \dfrac{y dy}{\sqrt{y^2 + 4}}$, $v = y$. Тогда

$$\int_0^4 \sqrt{4 + y^2}\, dy = y\sqrt{4 + y^2}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{y^2 dy}{\sqrt{4 + y^2}} =$$

$$= 4\sqrt{20} - \int_0^4 \frac{y^2 + 4}{\sqrt{4 + y^2}}\, dy + \int_0^4 \frac{4dy}{\sqrt{4 + y^2}} =$$

$$= 4\sqrt{20} - \int_0^4 \sqrt{4 + y^2}\, dy + 4\ln\left|y + \sqrt{4 + y^2}\right|\Big|_0^4 =$$

$$= 4\sqrt{20} - \int_0^4 \sqrt{4 + y^2}\, dy + 4\ln\left|4 + \sqrt{20}\right| - 4\ln 2 =$$

$$= 4\sqrt{20} + 4\ln\left|2 + \sqrt{5}\right| - \int_0^4 \sqrt{4 + y^2}\, dy.$$

Получили уравнение относительно искомого интеграла. Решим его и найдём

$$\int_0^4 \sqrt{4 + y^2}\, dy = 2\sqrt{20} + 2\ln(2 + \sqrt{5}).$$

Окончательно

$$S = \sqrt{20} + \ln\,(2 + \sqrt{5}).$$

Пример 2.4.3. Вычислить длину дуги цепной линии, заданной уравнением

$$y = \frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right) \qquad (60)$$

для $x \in [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$ (рис. 44).

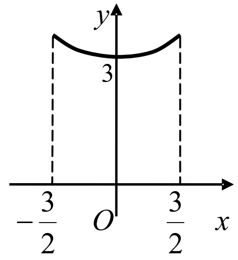

Рис. 44

Решение. Для нахождения бесконечно малого элемента длины дуги воспользуемся формулой (57). Найдём сначала

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}\right).$$

Тогда

$$dS = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}\right)^2}\, dx = \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right).$$

Учтём теперь, что функция (60) чётная, т. е. цепная линия обладает симметрией относительно оси Oy. А значит, для нахождения всей длины дуги проинтегрируем dS на отрезке $x \in [0; \frac{3}{2}]$ и умножим полученный результат на 2. В итоге

$$S = 2\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)dx = 3\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}} = 3\left(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Пример 2.4.4. Вычислить длину дуги астроиды, заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

для $t \in [0; 2\pi]$, $a > 0$.

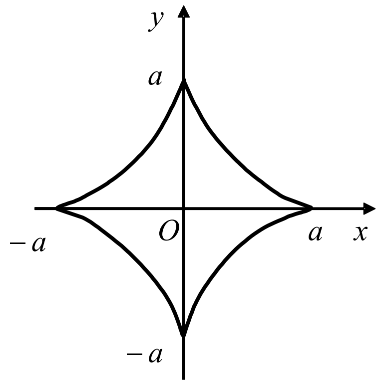

Рис. 45

Решение. Дуга астроиды представлена на рис. 45. Заметим, что астроида симметрична относительно координатных осей Ox и Oy. Следовательно, будем искать длину четвертой части астроиды – дуги, расположенной в первом квадранте декартовой системы координат и отвечающей изменению параметра t от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Для нахождения бесконечно малого элемента длины дуги воспользуемся формулой (59). Вычислим сначала

$$\begin{cases} x' = -3a\cos^2 t\sin t; \\ y' = 3a\sin^2 t\cos t. \end{cases}$$

Тогда

$$dS = \sqrt{\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt = 3a\cos t\sin t dt = \frac{3}{2}a\sin 2t dt.$$

В итоге

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2t dt = -6a\frac{1}{2}\cos 2t\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(\cos\pi - \cos 0) = 6a.$$

2.2.5. Вычисление площади поверхности тела вращения

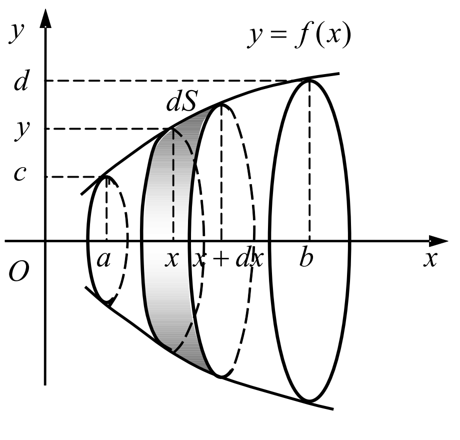

Рис. 46

Рассмотрим поверхность, образованную вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = f(x)$ (рис. 46). Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ при всех $x \in [a,b]$. Будем искать площадь поверхности L_x, отсечённой плоскостями $x = a$, $x = b$. Для этого выделим на дуге $y = f(x)$ элемент, соот-

ветствующий изменению абсциссы от x до $x + dx$, и будем его вращать.

