

Федеральное агентство по образованию

**Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет**

В. Б. СМЕРНОВА, Л. Е. МОРОЗОВА

Неопределённый интеграл

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2007**

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор М. А. Нарбут (Санкт-Петербургский государственный университет); канд. физ.-мат. наук, доцент А. И. Шепелявый (Санкт-Петербургский государственный университет)

В. Б. Смирнова, Л. Е. Морозова

Неопределённый интеграл: учебное пособие / СПб. гос. архит.-строит. ун-т. – СПб., 2007. – с.

Пособие предназначено для самостоятельного изучения раздела «Неопределённый интеграл» студентами специальностей с сокращенным курсом математики. Даны основные определения и теоремы. Приводится методика решения задач. Рассмотрены многочисленные примеры.

Табл. 4. Библиогр.: 5 назв.

Рекомендовано Редакционно-издательским советом СПбГАСУ в качестве учебного пособия

© В. Б. Смирнова, Л. Е. Морозова, 2007
© Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2007

Данное пособие посвящено решению задачи, обратной задаче нахождения производной. Пусть задана производная некоторой функции. Требуется найти эту функцию.

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ в промежутке X , если для всех $x \in X$ справедливо равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Замечание. Если промежуток X специально не оговорен, это означает, что равенство (1.1) справедливо для всех x из области определения функции $f(x)$.

Пример 1.1. Пусть $f(x) = \sin 2x$. Легко установить, что $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$. Действительно, $(-\frac{1}{2} \cos 2x)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x) \cdot 2 = \sin 2x$.

Заметим, что любая функция вида $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$, где C – число, является первообразной для функции $\sin 2x$.

Сделанное в связи с приведенным примером замечание имеет общий характер. Легко показать, что если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке X , то любая функция $F(x) + C$, где C – число, является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке X . Действительно,

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Возникает вопрос, нет ли у функции $f(x)$ первообразных, отличных от $F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$, а C – число. Оказывается, таких первообразных нет.

Теорема 1. Пусть $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке X . Тогда любая другая первообразная для функции $f(x)$ в этом промежутке имеет вид $F(x) + C_0$, где C_0 – число.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в промежутке X , кроме первообразной $F(x)$, отличную от нее первообразную $\Phi(x)$, т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Составим разность $\Psi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Заметим, что

$$\Psi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

при всех $x \in X$. Рассмотрим любые $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 < x_2$). По теореме Лагранжа

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\hat{x})(x_2 - x_1), \quad \hat{x} \in (x_1, x_2).$$

Следовательно, $\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = 0$ для любых $x_1, x_2 \in X$. Таким образом, при $x \in X$ имеем

$$\Psi(x) \equiv \text{const.}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(x) = F(x) + C_0,$$

где C_0 – постоянная.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определение 2. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ для всех $x \in X$. Выражение $F(x) + C$, где C может принимать любое постоянное значение, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (2.1)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, произведение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, а слагаемое C – *произвольной постоянной*. Процесс определения первообразной или неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$.

Замечание. Обозначение неопределенного интеграла представляет собой символ интеграла « \int », за которым следует дифференциальное выражение $f(x)dx$. Последнее является дифференциалом искомой первообразной. Действительно,

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF(x).$$

Такое обозначение очень удобно для объяснения и осуществления некоторых методов интегрирования. В частности, такое обозначение явно указывает переменную, по которой ведется интегрирование.

Перечислим свойства неопределенного интеграла, которые вытекают непосредственно из его определения.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad (2.2)$$

или

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \quad (2.3)$$

т. е. знак дифференциала «уничтожает» знак интеграла.

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad (2.4)$$

или

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad (2.5)$$

т. е. знак интеграла «уничтожает» знак дифференциала, но при этом появляется постоянное слагаемое.

Формула (2.2) дает возможность проверять правильность вычисления неопределенного интеграла: производная от неопределенного интеграла должна быть равна подынтегральной функции.

Справедливо следующее утверждение, которое мы приведем здесь без доказательства.

Теорема 2. *Любая непрерывная в данном промежутке функция имеет в нём первообразную.*

Замечание. Все элементарные функции непрерывны в области своего задания. Следовательно, по теореме 2 существование первообразных для этих функций обеспечено. Однако далеко не всегда первообразную от элементарной функции можно выразить в терминах элементарных функций. Так, например, невозможно выразить с помощью элементарных функций неопределенные интегралы:

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \sin(x^2) dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Иными словами, не существует таких элементарных функций, производные от которых были бы равны e^{x^2} , $\sin(x^2)$, $\frac{\sin x}{x}$. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции, называются *небериющимися*.

По аналогии интегралы, которые можно выразить в терминах элементарных функций, назовем *бериющимися*.

Далее мы познакомимся с некоторыми основными методами нахождения первообразных. Однако многие известные методы нам охватить не удастся. Заметим также, что интегрирование некоторых функций требует весьма громоздких преобразований. Так что наряду с освоением методов интегрирования необходимо освоить использование справочников. Справочные пособия охватывают все типы берущихся интегралов. Однако очень часто приходится проделать определенную подготовительную работу, чтобы привести неопределенный интеграл к тому типу, который указан в справочнике. Что же касается несложных интегралов, то их часто проще вычислить самостоятельно, нежели найти в справочнике.

3. ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Приведем здесь формулы, которые необходимо знать наизусть. Они лежат в основе всего процесса интегрирования. Первые десять формул получены непосредственно из таблицы производных основных элементарных функций. Перечислим их.

$$1. \int 0 dx = C, \text{ где } C = \text{const.} \quad (3.1)$$

$$2. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \text{ если } a \neq -1. \quad (3.2)$$

В частности,

$$\int dx = x + C \text{ (см. также формулу (2.5).)}$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \quad (3.3)$$

Поясним появление в этой формуле символа модуля. Таблица производных дает формулу $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Здесь автоматически предполагается, что $x > 0$, и, следовательно, для $x > 0$ справедливо соотношение

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad (3.4)$$

Рассмотрим теперь функцию $\ln(-x)$, определённую при $x < 0$. Поскольку

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

то для $x < 0$ справедливо равенство

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) получаем, что для любого промежутка X , не содержащего нуля, формула (3.3) нашей таблицы справедлива.

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0; \quad a \neq 1). \quad (3.6)$$

Частный случай:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Заметим, что функция e^x не изменяется ни при интегрировании, ни при дифференцировании. Говорят, что она инвариантна по отношению к обоим этим операциям.

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C. \quad (3.7)$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C. \quad (3.8)$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad (3.9)$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \quad (3.10)$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C. \quad (3.11)$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C. \quad (3.12)$$

Следующие четыре формулы получены не из таблицы производных и требуют вывода, который будет проведён в последующих параграфах. Они очень часто встречаются в различных задачах.

$$11. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0). \quad (3.13)$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0). \quad (3.14)$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq 0). \quad (3.15)$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + m} \right| + C, \quad (m \neq 0). \quad (3.16)$$

Таким образом, можно записать таблицу основных интегралов (табл. 1). Интегралы, помещённые в таблицу, называются *табличными*.

Таблица 1

№ п/п	Неопределенный интеграл	№ формулы
1	$\int 0 dx = C$, где $C = \text{const}$	(3.1)
2	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, если $a \neq -1$	(3.2)
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	(3.3)
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0; \quad a \neq 1)$	(3.6)
5	$\int e^x dx + C$	
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	(3.7)
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	(3.8)
8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	(3.9)
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	(3.10)
10	$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$	(3.11)
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	(3.12)
12	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$	(3.13)
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $(a > 0)$	(3.14)
14	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$, $(a \neq 0)$	(3.15)
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + m} \right + C$, $(m \neq 0)$	(3.16)

Подчеркнём, что справедливость каждой строчки таблицы можно проверить, опираясь на формулу (2.2): производная от функции, стоящей в правой части равенства, равна подынтегральной функции. Для примера проверим справедливость формулы (3.16) в случае, когда $x + \sqrt{x^2 + m} > 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} (\ln(x + \sqrt{x^2 + m}))' &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + m})'}{x + \sqrt{x^2 + m}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + m}}}{x + \sqrt{x^2 + m}} = \\ &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + m})}{(x + \sqrt{x^2 + m})\sqrt{x^2 + m}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + m}}. \end{aligned}$$

В следующих разделах будут найдены первообразные для функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$. Их можно присоединить к таблице неопределённых интегралов.

Приведем ряд примеров использования таблицы.