В качестве бесконечно малого элемента dL_x примем площадь боковой поверхности усеченного конуса с образующей dS и радиусом среднего сечения y, где y – ордината, соответствующая абсциссе x. Действительно,

$$dL_x = 2\pi\frac{y + (y + dy)}{2}dS = 2\pi y\,dS + \pi\,dy\,dS.$$

Однако вторым слагаемым в последней части равенств можно пренебречь как бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем dy. Тогда

$$dL_x = 2\pi y\,dS. \tag{61}$$

Учитывая (57), получим

$$L_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{62}$$

Замечание 1. Если дуга кривой описана уравнением $x = \varphi(y)$, $y \in [c,d]$, то, учитывая формулу (58), получим

$$L_x = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\,dy. \tag{63}$$

По аналогии найдём формулы для вычисления площади поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги кривой $x = \varphi(y)$, $y \in [c,d]$ (рис. 47).

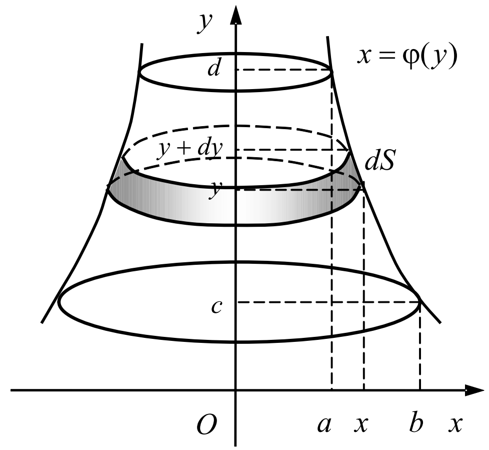

Рис. 47

В качестве бесконечно малого элемента dL_y примем площадь боковой поверхности усечённого конуса с образующей dS и радиусом среднего сечения x, где x – абсцисса, соответствующая ординате y, т. е.

$$dL_y = 2\pi x\, dS. \qquad (64)$$

Учитывая (58), получим

$$L_y = 2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy. \qquad (65)$$

Замечание 2. Если дуга кривой описана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, то, учитывая формулу (57), получим

$$L_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (66)$$

Пример 2.5.1. Дуга кривой $3y = 4\cos x$ между точками с абсциссами $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = 0$ вращается вокруг оси Ox (рис. 48). Найти площадь поверхности вращения.

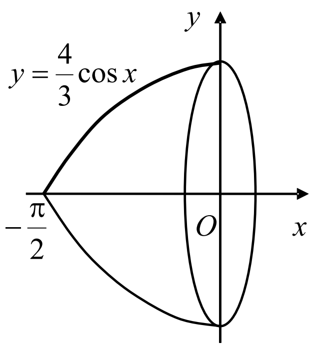

Рис. 48

Решение. Для нахождения бесконечно малого элемента искомой величины воспользуемся формулой (61). Найдём сначала

$$y = \frac{4}{3}\cos x,$$

а затем

$$y' = -\frac{4}{3}\sin x.$$

Тогда

$$dS = \sqrt{1+\frac{16}{9}\sin^2 x}\,dx$$

и

$$dL_x = 2\pi y\,dS = 2\pi\frac{4}{3}\cos x\sqrt{1+\frac{16}{9}\sin^2 x}\,dx,$$

где $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$. Воспользуемся теперь формулой (62) и получим

$$L_x = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{4}{3}\cos x\sqrt{1+\frac{16}{9}\sin^2 x}\,dx.$$

Сделаем здесь замену переменной $z = \frac{4}{3}\sin x$. Учтём, что $dz = \frac{4}{3}\cos x\,dx$, $z(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{3}$ и $z(0) = 0$. Получим

$$L_x = 2\pi\int_{-\frac{4}{3}}^{0}\sqrt{1+z^2}\,dz.$$

Интеграл такого типа найден в примере 7.11. Воспользуемся формулой (25). Окончательно

$$L_x = 2\pi\int_{-\frac{4}{3}}^{0}\sqrt{1+z^2}\,dz = 2\pi\left(\frac{z}{2}\sqrt{z^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|\right)\Bigg|_{-\frac{4}{3}}^{0} =$$

$$= \pi\left(\frac{20}{9}+\ln 3\right).$$

Пример 2.5.2. Вычислить площадь поверхности, которая получается от вращения вокруг оси Oy дуги параболы $x^2 = 1 - y$, отсечённой прямой $y + 5 = 0$ (рис. 49).