В примерах 3.1–3.8 использован интеграл (3.2). Однако прежде чем им воспользоваться, нужно записать подынтегральную функцию в виде x^a .

$$\text{Пример 3.1. } \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Пример 3.2. } \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\text{Пример 3.3. } \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

$$\text{Пример 3.4. } \int \sqrt[12]{x^5} dx = \int x^{\frac{5}{12}} dx = \frac{12}{17} x^{\frac{17}{12}} + C.$$

$$\text{Пример 3.5. } \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{5}} dx = \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}} + C.$$

$$\text{Пример 3.6. } \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -2x^{-\frac{1}{2}} + C.$$

$$\text{Пример 3.7. } \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{7}{3}} dx = -\frac{3}{4} x^{-\frac{4}{3}} + C.$$

$$\text{Пример 3.8. } \int (x \cdot \sqrt[5]{x})^3 dx = \int x^{\frac{18}{5}} dx = \frac{5}{23} x^{\frac{23}{5}} + C.$$

В примерах 3.9–3.13 использован интеграл (3.6).

$$\text{Пример 3.9. } \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

$$\text{Пример 3.10. } \int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C.$$

$$\text{Пример 3.11. } \int 2^x \cdot 3^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} + C.$$

$$\text{Пример 3.12. } \int (2^x)^3 dx = \int 8^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} + C = \frac{(2^x)^3}{3 \ln 2} + C.$$

$$\text{Пример 3.13. } \int 3^{2x} dx = \int 9^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} + C = \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + C.$$

В примерах 3.14–3.15 использована формула (3.13).

$$\text{Пример 3.14. } \int \frac{dx}{x^2 + 16} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C.$$

Пример 3.15. $\int \frac{dx}{13+x^2} = \frac{1}{\sqrt{13}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{13}} + C.$

В следующем примере применен табличный интеграл (3.14).

Пример 3.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{14-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{14}} + C.$

В следующих двух примерах воспользуемся формулой (3.16) таблицы.

Пример 3.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-14}} = \ln|x + \sqrt{x^2-14}| + C.$

Пример 3.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+14}} = \ln|x + \sqrt{x^2+14}| + C.$

В последующих интегралах применим формулу (3.15).

Пример 3.19. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C.$

Пример 3.20. $\int \frac{dx}{x^2-10} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{10}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}} \right| + C.$

4. ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

I. Вынесение постоянного множителя за знак интеграла

Теорема 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла, т. е.*

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \quad (4.1)$$

где α – число.

Доказательство. Возьмём производную от правой части равенства (4.1) и вынесем постоянный множитель за знак производной:

$$(\alpha \int f(x) dx)' = \alpha (\int f(x) dx)'$$

Воспользуемся формулой (2.2). Так как $(\int f(x) dx)' = f(x)$, получим, что

$$(\alpha \int f(x) dx)' = \alpha f(x),$$

т. е. правая часть (4.1) является совокупностью первообразных для функции $\alpha f(x)$. Этим теорема 3 доказана.

Приведем примеры применения теоремы 3.

Пример 4.1. $\int 3^{x+2} dx = 9 \int 3^x dx = 9 \frac{3^x}{\ln 3} + C = \frac{3^{x+2}}{\ln 3} + C.$

Пример 4.2.

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C.$$

Проверка: $\left(\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C\right)' = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{9}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{9 + 4x^2} = \frac{1}{4x^2 + 9}.$

Пример 4.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C.$

Проверка: $\left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{9x^2}{16}}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}.$

II. Представление интеграла в виде суммы нескольких слагаемых

Теорема 4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx. \quad (4.2)$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве теоремы 3, продифференцируем правую часть равенства (4.2). Учитывая, что производная алгебраической суммы равна алгебраической сумме производных, получим

$$(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx)' = (\int f(x) dx)' \pm (\int g(x) dx)'$$

Так как $(\int f(x) dx)' = f(x)$ и $(\int g(x) dx)' = g(x)$, получим, что

$$(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Таким образом, теорема 4 доказана.

Замечание. Формула (4.2) может быть распространена на любое количество функций. При вычислении интегралов в правой части (4.2) возникает несколько произвольных постоянных. Из самого смысла неопределённого интеграла как совокупности первообразных вытекает, что не нужно выписывать все постоянные, а достаточно ввести одну произвольную постоянную в окончательное выражение.

Приведем примеры совместного применения теорем 3 и 4.

Пример 4.4.
$$\int \left(3\sqrt{x^3} - \frac{7}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{\sqrt{9x^2 + 1}} \right) dx =$$

$$= 3 \int x^{3/2} dx - 7 \int x^{-3/2} dx + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{9}}} =$$

$$= \frac{6}{5} x^{5/2} + 14x^{-1/2} + \frac{2}{3} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{9}} \right| + C.$$

Пример 4.5.
$$\int \left(\frac{5}{\sin^2 x} + 2^{x-4} - \frac{3}{7-2x^2} \right) dx =$$

$$= 5 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{1}{16} \int 2^x dx - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\frac{7}{2} - x^2} =$$

$$= -5 \operatorname{ctg} x + \frac{2^{x-4}}{\ln 2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{\frac{7}{2}}}{x + \sqrt{\frac{7}{2}}} \right| + C.$$

Следующие примеры показывают, что часто подынтегральную функцию приходится сначала преобразовать, подготовив её к применению теорем 3 и 4.

Пример 4.6.

$$\int \frac{5x^2 + \sqrt{x} + 3x}{x^2} dx = \int 5 dx + \int \frac{dx}{x^{3/2}} + 3 \int \frac{dx}{x} = 5x - 2x^{-1/2} + 3 \ln|x| + C.$$

Пример 4.7.

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{2(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx = \int 2 dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = 2x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 4.8.

$$\int \frac{3 \cos^2 x + 2 \sin^2 x + 4}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x + 6}{\cos^2 x} dx = \int \left(1 + \frac{6}{\cos^2 x} \right) dx =$$

$$= \int dx + 6 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = x + 6 \operatorname{tg} x + C.$$

Пример 4.9.

$$\int \frac{x^4 + 5}{x^2 + 2} dx = \int \frac{(x^4 - 4) + 9}{x^2 + 2} dx = \int (x^2 - 2) dx + 9 \int \frac{dx}{x^2 + 2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x + 9 \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

III. Формирование под знаком дифференциала линейного выражения $ax + b$.

Теорема 5. Пусть известно, что

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ т. е. } F'(x) = f(x).$$

Тогда

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad (4.3)$$

где a и b – числа.

Доказательство. Как обычно, продифференцируем правую часть формулы (4.3) и покажем, что ее производная равна подынтегральной функции, стоящей в левой части. Отметим, что функция $F(ax + b)$ является сложной функцией аргумента x и её можно представить в виде

$$F(ax + b) = F(z(x)), \text{ где } z(x) = ax + b.$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$F'_x(ax + b) = F'_x(z(x)) = F'_z(z(x)) \cdot z'(x) = f(z(x)) \cdot a = a f(ax + b).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{a} F(ax + b) \right)' = \frac{1}{a} (F(ax + b))' = \frac{1}{a} \cdot a \cdot f(ax + b) = f(ax + b).$$

Теорема 5 доказана.

Заметим, что формулу (4.3) можно получить, введя под знаком интеграла новую переменную $z = ax + b$. При этом следует помнить, что

$$dz = d(ax + b) = adx.$$

Выражая dx из правой части этого равенства, получим

$$dx = \frac{1}{a} dz.$$

Итак, установим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \int f(ax + b) dx &= \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) = \\ &= \frac{1}{a} \int f(z) dz = \frac{1}{a} F(z) + C = \frac{1}{a} F(ax + b) + C. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Именно цепочкой (4.4) и удобно пользоваться, вычисляя конкретные интегралы. При этом введение новой переменной можно опускать, переходя сразу к последнему равенству.

Пример 4.10. $I = \int \sin(5x + 2) dx = \frac{1}{5} \int \sin(5x + 2) d(5x + 2)$. Введём

новую переменную $z = 5x + 2$.

Тогда

$$I = \frac{1}{5} \int \sin z dz = -\frac{1}{5} \cos z + C = -\frac{1}{5} \cos(5x + 2) + C.$$

$$\text{Проверка: } \left(-\frac{1}{5} \cos(5x + 2) \right)' = -\frac{1}{5} \cdot (-\sin(5x + 2)) \cdot 5 = \sin(5x + 2).$$

Пример 4.11. $I = \int \frac{dx}{3 - 7x} = -\frac{1}{7} \int \frac{d(3 - 7x)}{3 - 7x}$. Введём новую переменную

$z = 3 - 7x$. Тогда $I = -\frac{1}{7} \int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{7} \ln|z| + C = -\frac{1}{7} \ln|3 - 7x| + C$.

Пример 4.12.

$$\int 3^{2x} dx = \frac{1}{2} \int 3^{2x} d(2x) = \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + C,$$

(см. пример 3.13).

Пример 4.13. $\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{(2x)^2 + 9} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C,$

(см. пример 4.2).

В примерах 4.14 и 4.15 подынтегральные функции предварительно представим в таком виде, чтобы можно было применить к ним таблицу интегралов.

Пример 4.14.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{17+6x+9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16+(1+3x)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{16+(3x+1)^2}}.$$

Введём новую переменную $z = 3x + 1$.

Тогда

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+16}} = \frac{1}{3} \ln \left| z + \sqrt{z^2+16} \right| + C = \\ = \frac{1}{3} \ln \left| 3x+1 + \sqrt{17+6x+9x^2} \right| + C.$$

Пример 4.15.

$$I = \int \frac{dx}{15-4x-4x^2} = \int \frac{dx}{16-(1+2x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{16-(2x+1)^2}.$$

Введём новую переменную $z = 2x + 1$.

Тогда

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2-16} = -\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4} \ln \left| \frac{z-4}{z+4} \right| + C = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{2x+5}{2x-3} \right| + C.$$

$$\text{Пример 4.16. } \int \sqrt[3]{4x+3} dx = \frac{1}{4} \int (4x+3)^{1/3} d(4x+3) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} (4x+3)^{4/3} + C = \frac{3}{16} (4x+3)^{4/3} + C.$$

$$\text{Пример 4.17. } \int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-9x}} = -\frac{1}{9} \int (2-9x)^{-1/5} d(2-9x) =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \frac{5}{4} (2-9x)^{4/5} + C = -\frac{5}{36} (2-9x)^{4/5} + C.$$

$$\text{Пример 4.18. } \int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(1-3x)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{d(1-3x)}{\sqrt{9-(1-3x)^2}} = -\frac{1}{3} \arcsin \frac{1-3x}{3} + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-1}{3} + C.$$

$$\text{Проверка: } \left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-1}{3} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(3x-1)^2}{3^2}}} = \frac{1}{\sqrt{9-(3x-1)^2}}.$$

$$\text{Пример 4.19. } \int \operatorname{tg}^2 5x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 5x} - 1 \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 5x} \right) dx - \int dx = \\ = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x)}{\cos^2(5x)} - x = \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x - x + C.$$

$$\text{Пример 4.20. } \int \frac{x+5}{\sqrt{x-2}} dx = \int \frac{(x-2)+7}{\sqrt{x-2}} dx =$$

$$= \int \sqrt{x-2} d(x-2) + 7 \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{x-2}} = \frac{2}{3} (x-2)^{3/2} + 14(x-2)^{1/2} + C.$$

$$\text{Пример 4.21. } \int \frac{x+2}{\sqrt{3x+4}} dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3x+4) + \frac{2}{3}}{\sqrt{3x+4}} dx = \\ = \frac{1}{3} \int \sqrt{3x+4} dx + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}} =$$

$$= \frac{1}{9} \int (3x+4)^{1/2} d(3x+4) + \frac{2}{9} \int (3x+4)^{-1/2} d(3x+4) =$$

$$= \frac{2}{27} (3x+4)^{3/2} + \frac{4}{9} (3x+4)^{1/2} + C.$$

Обратимся теперь к таблице и выведем предпоследние три интеграла, т. е. формулы (3.13), (3.14) и (3.15) с помощью теоремы 5.

- Вычислим интеграл (3.13) на основе интеграла (3.11) таблицы

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a} \right)}{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

- Интеграл (3.14) вычислим на основе интеграла (3.12) таблицы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

- Для вычисления интеграла (3.15) используем табличный интеграл (3.3)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \int \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} = \\ &= \frac{1}{2a} \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \frac{1}{2a} \ln|x-a| - \frac{1}{2a} \ln|x+a| + C = \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Свойство III, описанное в разделе 4, является частным случаем общего метода замены переменной в неопределённом интеграле. Основой метода является следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть известно, что

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ т. е. } F'(x) = f(x). \quad (5.1)$$

$$\text{Тогда } \int f(z(x)) \cdot z'(x) dx = F(z(x)) + C. \quad (5.2)$$

Доказательство. Продифференцируем правую часть формулы (5.2), учитывая, что $F(z(x))$ является сложной функцией аргумента x , а $F'_z(z) = f(z)$ по условию (5.1) теоремы. Тогда получаем

$$(F(z(x)) + C)'_x = F'_z(z(x)) \cdot z'_x(x) = f(z(x)) \cdot z'(x).$$

Следовательно, производная правой части (5.2) равна подынтегральной функции, стоящей в левой части (5.2). Это доказывает теорему 6.

Формулу (5.2) можно переписать так

$$\int f(z(x)) dz(x) = F(z(x)) + C. \quad (5.3)$$

Таким образом, переменная, по которой ведется интегрирование, не обязательно является независимой переменной. Она может быть функцией другой переменной. Метод замены переменной как раз в том и состоит, что вводится новая переменная интегрирования.

Этот метод эффективен прежде всего тогда, когда подынтегральное выражение можно представить в виде $f(z(x))dz(x)$, а первообразная $F(z)$ функции $f(z)$ уже известна. Далеко не все подынтегральные выражения допускают такое представление. С другой стороны, не всегда легко увидеть, что это представление возможно. В умении вводить замену переменной состоит, пожалуй, основная трудность при вычислении неопределенного интеграла.

Приведем примеры, в которых замена множителя $z'(x)dx$ на $dz(x)$ позволяет представить все подынтегральное выражение как выражение, зависящее от одной и той же функции $z(x)$.

$$\text{Пример 5.1. } I = \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}. \text{ Введём } z = \cos x.$$

$$\text{Тогда } I = -\int \frac{dz}{z} = -\ln|z| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$\text{Пример 5.2. } \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

$$\text{Пример 5.3. } I = \int \frac{xdx}{x^2 + 9} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 9)}{x^2 + 9}. \text{ Введём } z = x^2 + 9.$$

$$\text{Тогда } I = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln|z| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) + C.$$

$$\text{Пример 5.4. } I = \int \frac{xdx}{x^4 + 16} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 + 16}. \text{ Введём } z = x^2.$$

Тогда $I = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2 + 16} = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{z}{4} + C = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{4} + C.$

Пример 5.5. $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2 - 3}} = \frac{1}{4} \int \frac{d(2x^2 - 3)}{\sqrt{2x^2 - 3}}.$ Введём $z = 2x^2 - 3.$

Тогда $I = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \sqrt{z} + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 - 3} + C.$

Пример 5.6. $\int \frac{x^3 + 2x}{\sqrt{x^4 + 5}} dx = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 5}} + \int \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 5}} dx =$
 $= \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 + 5)}{\sqrt{x^4 + 5}} + \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{(x^2)^2 + 5}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + 5} + \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 5}) + C.$

Пример 5.7. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \int \frac{d(e^x + 2)}{e^x + 2} = \ln(e^x + 2) + C.$

Пример 5.8. $\int \frac{dx}{e^x + 2} = \int \frac{e^{-x} dx}{1 + 2e^{-x}} =$
 $= -\frac{1}{2} \int \frac{d(2e^{-x} + 1)}{2e^{-x} + 1} = -\frac{1}{2} \ln(2e^{-x} + 1) + C.$

Пример 5.9.

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4e^x + 3} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x + 2)^2 - 1} = \int \frac{d(e^x + 2)}{(e^x + 2)^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x + 1}{e^x + 3} \right| + C.$$

Пример 5.10. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 25)} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x - 25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\ln x - 5}{\ln x + 5} \right| + C.$

В следующих двух примерах применим искусственный приём, выделяющий дифференциал от функции $\operatorname{tg} x.$

Пример 5.11. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x + 3 \sin^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)} = \int \frac{\operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x}{3 \operatorname{tg}^2 x + 1}$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{d(3 \operatorname{tg}^2 x + 1)}{3 \operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{6} \ln |3 \operatorname{tg}^2 x + 1| + C.$$

Пример 5.12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4} = \int \frac{dx}{5 \cos^2 x + 4 \sin^2 x} =$
 $= \int \frac{dx}{\cos^2 x (5 + 4 \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2 \operatorname{tg} x)}{5 + (2 \operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$

В рассмотренных примерах мы выделяли в подынтегральном выражении дифференциал некоторой функции, которую и объявляли новой переменной интегрирования. Замену переменной можно осуществить и по-другому, заменив переменную интегрирования какой-то функцией. Обычно такой прием используется при интегрировании иррациональных функций. При этом новая функция выбирается так, чтобы избавиться от иррациональности.

Приведём примеры такой замены переменной.

Пример 5.13. Вычислить $\int \sqrt{4 - x^2} dx.$

Выберем замену в виде $x = 2 \sin t,$ где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$ Тем самым

$\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos t$ и иррациональное выражение исчезает, превращаясь в тригонометрическое. Далее

$$dx = 2 \cos t dt.$$

Здесь ещё раз подчеркнем, что мы перешли к новой переменной t во всем подынтегральном выражении, в том числе и в дифференциале.

Тогда

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = 4 \int \cos^2 t dt = 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C.$$

Теперь вернёмся к переменной $x:$

$$t = \arcsin \left(\frac{x}{2} \right); \quad \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}.$$

В итоге $\int \sqrt{4 - x^2} dx = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} + C.$

Пример 5.14. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$.

Выбираем замену в виде $x = z^2$. Тогда $dx = 2z dz$. В результате

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x} &= 2 \int \frac{z^2 dz}{1+z^2} = 2 \int \frac{(z^2+1)-1}{1+z^2} dz = 2 \int dz - 2 \int \frac{dz}{1+z^2} = \\ &= 2z - 2 \operatorname{arctg} z + C = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 7. Справедливо тождество

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x). \quad (6.1)$$

Доказательство. Проинтегрируем известное тождество вида

$$d(u(x) \cdot v(x)) = v(x) \cdot du(x) + u(x) \cdot dv(x). \quad (6.2)$$

Получим

$$\int d(u(x) \cdot v(x)) = \int v(x) \cdot du(x) + \int u(x) \cdot dv(x). \quad (6.3)$$

Но

$$\int d(u(x) \cdot v(x)) = u(x)v(x) + C. \quad (6.4)$$

Тогда из (6.3) следует (6.1), где постоянная C из равенства (6.4) включена в состав интеграла $\int v(x) du(x)$. Теорема 7 доказана.

Замечание. Обычно формулу (6.1) записывают коротко:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (6.5)$$

Формулу (6.1) имеет смысл применять тогда, когда $\int v du$ оказывается проще, чем $\int u dv$. Чаще всего это «упрощение» происходит в том случае, когда производная $u'(x)$ имеет более «простой» вид, чем сама функция $u(x)$.