Решение. Для нахождения бесконечно малого элемента искомой величины воспользуемся формулой (64). Найдём сначала

$$x = \sqrt{1-y},$$

а затем

$$x' = -\frac{1}{2\sqrt{1-y}}.$$

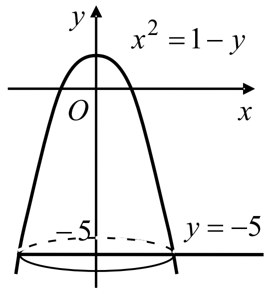

Рис. 49

Тогда

$$dS = \sqrt{1+\frac{1}{4(1-y)}}\,dy$$

и

$$dL_y = 2\pi\, x\, dS = 2\pi\sqrt{1-y}\sqrt{1+\frac{1}{4(1-y)}}\,dy =$$

$$= 2\pi\sqrt{1-y+\frac{1}{4}}dy = 2\pi\sqrt{\frac{5}{4}-y}dy,$$

где $y\in[-5;\,1]$. Воспользуемся теперь формулой (65) и получим

$$L_y = 2\pi\int_{-5}^{1}\sqrt{\frac{5}{4}-y}\,dy = -2\pi\frac{(\frac{5}{4}-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-5}^{1} = -\frac{4\pi}{3}(\frac{1}{8}-\frac{125}{8}) = \frac{62\pi}{3}.$$

Пример 2.5.3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = e^{-\frac{x}{3}}$, $x \ge 0$ (рис. 50).

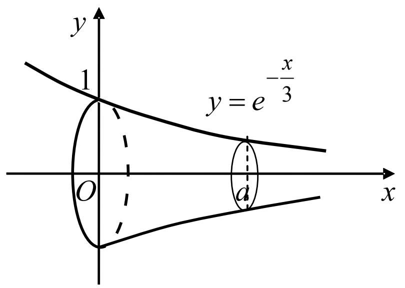

Рис. 50

Решение. Для нахождения бесконечно малого элемента искомой величины воспользуемся формулой (61), а для нахождения dS – формулой (58). Выразим из уравнения кривой x:

$$\ln y = -\frac{x}{3},$$

$$x = -3\ln y.$$

Найдём

$$x' = -\frac{3}{y},$$

а затем

$$dS = \sqrt{1+\frac{9}{y^2}}\,dy,$$

где $y\in(0;1]$. Тогда

$$dL_x = 2\pi\, y\, dS = 2\pi y\sqrt{1+\frac{9}{y^2}}\,dy = 2\pi\sqrt{y^2+9}\,dy.$$

Воспользуемся теперь формулой (63) и получим

$$L_x = 2\pi\int_0^1\sqrt{y^2+9}\,dy.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся формулой (25), которая найдена в примере 7.11. Тогда

$$L_x = 2\pi\int_0^1\sqrt{y^2+9}\,dy = 2\pi(\frac{y}{2}\sqrt{y^2+9}+\frac{9}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+9}\right|)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi(\sqrt{10}+9\ln(1+\sqrt{10})-9\ln 3) = \pi\sqrt{10}+9\pi\ln\frac{1+\sqrt{10}}{3}.$$

Пример 2.5.4. Вычислить площадь поверхности, которая получается от вращения вокруг оси Oy дуги параболы $y^2 = 2(x-1)$, отсечённой прямыми $y = 0$, $y = 1$ (рис. 51).

Решение. Для нахождения бесконечно малого элемента искомой величины воспользуемся формулой (64). Найдём сначала

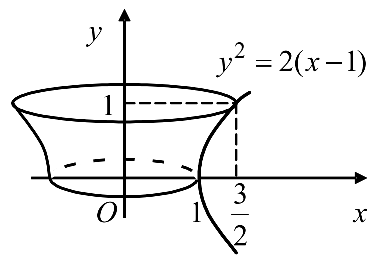

Рис. 51

$$x = \frac{y^2}{2}+1,$$

а затем

$$x' = y.$$

Тогда

$$dS = \sqrt{1+y^2}\,dy$$

и

$$dL_y = 2\pi\, x\, dS = 2\pi(\frac{y^2}{2}+1)\sqrt{1+y^2}\,dy = \pi(y^2+2)\sqrt{1+y^2}dy =$$

$$= \pi(y^2+1+1)\sqrt{1+y^2}dy = \pi\left(\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3+\sqrt{1+y^2}\right)dy,$$

где $y \in [0; 1]$. Воспользуемся теперь формулой (65) и получим

$$L_y = \pi\left(\int_0^1 \left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 dy + \int_0^1 \sqrt{1+y^2}\,dy\right).$$

Рассмотрим отдельно $I_1 = \int \sqrt{1+y^2}\,dy$ и $I_3 = \int \left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 dy$. Для вычисления I_3 применим приём интегрирования по частям, для того чтобы свести его к себе самому. Положим $u = \left(\sqrt{1+y^2}\right)^3$, $dv = dy$. Найдём $du = \frac{3}{2}(1+y^2)^{\frac{1}{2}} 2y$, $v = y$. Получим

$$I_3 = \int \left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 dy = y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 - 3\int y^2\sqrt{1+y^2}\,dy =$$

$$= y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 - 3\int (y^2+1-1)\sqrt{1+y^2}\,dy =$$

$$= y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 - 3\int \left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 dy + 3\int \sqrt{1+y^2}\,dy =$$

$$= y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 - 3I_3 + 3I_1.$$

Получили уравнение относительно искомого интеграла I_3:

$$I_3 = y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 - 3I_3 + 3I_1.$$

Решим его и получим

$$I_3 = \frac{1}{4}y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 + \frac{3}{4}I_1.$$