Пусть, например, нужно вычислить $\int x \sin 5x dx$. Принимаем в качестве $u(x)$ функцию x . Тогда $du(x) = dx$. В качестве $dv(x)$ возьмем дифференциальное выражение $\sin 5x dx$ и вычислим $v(x)$:

$$v(x) = \int \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$$

Поскольку в тождестве (6.1) нужна лишь одна первообразная от функции $v(x)$, можем положить $C = 0$. Итак,

$$\int x \sin 5x dx = -\frac{1}{5} x \cos 5x + \frac{1}{5} \int \cos 5x dx = -\frac{1}{5} x \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C.$$

Отметим, что в результате применения формулы (6.1) мы свели вычисление неизвестного интеграла $\int x \sin 5x dx$ к вычислению известного интеграла $\int \cos 5x dx$.

Перечислим ниже типы интегралов, которые следует вычислять, используя формулу интегрирования по частям (6.1).

- I. $\int x^n e^{ax+b} dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad a, b \in \mathbb{R}.$
- II. $\int x^n \sin(ax+b) dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad a, b \in \mathbb{R}.$
- III. $\int x^n \cos(ax+b) dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad a, b \in \mathbb{R}.$
- IV. $\int x^a \ln x dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq -1.$
- V. $\int x^m \operatorname{arctg} x dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$
- VI. $\int x^m \arcsin x dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$

В интегралах типов I, II, III в качестве $u(x)$ следует выбрать x^n , в качестве $dv(x)$ – оставшуюся часть подынтегрального выражения. Формулу (6.1) для этих интегралов придется применять n раз. В интегралах типа IV в качестве $u(x)$ принимается $\ln x$, в качестве $dv(x)$ принимает-

ся $x^a dx$. В интегралах типов V, VI в качестве $u(x)$ принимается обратная тригонометрическая функция, а в качестве $dv(x)$ принимается $x^m dx$.

Приведем примеры интегрирования по частям.

Пример 6.1. $I = \int \ln x dx$. Положим $u = \ln x$, $dv = dx$. Получим

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x. \quad \text{Тогда } I = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Пример 6.2. $I = \int \arcsin x dx$. Положим $u = \arcsin x$, $dv = dx$.

$$\text{Получим } du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Пример 6.3. $I = \int \operatorname{arctg} x dx$. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$.

$$\text{Получим } du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Пример 6.4. $I = \int \sqrt[3]{x} \ln x dx$. Полагаем $u = \ln x$, $dv = \sqrt[3]{x} dx$.

$$\text{Получим } du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}.$$

Тогда

$$I = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{9}{16} x^{\frac{4}{3}} + C.$$

Пример 6.5. $I = \int x^2 e^{3x-2} dx$. Положим $u = x^2$, $dv = e^{3x-2} dx$.

Найдём $du = 2x dx$, $v = \int e^{3x-2} dx = \frac{1}{3} e^{3x-2}$. Получим

$$I = \frac{1}{3} e^{3x-2} x^2 - \frac{2}{3} \int x e^{3x-2} dx.$$

Снова интегрируем по частям. Положим $u_1 = x$, $dv_1 = e^{3x-2} dx$.

Получим $du_1 = dx$, $v_1 = \frac{1}{3} e^{3x-2}$.

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} e^{3x-2} x^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} e^{3x-2} x - \frac{1}{3} \int e^{3x-2} dx \right) = \frac{1}{3} x^2 e^{3x-2} - \\ &- \frac{2}{9} x e^{3x-2} + \frac{2}{9} \int e^{3x-2} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x-2} - \frac{2}{9} x e^{3x-2} + \frac{2}{27} e^{3x-2} + C. \end{aligned}$$

Пример 6.6. $I = \int \ln^2 x dx$. Положим $u = \ln^2 x$, $dv = dx$.

Вычислим $du = \frac{2 \ln x}{x} dx$, $v = x$. Тогда $I = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx$.

Интеграл $\int \ln x dx$ вычислен в примере 6.1. Получим

$$I = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

Пример 6.7. $I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Положим $u = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Получим $du = dx$, $v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$.

Тогда

$$I = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C.$$

Пример 6.8. $I = \int \frac{\ln x}{x^3} dx$. Положим $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^3}$. Получим

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2}.$$

Тогда

$$I = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Интегралы, приводящиеся к самим себе

Иногда в результате применения формулы (6.1) мы получаем новый интеграл, который отличается от исходного интеграла $\int u dv$ лишь множителем. Тогда формулу (6.1) можно рассматривать как уравнение относительно $\int u dv$. Такие интегралы называются интегралами, приводящимися к себе.

Пример 6.9. $I = \int \sqrt{x^2 + a} dx$, где $a \neq 0$.

Применим интегрирование по частям, где $u = \sqrt{x^2 + a}$, $dv = dx$. Тогда

$$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}}, \quad v = x.$$

Получим

$$I = \int \sqrt{x^2 + a} dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx. \quad (6.6)$$

Проведём тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx &= \int \frac{(x^2 + a) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \sqrt{x^2 + a} dx - a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \\ &= I - a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C. \end{aligned}$$

Подставляем полученный результат в формулу (6.6).

Тогда

$$I = x\sqrt{x^2 + a} - I + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

Мы получили уравнение относительно I . Решаем его. В итоге

$$I = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| \right) + C.$$

Пример 6.10. $I = \int e^{ax} \sin bxdx$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Применяем интегрирование по частям. Положим $u = e^{ax}$, $dv = \sin bxdx$.

Получим $du = ae^{ax} dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$. Тогда

$$I = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx. \quad (6.7)$$

Снова применим интегрирование по частям в интеграле

$I_1 = \int e^{ax} \cos bxdx$. Положим $u_1 = e^{ax}$, $dv_1 = \cos bxdx$. Найдём

$du_1 = ae^{ax} dx$, $v_1 = \frac{1}{b} \sin bx$. Тогда $I_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx$.

Подставим интеграл I_1 в (6.7) и получим уравнение относительно I .

$$I = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} I.$$

Решая это уравнение, определяем I .

$$I = \frac{(-b \cos bx + a \sin bx)e^{ax}}{(a^2 + b^2)}.$$

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 3. Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) будем называть частное от деления двух многочленов. Общий вид рациональной дроби таков:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n , а $Q_m(x)$ – многочлен степени m .

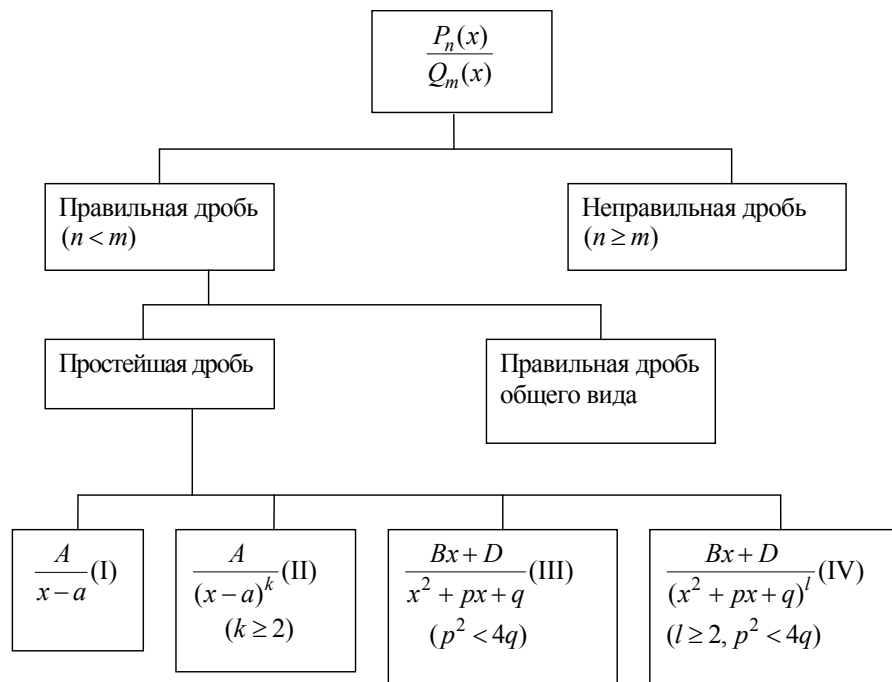
Если $n < m$, то рациональная дробь называется *правильной*, если $n \geq m$, то рациональная дробь называется *неправильной*. Из общей совокупности правильных дробей выделяются четыре специальных типа дробей, называемых *простейшими*. Простейшие дроби имеют вид

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geq 2, \text{ целое}),$$

$$\frac{Bx+D}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^l} \quad (l \geq 2, \text{ целое}),$$

где A, B, D, a, p, q – действительные числа, а трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней ($p^2 < 4q$), т. е. не раскладывается на множители первой степени.

В целом классификацию рациональных дробей можно представить следующим образом.



Интегралы от рациональных дробей всегда являются берущимися. Покажем это, двигаясь по приведённой здесь схеме, поднимаясь с нижнего уровня на верхний уровень.

Интегрирование простейших дробей

1. Интеграл типа I берётся с использованием формулы (3.3) табл. 1 и линейной замены

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

2. Интеграл типа II берётся с использованием формулы (3.2) табл. 1 и линейной замены

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{-k+1} (x-a)^{-k+1} + C =$$

$$= -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

(Здесь $k \geq 2$.)