Из примера 7.11 (формула (25)) известно, что

$$I_1 = \int \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|y + \sqrt{y^2+1}\right| + C.$$

Тогда

$$L_y = \pi\left(\int_0^1 \left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 dy + \int_0^1 \sqrt{1+y^2}\,dy\right) = \pi\left(I_3 + I_1\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4}y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 + \frac{3}{4}I_1 + I_1\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{4}y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 + \frac{7}{4}I_1\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4}y\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 + \frac{7}{4}\left(\frac{y}{2}\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|y + \sqrt{y^2+1}\right|\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8}(11\sqrt{2} + 7\ln(1+\sqrt{2})).$$

2.3. Механические приложения определённого интеграла

Пусть имеется материальная точка M массой m. Зададим ось l.

Моментом инерции точки относительно оси называется произведение её массы на квадрат расстояния до оси:

$$I_l = md^2$$

(рис. 52).

Статическим моментом точки M относительно оси l называется произведение её массы на расстояние от точки до оси, взятое с каким-либо знаком:

$$M_l = md$$

или

$$M_l = -md$$

в зависимости от договорённости, с какой стороны оси l материальным точкам приписывается положительный статический момент, а с какой – отрицательный.

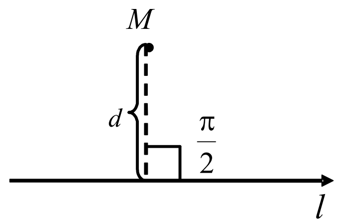

Рис. 52

Пусть задана система, состоящая из конечного числа n материальных точек $M^{(i)}$ с массами m_i, отстоящих от оси l на расстоянии d_i. Тогда

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 ,$$

а

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} \pm m_i d_i , \qquad (67)$$

причём в формуле (67) для точек, расположенных по разные стороны от оси l, выбираются разные знаки.

Пусть теперь масса сплошным образом распределена по плоской пластине. Тогда вместо сумм рассматривают интегралы. Будем считать, что масса распределена по плоской фигуре равномерно. Для простоты считаем плотность распределения массы равной единице. Тогда масса любой части фигуры равна её площади.

Рассмотрим две показательные задачи.

1. Найти статический момент M_x и момент инерции I_x прямоугольника с основанием a и высотой h относительно его основания (рис. 53).

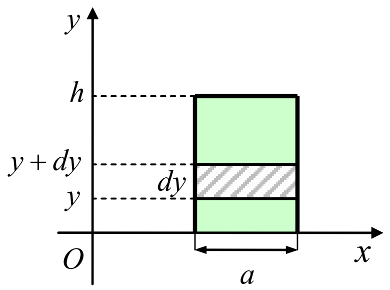

Рис. 53

Выделим внутри прямоугольника полоску высотой dy и шириной a. Расстояние этой полоски до оси Ox равно y, $y \in [0, h]$. Масса выделенного элемента равна его площади ady. Вычислим статический момент и момент инерции выделенного элемента относительно оси Ox:

$$dM_x = yady,$$

$$dI_x = y^2 ady.$$

Тогда

$$M_x = \int_0^h yady = \frac{1}{2} ah^2, \qquad (68)$$

$$I_x = \int_0^h y^2 ady = \frac{1}{3} ah^3. \qquad (69)$$

2. Найти статические моменты M_x, M_y и моменты инерции I_x, I_y криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, относительно координатных осей.

А. Ищем моменты относительно оси Ox (рис. 54). Выделим внутри трапеции криволинейную полоску, опирающуюся на отрезок $[x, x + dx]$. Будем вычислять бесконечно малые элементы моментов по формулам (68)–(69) как моменты прямоугольной полоски с основанием dx и переменной высотой $f(x)$. Тогда

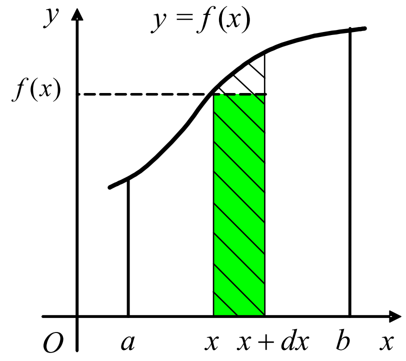

Рис. 54

$$dM_x = \frac{1}{2}(f(x))^2 dx, \qquad (70)$$

$$dI_x = \frac{1}{3}(f(x))^3 dx. \qquad (71)$$

В формулах (70)–(71) мы, пренебрегая бесконечно малыми величинами более высокого порядка малости, чем dx, отождествили криволинейную полоску с прямоугольником высотой $f(x)$. Проинтегрируем полученные равенства при изменении x от a до b и получим

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 dx, \qquad (72)$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b (f(x))^3 dx. \qquad (73)$$