3. Рассмотрим интеграл типа III. $I = \int \frac{Bx+D}{x^2+px+q} dx$, где $p^2 < 4q$.

Чтобы вычислить интеграл I , найдём сначала производную знаменателя подынтегральной функции:

$$(x^2 + px + q)' = 2x + p.$$

Далее представим числитель как сумму двух слагаемых:

$$Bx + D = \frac{B}{2}(2x + p) + \left(-\frac{B}{2}p + D\right),$$

т. е. «выделим» в числителе производную знаменателя. Теперь I можно представить как сумму двух слагаемых:

$$I = \frac{B}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(-\frac{B}{2}p + D\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}. \quad (7.1)$$

Вычислим каждый из интегралов, стоящих в правой части (7.1), отдельно:

$$\begin{aligned} & \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln(x^2+px+q) + C \\ & \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})} = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{(D-\frac{Bp}{2})}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C. \quad (7.2)$$

Заметим, что x^2+px+q всегда можно представить как сумму квадратов в силу того, что $q-\frac{p^2}{4} > 0$.

Формула (7.2) сложна для запоминания. Как правило, ею не пользуются, а непосредственно применяют к конкретному интегралу изложенный здесь метод.

Приведём примеры.

Пример 7.1. $\int \frac{5dx}{(2-x)^3} = -5 \int \frac{dx}{(x-2)^3} = \frac{5}{2} \frac{1}{(x-2)^2} + C.$

Пример 7.2. $I = \int \frac{(3x+7)dx}{x^2+4x+8}$. Найдем производную знаменателя $(x^2+4x+8)' = 2x+4$. Выделим эту производную в числителе

$$3x+7 = \frac{3}{2}(2x+4) + 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+8} + \int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8} + \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4} = \frac{3}{2} \ln(x^2+4x+8) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 7.3. $I = \int \frac{(7-5x)}{x^2+6x+25} dx$. Воспользуемся формулами

$$(x^2+6x+25)' = 2x+6, \quad 7-5x = -\frac{5}{2}(2x+6) + 22. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{5}{2} \int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+25} + 22 \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \\ &= -\frac{5}{2} \ln(x^2+6x+25) + \frac{11}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{4} + C. \end{aligned}$$

4. Для интеграла типа IV $I = \int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^l} dx$, где $l \geq 2$, $p^2 < 4q$,

непосредственное интегрирование является столь громоздким, что следует пользоваться справочником.

Интегрирование правильных дробей общего вида

Рассмотрим правильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n < m$), которая не является простейшей дробью. Чтобы проинтегрировать такую функцию, её нужно представить в виде суммы простейших дробей.

Представление правильной дроби в виде суммы простейших дробей осуществляется по следующему правилу.

1. Знаменатель $Q_m(x)$ следует разложить на множители вида

$$(x-a)^k \text{ и } (x^2+px+q)^r,$$

где $k, r \geq 1$, а $p^2 < 4q$. Заметим, что $(x^2 + px + q)$ при условии $p^2 < 4q$ на множители разложить нельзя.

2. Следует построить «общий вид» представления с неопределёнными пока коэффициентами. При этом каждому множителю $(x - a)^k$ должна соответствовать сумма дробей

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}, \quad (7.3)$$

а каждому множителю $(x^2 + px + q)^r$ должна соответствовать сумма дробей

$$\frac{B_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + D_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_rx + D_r}{(x^2 + px + q)^r}, \quad (7.4)$$

где коэффициенты A_i ($i = 1, \dots, k$), B_j, D_j ($j = 1, \dots, r$) пока неизвестны и представлены буквами. В суммах (7.3) и (7.4) должны обязательно присутствовать все перечисленные выше слагаемые (k слагаемых в сумме (7.3) и r слагаемых в (7.4)). Общий вид представления содержит в себе все суммы (7.3) и (7.4).

3. Следует определить коэффициенты представления, полученного в пункте 2, исходя из тождественного равенства правильной дроби и суммы простейших дробей, полученной в пункте 2.

Покажем на конкретных примерах, как пользоваться данным правилом.

Пример 7.4. $I = \int \frac{(5x + 2)dx}{x^3 + 4x^2 + 4x}.$

Применим сформулированное выше правило.

1. Разложим знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла, на множители:

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x + 2)^2.$$

2. Построим для дроби, стоящей под знаком интеграла, представление в виде суммы простейших дробей с неизвестными пока коэффициентами

$$\frac{5x + 2}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x + 2} + \frac{B_2}{(x + 2)^2}. \quad (7.5)$$

Множитель x имеет степень 1, и ему соответствует в сумме одно слагаемое, множитель $(x + 2)$ имеет степень 2, и ему в сумме соответствуют два слагаемых.

3. Приведём правую часть равенства (7.5) к общему знаменателю. Получим

$$\frac{5x + 2}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{A(x + 2)^2 + B_1x(x + 2) + B_2x}{x(x + 2)^2}. \quad (7.6)$$

Равенство (7.6) должно выполняться при всех значениях x . Поскольку знаменатели дробей, стоящих в левой и правой частях (7.6), одинаковы, числители этих дробей должны быть тождественно равными. Таким образом,

$$5x + 2 = A(x + 2)^2 + B_1x(x + 2) + B_2x \quad (7.7)$$

при всех значениях x . Чтобы определить A, B_1 и B_2 , подставим в (7.7) три каких-либо значения x и получим систему трёх уравнений относительно неизвестных A, B_1 и B_2 . Если представление правильной дроби в виде суммы простейших дробей составлено правильно, то эта система имеет единственное решение. Значения x обычно выбирают так, чтобы расчёты были как можно более простыми. В нашем случае выгодно выбрать $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ и $x_3 = -1$. Последовательно подставляя эти значения x в тождество (7.7), получим систему

$$\begin{cases} -8 = -2B_2; \\ 2 = 4A; \\ -3 = A - B_1 - B_2. \end{cases} \quad (7.8)$$

Система (7.8) имеет решение:

$$A = \frac{1}{2}; B_2 = 4; B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Замечание. Если коэффициенты A, B_1, B_2 найдены верно, то слева и справа в (7.7) стоят одинаковые многочлены. Следовательно, их коэффициенты при одинаковых степенях должны быть равны. Установим это с помощью табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты при степенях x	Слева (7.7)	Справа (7.7)
x^2	0	$A + B_1 = 0$
x	5	$4A + 2B_1 + B_2 = 2 - 1 + 4 = 5$
x^0	2	$4A = 2$

Таким образом, коэффициенты найдены верно. Итак, мы получили тождество

$$\frac{5x + 2}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Тогда

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + 4 \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{4}{x+2} + C.$$

Пример 7.5. $I = \int \frac{(x^2 + 3x + 3)dx}{(x+1)(x^2 + 4x + 5)}.$

Представим дробь, стоящую под знаком интеграла, в виде суммы простейших дробей. Так как оба множителя, стоящих в знаменателе, имеют степень 1, представление будет иметь вид

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + D}{x^2 + 4x + 5}. \quad (7.9)$$

Заметим, что если в знаменателе стоит квадратный трёхчлен $(x^2 + 4x + 5)$, то в числителе обязательно должен стоять многочлен первой степени $(Bx + D)$.

Приводим правую часть (7.9) к общему знаменателю. Тогда

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{A(x^2 + 4x + 5) + (Bx + D)(x+1)}{(x+1)(x^2 + 4x + 5)},$$

откуда следует

$$x^3 + 3x + 3 = A(x^2 + 4x + 5) + (Bx + D)(x+1). \quad (7.10)$$

Нужно определить три коэффициента A, B и D . Используем удобные значения: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Подставим их последовательно в (7.10). Получим

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 2A; \\ 3 &= 5A + D; \\ 7 &= 10A + 2B + 2D. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Система (7.11) имеет решение:

$$A = \frac{1}{2}; B = \frac{1}{2}; D = \frac{1}{2}.$$

Проверим полученный результат по табл. 3.

Таблица 3

Коэффициенты при степенях x	Слева (7.10)	Справа (7.10)
x^2	1	$A + B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
x	3	$4A + B + D = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$
x^0	3	$5A + D = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

Получено тождество

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x^2 + 4x + 5)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{x+1}{2(x^2 + 4x + 5)}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

Отдельно вычислим $I_1 = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+4x+5}$, используя формулы

$$(x^2+4x+5)' = 2x+4, \quad x+1 = \frac{1}{2}(2x+4) - 1,$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+5} - \int \frac{dx}{x^2+4x+5} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} - \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) - \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Итак,

$$I = \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln(x^2+4x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Пример 7.6. $I = \int \frac{(3x+1)dx}{(x^2+2x-3)(x^2+1)}$.