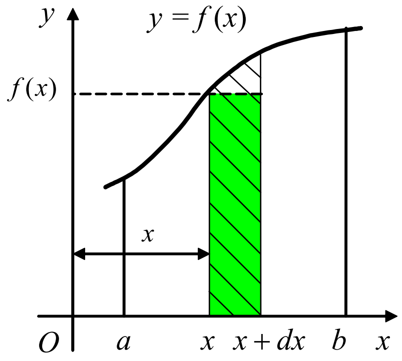

Рис. 55

Б. Ищем статический момент и момент инерции относительно оси Oy (рис. 55). Выделим внутри трапеции ту же полоску, что и в п. А. За бесконечно малый элемент массы этой полоски примем массу прямоугольника с основанием $[x, x+dx]$ и высотой $f(x)$. В силу сделанного ранее предположения масса этого прямоугольника равна его площади. Расстояние любой точки этого прямоугольника до оси Oy равно x. Тогда

$$dM_y = xf(x)dx, \tag{74}$$

$$dI_y = x^2 f(x)dx. \tag{75}$$

Интегрируем равенства (74)–(75) при изменении переменной x от a до b и получим

$$M_y = \int_a^b x\, f(x)\, dx, \tag{76}$$

$$I_y = \int_a^b x^2 f(x)\, dx. \tag{77}$$

Знание статических моментов плоской фигуры относительно координатных осей позволяет определить координаты ***центра тяжести*** этой фигуры.

Известно, что величина статических моментов не изменится, если предположить, что вся масса фигуры сосредоточена в центре тяжести этой фигуры.

Пусть $C(x_c, y_c)$ – центр тяжести фигуры массой m, а M_x, M_y – её статические моменты относительно координатных осей. Тогда

$$M_x = y_c m, \quad M_y = x_c m,$$

откуда

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}. \tag{78}$$

2.4. Геометрические приложения определённого интеграла в полярной системе координат

Пусть задана полярная система координат с полюсом O и полярной осью r (рис. 56). Тогда любая точка M на плоскости имеет в этой системе две координаты: полярный радиус r $(r \geq 0)$, равный длине отрезка OM, и полярный угол φ, на который нужно повернуть полярную ось до совмещения с точкой M. Обычно договариваются, что $\varphi \in [0, 2\pi)$. Однако это ограничение не является универсальным. Из рис. 56 видно, что

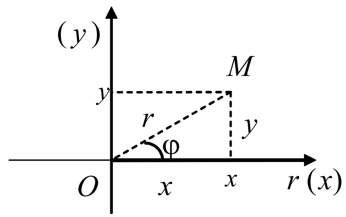

Рис. 56

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{79}$$

и

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2; \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \tag{80}$$

причём для определения угла φ следует учитывать знаки x и y. Формулы (79) и (80) устанавливают связь между полярными и декартовыми координатами точки M для случая, когда полярная ось r совпадает с осью Ox.

2.4.1. Вычисление площади

Рассмотрим криволинейный сектор, ограниченный лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и кривой $r = r(\varphi)$ (рис. 57). Вычислим его площадь.

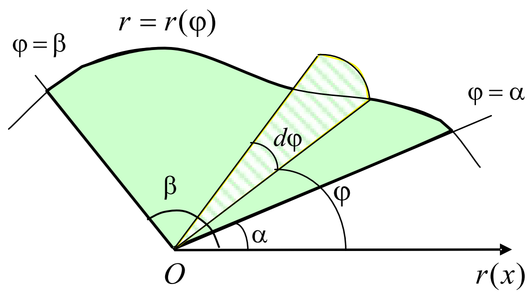

Рис. 57

Для этого выделим элементарный криволинейный сектор, расположенный между лучами с полярным углом φ ($\varphi \in [\alpha, \beta]$) и полярным углом $\varphi + d\varphi$. За бесконечно малый элемент площади dS примем площадь кругового сектора переменного радиуса $r(\varphi)$ с центральным углом $d\varphi$. Тогда

$$dS = \frac{1}{2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Проинтегрируем полученное равенство при изменении φ от α до β и получим

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \tag{81}$$

Пример 4.1.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \cos 3\varphi$, заданной в полярных координатах.

Решение. Заданная в условии линия является трёхлепестковой розой (рис. 58).

Так как $r > 0$, то, решая неравенство $\cos 3\varphi > 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, найдём те значения φ, для которых она определена. Она определена для значений

$$\varphi \in [0; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}] \cup [\frac{11\pi}{6}; 2\pi].$$

Ограниченная ею фигура состоит из трёх фигур («лепестков») с одинаковой площадью. Более того, каждый из трёх «лепестков» име-

ет ось симметрии, делящую фигуру на две равновеликие части. Так что достаточно вычислить площадь одной из половинок «лепестка» и умножить её на 6. Рассмотрим половину «лепестка», ограниченную лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Тогда согласно формуле (81) получим:

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \frac{3}{2}(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{4}.$$