Разлагаем знаменатель на множители:

$$(x^2+2x-3)(x^2+1) = (x-1)(x+3)(x^2+1).$$

Выписываем общий вид представления дроби в виде суммы простейших дробей и сразу же приводим сумму дробей к общему знаменателю:

$$\frac{(3x+1)dx}{(x^2+2x-3)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Ex+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+3)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Ex+D)(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x^2+1)}.$$

Составляем равенство числителей двух равных дробей с одинаковыми знаменателями:

$$3x+1 = A(x+3)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Ex+D)(x-1)(x+3). \quad (7.12)$$

Выбираем удобные значения x : $x_1=1$, $x_2=-3$, $x_3=0$, $x_4=-1$ и составляем систему уравнений для определения четырёх коэффициентов: A, B, E, D .

$$\left. \begin{aligned} 4 &= 8A; \\ -8 &= -40B; \\ 1 &= 3A - B - 3D; \\ -2 &= 4A - 4B + 4E - 4D. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Решаем систему (7.13): $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{5}$,

$$D = \frac{1}{3}(-1 - B + 3A) = \frac{1}{3}(-1 - \frac{1}{5} + \frac{3}{2}) = \frac{1}{10},$$

$$E = \frac{1}{2}(-1 - 2A + 2B + 2D) = \frac{1}{2}(-1 - 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}) = -\frac{7}{10}.$$

Проверим полученные значения согласно табл. 4.

Таблица 4

Коэффициенты при степенях x	Слева (7.12)	Справа (7.12)
x^3	0	$A+B+E = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} - \frac{7}{10} = 0$
x^2	0	$3A-B+D+2E = \frac{15}{10} - \frac{2}{10} + \frac{1}{10} - \frac{14}{10} = 0$
x	3	$A+B-3E+2D = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} - \frac{21}{10} + \frac{2}{10} = 3$
x^0	1	$3A-B-3D = \frac{15}{10} - \frac{2}{10} - \frac{3}{10} = 1$

Таким образом,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{10} \int \frac{1-7x}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{5} \ln|x+3| + \frac{1}{10} \operatorname{arctg} x - \frac{7}{20} \ln(x^2+1) + C.$$

Интегрирование неправильных дробей

Чтобы проинтегрировать неправильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $n \geq m$, её следует представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого сначала следует представить $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = Q_m(x)M(x) + R(x), \quad (7.14)$$

где степень многочлена $R(x)$ меньше, чем степень многочлена $Q_m(x)$.

Представление (7.14) равносильно делению многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ с остатком. В формуле (7.14) многочлен $M(x)$ является частным, а многочлен $R(x)$ – остатком. Затем равенство (7.14) следует почленно поделить на $Q_m(x)$. Мы получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

Здесь $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь.

Представление (7.14) иногда легко угадать (если $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ имеют достаточно простой вид), но, как правило, оно получается в результате деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ «уголком».

Приведём примеры.

Пример 7.7. $\int \frac{x+5}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)+2}{x+3} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x+3}\right) dx =$

$$= \int dx + 2 \int \frac{dx}{x+3} = x + 2 \ln|x+3| + C.$$

Пример 7.8. $\int \frac{2x^2+3x+4}{x^2+3} dx = \int \frac{2(x^2+3)+(3x-2)}{x^2+3} dx =$

$$= \int 2dx + \int \frac{3x-2}{x^2+3} dx = 2x + \frac{3}{2} \ln(x^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 7.9. $I = \int \frac{x^3+5x^2+3x}{x^2+2x+5} dx$. Подынтегральная функция

является неправильной рациональной дробью. Разделим числитель этой дроби на знаменатель с остатком.

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 + 3x \Big| x^2 + 2x + 5 \\ \underline{x^3 + 2x^2 + 5x} \\ 3x^2 - 2x \\ \underline{3x^2 + 6x + 15} \\ -8x - 15 \end{array}$$

$$I = \int \frac{(x^2+2x+5)(x+3) - 8x - 15}{x^2+2x+5} dx = \int (x+3) dx - \int \frac{(8x+15) dx}{x^2+2x+5}.$$

Вычислим отдельно

$$\int \frac{(8x+15) dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{4(2x+2)+7}{x^2+2x+5} dx = 4 \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 7 \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$= 4 \ln(x^2+2x+5) + \frac{7}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Окончательно

$$I = \frac{x^2}{2} + 3x - 4 \ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 7.10. $I = \int \frac{x^4+2}{x^2+2x-3} dx$. Поделим числитель на знаменатель с остатком.

$$\begin{array}{r} x^4 + 2 \Big| x^2 + 2x - 3 \\ \underline{x^4 + 2x^3 - 3x^2} \\ -2x^3 + 3x^2 + 2 \\ \underline{-2x^3 - 4x^2 + 6x} \\ 7x^2 - 6x + 2 \\ \underline{7x^2 + 14x - 21} \\ -20x + 23 \end{array}$$

$$I = \int \left(x^2 - 2x + 7 - \frac{20x-23}{x^2+2x-3} \right) dx = \int (x^2 - 2x + 7) dx - \int \frac{20x-23}{x^2+2x-3} dx.$$

Вычислим отдельно $I_1 = \int \frac{20x-23}{x^2+2x-3} dx$. Разложим правильную дробь на простейшие дроби.

$$\frac{20x-23}{x^2+2x-3} = \frac{20x-23}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}.$$

$$20x-23 = A(x-1) + B(x+3).$$

Подставим в полученное тождество последовательно значения переменной $x=1$, $x=-3$. Тогда

$$\left. \begin{array}{l} -3 = 4B \\ -83 = -4A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -\frac{3}{4} \\ A = \frac{83}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{Получим } I_1 = \int \frac{83}{4(x+3)} dx - \int \frac{3}{4(x-1)} dx.$$

Окончательно

$$I = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x - \frac{83}{4} \ln|x+3| + \frac{3}{4} \ln|x-1| + C.$$

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

I. Интегрирование произведений синусов и косинусов различных аргументов

Для вычисления интегралов этого типа нужно последовательно осуществлять преобразование произведений пар тригонометрических функций в суммы пар тригонометрических функций согласно формулам:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Приведём примеры.

Пример 8.1. $\int \sin x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin(-x)) dx =$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 3x - \sin x) dx = -\frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x + C.$$

Пример 8.2. $\int \cos x \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x) \sin 2x dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 4x \sin 2x dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (\sin 6x - \sin 2x) dx + \frac{1}{4} \int \sin 4x dx =$$

$$= -\frac{1}{24} \cos 6x + \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + C.$$

Пример 8.3. $\int \cos \frac{x}{2} \cos(2x+1) dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\cos \left(\frac{5x}{2} + 1 \right) + \cos \left(\frac{3x}{2} + 1 \right) \right) dx = \frac{1}{5} \sin \left(\frac{5}{2} x + 1 \right) + \frac{1}{3} \sin \left(\frac{3}{2} x + 1 \right) + C.$$

II. $\int \sin x \cos x dx$

Здесь следует выделить два случая:

- 1) одно из чисел: m или n является целым, положительным, нечетным;
- 2) оба числа m и n являются целыми, неотрицательными ($m^2 + n^2 \neq 0$), чётными.

В случае 1 нужно выделить из нечетной степени $\sin^m x$ или $\cos^n x$ один множитель (соответственно $\sin x$ или $\cos x$) и объединить этот множитель с дифференциалом dx . Далее, нужно выразить подынтегральное выражение только через $\cos x$ или только через $\sin x$, воспользовавшись тем, что $\sin x dx = -d \cos x$, $\cos x dx = d \sin x$, а $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Приведём примеры.

Пример 8.4. $I = \int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (\sin^2 x \cos^2 x)(\sin x) dx =$

$= -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d \cos x.$ Сделаем замену переменной

$z = \cos x.$ Получим $I = -\int (1 - z^2)z^2 dz = \int (z^4 - z^2) dz =$

$= \frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$

Пример 8.5. $\int \cos x \sin^{11} x dx = \int \sin^{11} x d \sin x = \frac{\sin^{12} x}{12} + C.$

Пример 8.6. $I = \int \cos^5 x \sqrt[3]{\sin x} dx = \int \cos^4 x \sqrt[3]{\sin x} (\cos x) dx =$

$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \sqrt[3]{\sin x} d \sin x.$ Введем новую переменную $z = \sin x.$

Тогда $I = \int (1 - z^2)^2 \cdot (\sqrt[3]{z}) dz = \int (z^{\frac{1}{3}} - 2z^{\frac{7}{3}} + z^{\frac{13}{3}}) dz =$

$= \frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}} - 2 \cdot \frac{3}{10} z^{\frac{10}{3}} + \frac{3}{16} z^{\frac{16}{3}} + C =$

$= \frac{3}{4} (\sin x)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{5} (\sin x)^{\frac{10}{3}} + \frac{3}{16} (\sin x)^{\frac{16}{3}} + C.$

Заметим, что если обе степени m и n положительные и нечетные, то отделить множитель выгодно от степени с меньшим показателем.

Пример 8.7. $\int \cos^3 x \sin^7 x dx = \int \cos^2 x \sin^7 x \cdot \cos x dx =$

$= \int (1 - \sin^2 x) \sin^7 x d \sin x = \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + C.$

В случае 2 нужно воспользоваться формулами

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

позволяющими понизить степень функций, входящих в подынтегральное выражение.

Пример 8.8. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

Пример 8.9.

$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx =$

$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$

Пример 8.10. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx =$

$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx =$

$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx =$

$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$

III. $\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^n x dx$ ($n = 1, 2, \dots$)

Ранее уже были найдены

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

Для вычисления интегралов от прочих натуральных степеней функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ следует воспользоваться формулами

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

соответственно записав предварительно интегрируемые функции в виде

$$\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x;$$

$$\operatorname{ctg}^n x = \operatorname{ctg}^{n-2} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x.$$

При этом следует учесть, что $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$, а $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Пример 8.11.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Пример 8.12.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^3 x dx &= \int \operatorname{ctg} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x} - \int \operatorname{ctg} x dx = \\ &= -\int \operatorname{ctg} x d \operatorname{ctg} x - \int \operatorname{ctg} x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C. \end{aligned}$$

Пример 8.13. $\int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - (\operatorname{tg} x - x) + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим интегралы вида

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, следует вычислить производную подкоренного выражения:

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$$

Затем в числителе подынтегральной функции следует выделить эту производную, поделив «уголком» числитель на полученную производную, т. е. представить числитель в виде суммы двух слагаемых:

$$Ax + B = \frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right).$$

Тогда

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (9.1)$$

Рассмотрим каждый из интегралов, стоящих в правой части (9.1), отдельно.

а) $I = \int \frac{(2ax + b) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Положим $z = ax^2 + bx + c$. Тогда

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + C = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C;$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)}}. \quad (9.2)$

Здесь в подкоренном выражении выделен полный квадрат. В результате правая часть равенства (9.2) приведена к табличному интегралу. Если $a > 0$, это интеграл типа (3.16) из табл. 1, если $a < 0$ – интеграл типа (3.14).

Пример 9.1. $I = \int \frac{(5x + 2) dx}{\sqrt{4x^2 + 8x + 10}}$. Воспользуемся формулами

$$(4x^2 + 8x + 10)' = 8x + 8, \quad 5x + 2 = \frac{5}{8}(8x + 8) - 3. \quad \text{Тогда}$$

$$I = \frac{5}{8} \int \frac{(8x + 8) dx}{\sqrt{4x^2 + 8x + 10}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 8x + 10}} =$$

10. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

$$= \frac{5}{8} \int \frac{d(4x^2 + 8x + 10)}{\sqrt{4x^2 + 8x + 10}} - 3 \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4(x+1)^2 + 6}} =$$

$$= \frac{5}{4} \sqrt{4x^2 + 8x + 10} - \frac{3}{2} \ln |2(x+1) + \sqrt{4x^2 + 8x + 10}| + C.$$

Пример 9.2. $I = \int \frac{3x+7}{\sqrt{10+4x-x^2}} dx$. Воспользуемся формулами

$$(10+4x-x^2)' = -2x+4, \quad 3x+7 = -\frac{3}{2}(-2x+4)+13. \text{ Получим}$$

$$I = -\frac{3}{2} \int \frac{d(10+4x-x^2)}{\sqrt{10+4x-x^2}} + 13 \int \frac{dx}{\sqrt{10+4x-x^2}} =$$

$$= -3\sqrt{10+4x-x^2} + 13 \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{14-(x-2)^2}} =$$

$$= -3\sqrt{10+4x-x^2} + 13 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{14}} + C.$$

Пример 9.3. $I = \int \frac{2-x}{\sqrt{x^2+6x+25}} dx$. Воспользуемся формулами

$$(x^2+6x+25)' = 2x+6, \quad -x+2 = -\frac{1}{2}(2x+6)+5. \text{ Получим}$$

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+6x+25}} + 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+25}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+6x+25)}{\sqrt{x^2+6x+25}} + 5 \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2+16}} =$$

$$= -\sqrt{x^2+6x+25} + 5 \ln |(x+3) + \sqrt{x^2+6x+25}| + C.$$

Ниже приведены задачи, решение которых требует применения нескольких приемов интегрирования. Почти во всех этих задачах нужно сначала угадать выгодную замену переменной, которая привела бы в итоге к какой-нибудь стандартной формуле.

Пример 10.1.

$$I = \int \sin^3(1-5x) \cos^2(1-5x) dx. \text{ Сделаем замену переменной}$$

$$1-5x = z. \text{ Тогда } I = -\frac{1}{5} \int \sin^3 z \cos^2 z dz = \frac{1}{5} \int \sin^2 z \cos^2 z d \cos z =$$

$$= \frac{1}{5} \int (1 - \cos^2 z) \cos^2 z d \cos z. \text{ Снова введем новую переменную } \cos z = u.$$

$$\text{Тогда } I = \frac{1}{5} \int u^2 du - \frac{1}{5} \int u^4 du = \frac{u^3}{15} - \frac{u^5}{25} + C. \text{ Возвращаясь к старой пере-}$$

$$\text{менной по формуле } u = \cos(1-5x), \text{ получим}$$

$$I = \frac{\cos^3(1-5x)}{15} - \frac{\cos^5(1-5x)}{25} + C.$$

Пример 10.2. $\int \sin 3x \cos^2 x dx = \int \sin 3x \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx =$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 3x \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 3x dx + \frac{1}{2} \int \sin 3x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int \sin 3x d3x + \frac{1}{4} \int (\sin x + \sin 5x) dx =$$

$$= -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{20} \cos 5x + C.$$

Пример 10.3.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}} = \int \frac{d\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Пример 10.4. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C.$

Пример 10.5. $\int \arcsin(3x+2) dx$. Введем новую переменную

$z = 3x+2$ и получим $I = \frac{1}{3} \int \arcsin z dz$ (см. пример 6.2 из раздела 6

«Интегрирование по частям»).

Тогда

$$I = \frac{1}{3} \left(z \arcsin z + \sqrt{1-z^2} + C \right) = \\ = x \arcsin(3x+2) + \frac{2}{3} \arcsin(3x+2) + \frac{1}{3} \sqrt{1-(3x+2)^2} + C.$$

Пример 10.6. $I = \int e^x \sin^2(5e^x + 2) dx$. Введем новую переменную

$z = 5e^x + 2$ и найдем $dz = 5e^x dx$. Получим $I = \frac{1}{5} \int \sin^2 z dz =$

$$= \frac{1}{10} \int (1 - \cos 2z) dz = \frac{z}{10} - \frac{1}{20} \sin 2z + C =$$

$$= \frac{5e^x + 2}{10} - \frac{1}{20} \sin(10e^x + 4) + C = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{20} \sin(10e^x + 4) + C.$$

Пример 10.7. $I = \int \frac{\sin^3(2 \ln x + 7)}{x} dx$. Сделаем замену переменной

$z = 2 \ln x + 7$. Тогда $dz = \frac{2dx}{x}$. Получим $I = \frac{1}{2} \int \sin^3 z dz =$

$$= -\frac{1}{2} \int \sin^2 z d \cos z = -\frac{1}{2} \int (1 - \cos^2 z) d \cos z =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\cos z - \frac{\cos^3 z}{3} \right) + C = \frac{\cos^3(2 \ln x + 7)}{6} - \frac{\cos(2 \ln x + 7)}{2} + C.$$

Пример 10.8. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{\cos x}} dx = 2 \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt[5]{\cos x}} dx = -2 \int \cos^{\frac{4}{5}} x d \cos x =$

$$= -\frac{10}{9} \cos^{\frac{9}{5}} x + C.$$

Пример 10.9. $I = \int \frac{\sin^4(\operatorname{ctg} x)}{\sin^2 x} dx$. Введем новую переменную

$z = \operatorname{ctg} x$ и найдем $dz = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Тогда

$$I = -\int \sin^4 z dz = -\frac{1}{4} \int (1 - \cos 2z)^2 dz = -\frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2z + \cos^2 2z) dz =$$

$$= -\frac{z}{4} + \frac{1}{4} \sin 2z - \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4z) dz = -\frac{3z}{8} + \frac{1}{4} \sin 2z - \frac{1}{32} \sin 4z + C =$$

$$= -\frac{3}{8} \operatorname{ctg} x + \frac{1}{4} \sin(2 \operatorname{ctg} x) - \frac{1}{32} \sin(4 \operatorname{ctg} x) + C.$$

Пример 10.10. $I = \int \frac{\arcsin x dx}{(\arcsin^2 x + 4 \arcsin x - 5) \sqrt{1-x^2}}$. Сделаем

замену $z = \arcsin x$ и найдем $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Получим

$I = \int \frac{zdz}{z^2 + 4z - 5} = \int \frac{zdz}{(z-1)(z+5)}$. Представим правильную дробь как сумму простейших дробей:

$$\frac{z}{(z-1)(z+5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+5} = \frac{A(z+5) + B(z-1)}{(z-1)(z+5)}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов выпишем тождественное равенство исходного и вновь полученного числителей:

$$z = A(z+5) + B(z-1).$$

Придадим переменной значение $z = 1$: $1 = 6A \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$. Затем

при $z = -5$ тождество примет вид: $-5 = -6B \Leftrightarrow B = \frac{5}{6}$.