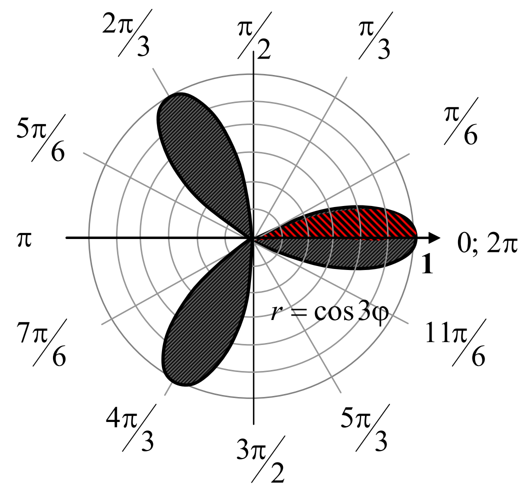

Рис. 58

Пример 4.1.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 1 + \sin\varphi$, заданной в полярных координатах.

Решение. Заданная в условии линия является кардиоидой (рис. 59).

Фигура симметрична относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (оси Oy). Будем вычислять площадь одной из половинок кардиоиды, заключённой между лучами $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и умножать её на 2. Применяя формулу (81), получим:

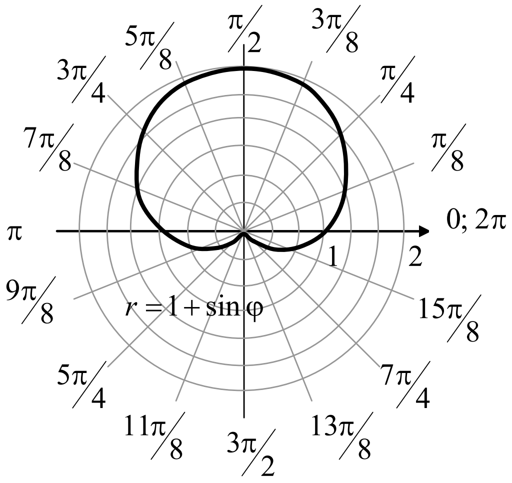

Рис. 59

$$S = 2\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\varphi)^2\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= (\varphi - 2\cos\varphi)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \pi + \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Пример 4.1.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\sin 2\varphi$, $r = 1$, заданной в полярных координатах, и расположенной вне круга.

Решение. Заданная в условии кривая является двухлепестковой розой, а кривая $r = 1$ – окружностью радиусом 1 с центром в начале координат (рис. 60). Так как $r > 0$, то, решая неравенство $\sin 2\varphi > 0$, $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, найдём те значения φ, для которых двухлепестковая роза определена:

$$\varphi \in [0;\, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi;\, \frac{3\pi}{2}].$$

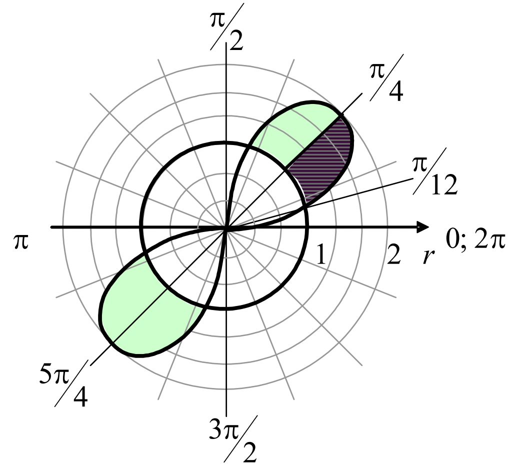

Рис. 60

Эти два отрезка определяют два лепестка розы. При этом луч $\varphi = \frac{\pi}{4}$ делит лепесток первой четверти круга на две равные части. Так что двухлепестковая роза состоит из четырёх половинок «лепестка» одинаковой площади.

Найдём теперь координаты точки пересечения окружности и половины лепестка розы, ограниченной лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Для этого решим уравнение

$$2\sin 2\varphi = 1 \quad (\varphi \in [0;\, \frac{\pi}{4}]).$$

Его решением будет $\varphi = \frac{\pi}{12}$. Таким образом, четвёртая часть искомой фигуры заключена между лучами $\varphi = \frac{\pi}{12}$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

На рис. 60 эта часть заштрихована. Площадь всей фигуры получим, если площадь заштрихованной части умножим на 4.

Площадь заштрихованной фигуры будем искать как разность между площадью фигуры, ограниченной линиями $r = 2\sin 2\varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{12}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, и площадью сектора круга $r = 1$, заключённого между теми же лучами $\varphi = \frac{\pi}{12}$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Тогда согласно формуле (81) получим:

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin 2\varphi)^2\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\right) = 2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} [(2\sin 2\varphi)^2 - 1]\, d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} (2 - 4\cos 4\varphi)\, d\varphi = (2\varphi - \sin 4\varphi)\Bigg|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 4.1.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 1 + \cos 2\varphi$, заданной в полярной системе координат.

Решение. На рис. 61 изображена заданная фигура.

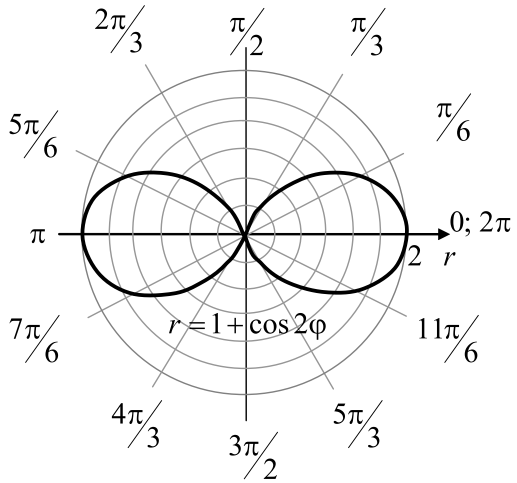

Рис. 61

Так как $r \geq 0$ для всех значений $\varphi \in [0; 2\pi]$, то согласно формуле (81) получим:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi + \sin 2\varphi)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 2\varphi\, d\varphi = \pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \pi + \frac{1}{4}\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Пример 4.1.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой, заданной в полярной системе координат уравнением $r^2 = \cos 2\varphi$ (рис. 62).

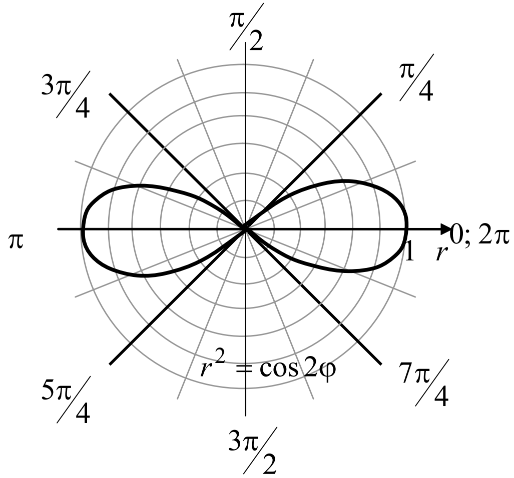

Рис. 62

Решение. Так как $r^2 \geq 0$, то, решая неравенство $\cos 2\varphi > 0$ ($\varphi \in [0; 2\pi]$), найдём те значения φ, для которых заданная кривая определена. Она определена для значений

$$\varphi \in [0; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}; 2\pi].$$

При этом в силу периодичности функции $\cos 2\varphi$ лемниската обладает симметрией относительно лучей $\varphi = \frac{\pi}{2}k,\ \ k = 0, 1, 2, 3$ (см. рис. 62).

Чтобы получить площадь заданной фигуры, достаточно найти площадь её части, заключённой между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$, и умножить полученный результат на 4. Тогда согласно формуле (81) получим:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi = \sin 2\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Пример 4.1.6. Вычислить площадь меньшей из фигур, ограниченных линиями, заданными в полярной системе координат уравнениями $r = \frac{2}{\cos\varphi}$, $r = 8\cos\varphi$.

Решение. Линия $r = \frac{2}{\cos\varphi}$ (рис. 63) очевидным образом является прямой $x = 2$ (см. формулы (77) – связь полярных и декартовых координат). Линия $r = 8\cos\varphi$ представляет собой окружность с центром в точке с полярными координатами $\varphi = 0,\ \ r = 4$ и радиусом 4. Заданная фигура ограничена двумя различными линиями: прямой и окружностью. Найдём точку их пересечения. Для этого решим уравнение

$$\frac{2}{\cos\varphi} = 8\cos\varphi,\ \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}].$$

Его решением является $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

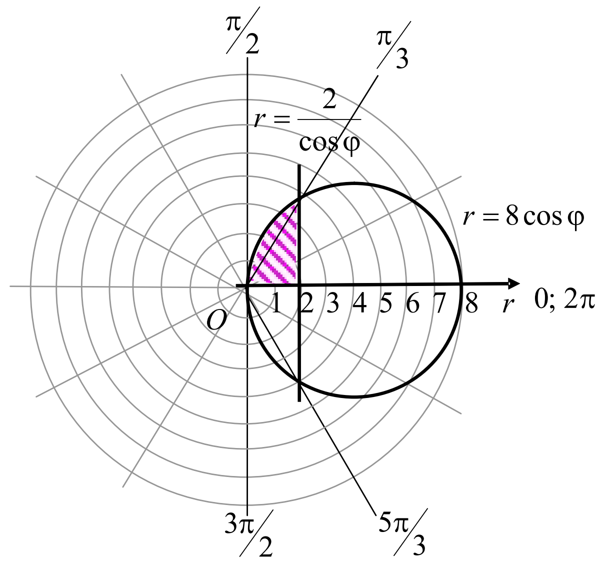

Рис. 63

В силу симметрии заданной фигуры будем вычислять площадь её половины, расположенной в первой четверти полярной системы координат и заштрихованной на рис. 63, и умножать полученный результат на 2. Заштрихованная фигура ограничена прямой $r = \frac{2}{\cos\varphi}$ при изменении переменной φ от 0 до $\frac{\pi}{3}$, а на участке $\varphi \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$ – окружностью $r = 8\cos\varphi$. Воспользуемся теперь формулой (81) и получим:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (8\cos\varphi)^2 \, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} + 16\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + 16\,(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi) \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} + 16(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}) = 2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} - 8\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$

$$S = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$$

Пример 4.1.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат уравнением $r = 3 + 2\cos\varphi$.