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{6} \int \frac{dz}{z-1} + \frac{5}{6} \int \frac{dz}{z+5} = \frac{1}{6} \ln|z-1| + \frac{5}{6} \ln|z+5| + C = \\ &= \frac{1}{6} \ln|\arcsin x - 1| + \frac{5}{6} \ln|\arcsin x + 5| + C. \end{aligned}$$

Пример 10.11. $I = \int x^2 \operatorname{arctg} x dx$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим $u = \operatorname{arctg} x, dv = x^2 dx$. Найдем

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \text{ и } v = \int x^2 = \frac{x^3}{3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \left(\frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^2 \cdot x dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx^2 = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx^2 = \\ &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \int dx^2 + \frac{1}{6} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln|1+x^2| + C. \end{aligned}$$

Пример 10.12. $I = \int x^2 \ln(x+2) dx$. Применим здесь формулу

интегрирования по частям, полагая $u = \ln(x+2), dv = x^2 dx$. Тогда

$du = \frac{dx}{x+2}, v = \frac{x^3}{3}$. Отсюда $I = \frac{x^3}{3} \ln(x+2) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x+2} dx$. Выделим

в неправильной рациональной дроби целую часть делением числителя на знаменатель.

$$\begin{array}{r} \frac{-x^3}{x^3+2x^2} \quad \left| \frac{x+2}{x^2-2x+4} \right. \\ - \quad -2x^2 \\ \hline -2x^2-4x \\ \quad \quad -4x \\ \quad \quad \quad \underline{4x+8} \\ \quad \quad \quad \quad -8 \end{array}$$

Получим $I = \frac{x^3}{3} \ln(x+2) - \frac{1}{3} \int \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2} \right) dx =$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(x+2) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \ln|x+2| + C.$$

Пример 10.13.

$$\int \operatorname{ctg} x \ln(\sin x) dx = \int \ln(\sin x) d(\ln(\sin x)) = \frac{1}{2} \ln^2(\sin x) + C.$$

Здесь мы заметили, что $(\ln(\sin x))' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$.

Пример 10.14. $I = \int \frac{(e^{2x} + 5e^x) dx}{e^{2x} + 6e^x + 25}$. Введем новую переменную

$z = e^x$. Тогда $dz = e^x dx$. Получим $I = \int \frac{(z+5) dz}{z^2 + 6z + 25}$. Воспользуемся

формулами $(z^2 + 6z + 25)' = 2z + 6$, $z + 5 = \frac{1}{2}(2z + 6) + 2$.

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{(2z+6)dz}{z^2+6z+25} + 2 \int \frac{d(z+3)}{(z+3)^2+16} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(z^2+6z+25) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z+3}{4} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+6e^x+25) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x+3}{4} + C. \end{aligned}$$

Пример 10.15. $I = \int \frac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+4}} dx$. Введем новую переменную $z = \sqrt{4x+4}$. Найдем $4x+5 = z^2+1$. Тогда $4dx = 2zdz$, откуда $dx = \frac{1}{2}zdz$. Таким образом $I = \int \frac{\sqrt{z^2+1}zdz}{2z} = \frac{1}{2} \int \sqrt{z^2+1} dz$. Получили интеграл, вычисленный ранее в примере 6.9,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left(z\sqrt{z^2+1} + \ln|z + \sqrt{z^2+1}| \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{4x+4} \cdot \sqrt{4x+5} + \ln(\sqrt{4x+4} + \sqrt{4x+5}) \right) + C. \end{aligned}$$

Пример 10.16. $I = \int \frac{e^x+4}{e^x+2} dx = \int \frac{(e^x+4)e^x}{(e^x+2)e^x} dx$. Сделаем замену переменной $z = e^x$. Тогда $dz = e^x dx$ и $I = \int \frac{(z+4)dz}{(z+2)z}$. Разложим правильную дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{z+4}{z(z+2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} = \frac{A(z+2)+Bz}{z(z+2)}.$$

Из тождественного равенства числителей $z+4 = A(z+2) + Bz$ найдем неизвестные буквенные коэффициенты.

При $z = 0$ тождество принимает вид $4 = 2A$, откуда $A = 2$.
При $z = -2$ тождество принимает вид $2 = -2B$ и $B = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } I &= 2 \int \frac{dz}{z} - \int \frac{dz}{z+2} = 2 \ln|z| - \ln|z+2| + C = \\ &= 2 \ln|e^x| - \ln|e^x+2| + C = 2x - \ln|e^x+2| + C. \end{aligned}$$

Предложим другое решение, которое использует интеграл, взятый в примере 5.8.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x+4}{e^x+2} dx &= \int \left(1 + \frac{2}{e^x+2} \right) dx = x - \ln(2e^{-x}+1) + C = \\ &= x - \ln\left((2+e^x)e^{-x} \right) + C = x - \ln(2+e^x) + x + C = 2x - \ln(2+e^x) + C. \end{aligned}$$

Пример 10.17. $I = \int \frac{dx}{1+x^3}$. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2-x+1} = \\ &= \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+D)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим тождественное равенство исходного числителя и вновь полученного:

$$1 \equiv (Ax^2 - x + 1) + (Bx + D)(x + 1).$$

Положим в нем последовательно $x = -1$; $x = 0$, а затем сравним коэффициенты при x^2 . Тогда получим систему уравнений для нахождения неизвестных буквенных коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= 3A; \\ 1 &= A + D; \\ 0 &= A + B. \end{aligned} \right\}$$

Решая ее, найдем $A = \frac{1}{3}, D = \frac{2}{3}, B = -\frac{1}{3}$.

Тогда

$$I = \int \frac{1}{3} \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{x}{3} + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(x+1)}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx.$$

Вычислим отдельно $I_1 = \int \frac{x-2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$. Сделаем замену

$$x - \frac{1}{2} = z.$$

Найдем $x = z + \frac{1}{2}$, $dx = dz$. Получим $I_1 = \int \frac{z + \frac{1}{2} - 2}{z^2 + \frac{3}{4}} dz =$

$$= \int \frac{z dz}{z^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(z^2 + \frac{3}{4}\right)}{z^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| z^2 + \frac{3}{4} \right| - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2z}{\sqrt{3}} + C.$$

Тогда

$$I = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+1)^3}{x^3 + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 10.18. $I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x + \sqrt[4]{x}}} dx$. Сделаем замену $x = z^{12}$ и найдем

$$dx = 12z^{11} dz. \text{ Получим } I = \int \frac{z^4 \cdot 12z^{11}}{z^6 + z^3} dz = 12 \int \frac{z^{12}}{z^3 + 1} dz.$$

Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим из нее целую часть.

$$\frac{-z^{12}}{z^{12} + z^9} = \frac{z^3 + 1}{z^9 - z^6 + z^3 - 1} - \frac{-z^9}{-z^9 - z^6} = \frac{z^6}{z^6 + z^3} - \frac{-z^3}{-z^3 - 1} = \frac{z^6 + z^3}{z^6 + z^3} - \frac{z^3 + 1}{z^3 + 1} = 1 - \frac{z^3 + 1}{z^3 + 1} = 0$$

Тогда $I = 12 \int \left(z^9 - z^6 + z^3 - 1 + \frac{1}{z^3 + 1} \right) dz =$

$$= 12 \frac{z^{10}}{10} - 12 \frac{z^7}{7} + 12 \frac{z^4}{4} - 12z + 12 \int \frac{dz}{z^3 + 1}.$$

Последний интеграл взят в примере 10.17. Воспользуемся этим результатом:

$$I = \frac{6}{5} z^{10} - \frac{12}{7} z^7 + 3z^4 - 12z + 12 \left(\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(z+1)^3}{z^3 + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Затем вернемся к старой переменной $z = \sqrt[12]{x}$:

$$I = \frac{6}{5}\sqrt{x^5} - \frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7} + 3\sqrt[3]{x} - 12\sqrt[12]{x} + 2\ln\left|\frac{(\sqrt[12]{x}+1)^3}{\sqrt[4]{x}+1}\right| + 4\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 10.19. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-x}+3}$. Сделаем замену переменной

$$2-x = z^2. \text{ При этом } x = 2-z^2, \quad dx = -2zdz.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-2zdz}{z+3} = -2 \int \frac{z+3-3}{z+3} dz = -2 \int \left(1 - \frac{3}{z+3}\right) dz = -2 \int dz + 6 \int \frac{d(z+3)}{z+3} = \\ &= -2z + 6 \ln|z+3| + C = -2\sqrt{2-x} + 6 \ln|\sqrt{2-x}+3| + C. \end{aligned}$$

Пример 10.20. $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{4}{x^2}-1}} = \int \frac{d\left(\frac{-1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2-1}} =$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2-1}} = -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{2}{x} + \sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right| + C.$$

Рекомендуемая литература

1. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1964.
2. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ Астрель, 2006.
3. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. – СПб.: Лань, 2005.
4. Неопределённый интеграл. Методические указания к самостоятельному выполнению задания для студентов всех специальностей / сост. И. Б. Башмаков; Под ред. С. Н. Нумерова. – Л.: ЛИСИ, 1983.
5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2006. – Ч. 1.

Оглавление

1. Первообразная.....	3
2. Определение неопределённого интеграла.....	4
3. Таблица неопределённых интегралов.....	7
4. Простейшие правила интегрирования.....	12
5. Замена переменной в неопределённом интеграле.....	20
6. Интегрирование по частям.....	24
7. Интегрирование дробно-рациональных функций.....	29
8. Интегрирование некоторых типов тригонометрических функций.....	42
9. Интегрирование некоторых иррациональных функций.....	46
10. Разные задачи.....	49
Рекомендуемая литература.....	59

Учебное издание

Вера Борисовна Смирнова
Лидия Евсеевна Морозова

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Редактор О. Д. Камнева
Корректор К. И. Бойкова
Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 14.11.2007. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.

Усл. печ. л. 3,75. Уч.-изд. л. 3,87. Тираж 2000 экз. Заказ 215. «С» 101.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.

190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, 4.

Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, 5.