Решение. Заданная фигура изображена на рис. 64.

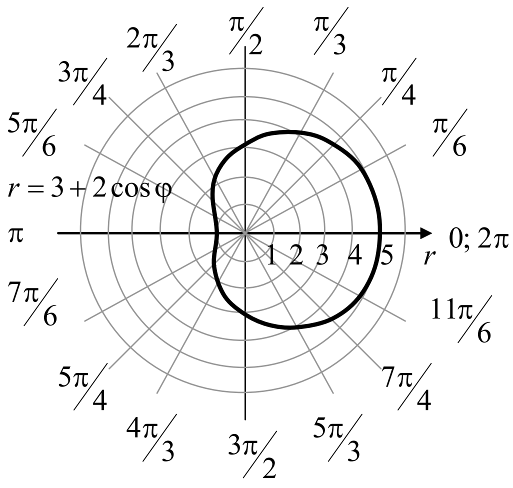

Рис. 64

Функция $r = 3 + 2\cos\varphi$ определена для всех $\varphi \in [0;\, 2\pi]$. Площадь вычислим по формуле (81). Тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3 + 2\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(9 + 12\cos\varphi + 4\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(9 + 12\cos\varphi + 2(1 + \cos 2\varphi))d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(11 + 12\cos\varphi + 2\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(11\varphi + 12\sin\varphi + \sin 2\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 11\pi.$$

2.4.2. Вычисление длины дуги

Пусть требуется найти длину дуги кривой $r = r(\varphi)$, заключённой между лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta \quad (\alpha < \beta)$ (см. рис. 57). Для вычисления бесконечно малого элемента длины дуги воспользуемся формулой (56). Используем теперь формулы (79), связывающие полярные координаты точки на рассматриваемой дуге $r = r(\varphi)$ с декартовыми координатами:

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} dx = (r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)d\varphi, \\ dy = (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)d\varphi \end{cases}$$

и

$$(dx)^2 + (dy)^2 = \Big((r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)\Big)(d\varphi)^2.$$

Следовательно,

$$dS = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\,d\varphi, \tag{82}$$

а

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\,d\varphi. \tag{83}$$

Пример 4.2.1. Найти длину дуги кардиоиды, заданной в полярной системе координат уравнением $r = 4(1 + \cos\varphi)$.

Решение. Заданная кривая изображена на рис. 65. Учтём, что кардиоида симметрична относительно полярной оси. Для того чтобы

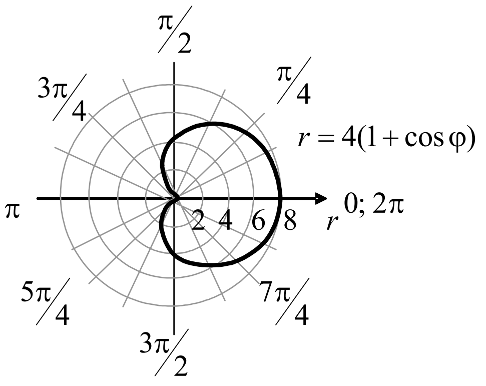

Рис. 65

вычислить длину всей кривой, достаточно вычислить длину её половины для $\varphi \in [0;\, \pi]$ и умножить результат на 2. Для нахождения бесконечно малого элемента длины дуги воспользуемся формулой (82). Найдём

$$r' = -4\sin\varphi,$$

а затем

$$dS = \sqrt{(4(1+\cos\varphi))^2 + (-4\sin\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = 4\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 4\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 8\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi.$$

Отметим, что $\cos\dfrac{\varphi}{2} \geq 0$ для $\varphi \in [0; \pi]$. Тогда искомая длина вычисляется так:

$$S = 2\int_0^{\pi} 8\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 16 \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 32.$$

Рекомендуемая литература

1. *Натансон И. П.* Краткий курс высшей математики / И. П. Натансон. – СПб.: Лань, 2005.

2. *Смирнова В. Б.* Неопределённый интеграл: учеб. пособие / В. Б. Смирнова, Л. Е. Морозова; СПбГАСУ. – СПб., 2010.

3. *Определённый* интеграл: метод. указания к выполнению задания по курсу «Математика» для студентов всех специальностей ЛИСИ / сост. С. Н. Нумеров. – Л., 1984.

4. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2007.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебное пособие

Составители: **Морозова** Лидия Евсеевна
Смирнова Вера Борисовна

Редактор А. В. Афанасьева
Корректор К. И. Бойкова
Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 22.08.2011. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 5,8. Тираж 2000 экз. Заказ 87. «С» 47.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.
Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 5.

ДЛЯ ЗАПИСЕЙ