Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

В. Б. СМИРНОВА, Л. Е. МОРОЗОВА

Неопределённый интеграл

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2010

УДК 519.95 (075.8)

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор Н. М. Ивочкина (Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет); канд. физ.-мат. наук, доцент А. И. Шепелявый (Санкт-Петербургский государственный университет)

Смирнова, В. Б. , Морозова, Л. Е.

Неопределённый интеграл: учеб. пособие / В. Б. Смирнова, Л. Е. Морозова. – 2-е изд., испр. и доп; СПбГАСУ. – СПб., 2010. – 60 с.

Пособие предназначено для самостоятельного изучения раздела «Неопределённый интеграл» студентами специальностей с сокращенным курсом математики. Даны основные определения и теоремы. Приводится методика решения задач. Рассмотрены многочисленные примеры.

Табл. 4. Ил. 3. Библиогр.: 6 назв.

Рекомендовано Редакционно-издательским советом СПбГАСУ в качестве учебного пособия

Введение

Данное пособие посвящено решению задачи, обратной задаче нахождения производной. Пусть задана производная некоторой функции. Требуется найти эту функцию.

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ

Определение 1. *Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ в промежутке X, если для всех $x \in X$ справедливо равенство*

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Замечание. Если промежуток X специально не оговорен, это означает, что равенство (1.1) справедливо для всех x из области определения функции $f(x)$.

Пример 1.1. Пусть $f(x) = \sin 2x$. Легко установить, что $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Действительно, $(-\frac{1}{2}\cos 2x)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)2 = \sin 2x$.

Заметим, что любая функция вида $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$, где C – число, является первообразной для функции $\sin 2x$.

Сделанное в связи с приведенным примером замечание имеет общий характер. Легко показать, что если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке X, то любая функция $F(x)+C$, где C – число, является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке X. Действительно,

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

Возникает вопрос, нет ли у функции $f(x)$ первообразных, отличных от $F(x)+C$, где $F'(x) = f(x)$, а C – число. Оказывается, таких первообразных нет.

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в промежутке X. Тогда любая другая первообразная для функции $f(x)$ в этом промежутке имеет вид $F(x)+C_0$, где C_0 – число.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в промежутке X, кроме первообразной $F(x)$, отличную от нее первообразную $\Phi(x)$, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$. Составим разность $\Psi(x)=\Phi(x)-F(x)$. Заметим, что

$$\Psi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

при всех $x\in X$. Рассмотрим любые $x_1, x_2\in X$ $(x_1<x_2)$. По теореме Лагранжа

$$\Psi(x_2)-\Psi(x_1)=\Psi'(\hat{x})(x_2-x_1), \quad \hat{x}\in(x_1,x_2).$$

Следовательно, $\Psi(x_2)-\Psi(x_1)=0$ для любых $x_1, x_2\in X$. Таким образом, при $x\in X$ имеем

$$\Psi(x)\equiv \text{const}.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(x)=F(x)+C_0,$$

где C_0 – постоянная.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определение 2. *Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ для всех $x\in X$. Выражение $F(x)+C$, где C может принимать любое постоянное значение, называется* ***неопределенным интегралом*** *от функции $f(x)$ и обозначается*

$$\int f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{2.1}$$

где $F'(x)=f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, произведение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, а слагаемое C – *произвольной постоянной*. Процесс определения первообразной или неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$.

Замечание. Обозначение неопределенного интеграла представляет собой символ интеграла «$\int$», за которым следует дифференциальное выражение $f(x)dx$. Последнее является дифференциалом искомой первообразной. Действительно,

$$f(x)dx=F'(x)dx=dF(x).$$

Такое обозначение очень удобно для объяснения и осуществления некоторых методов интегрирования. В частности, такое обозначение явно указывает переменную, по которой ведется интегрирование.

Перечислим свойства неопределенного интеграла, которые вытекают непосредственно из его определения.

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x) \tag{2.2}$$

или

$$d\int f(x)dx=f(x)dx, \tag{2.3}$$

т. е. знак дифференциала «уничтожает» знак интеграла.

$$\int F'(x)dx=F(x)+C \tag{2.4}$$

или

$$\int dF(x)=F(x)+C, \tag{2.5}$$

т. е. знак интеграла «уничтожает» знак дифференциала, но при этом появляется постоянное слагаемое.

Формула (2.2) дает возможность проверять правильность вычисления неопределенного интеграла: производная от неопределенного интеграла должна быть равна подынтегральной функции.

Справедливо следующее утверждение, которое мы приведем здесь без доказательства.

Теорема 2. *Любая непрерывная в данном промежутке функция имеет в нём первообразную.*

Замечание. Все элементарные функции непрерывны в области своего задания. Следовательно, по теореме 2 существование первообразных для этих функций обеспечено. Однако далеко не всегда первообразную от элементарной функции можно выразить в терминах элементарных функций. Так, например, невозможно выразить с помощью элементарных функций неопределенные интегралы:

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \sin(x^2) dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Иными словами, не существует таких элементарных функций, производные от которых были бы равны e^{x^2}, $\sin(x^2)$, $\frac{\sin x}{x}$. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции, называются *неберущимися*.

По аналогии интегралы, которые можно выразить в терминах элементарных функций, назовем *берущимися*.

Далее мы познакомимся с некоторыми основными методами нахождения первообразных. Однако многие известные методы нам охватить не удастся. Заметим также, что интегрирование некоторых функций требует весьма громоздких преобразований. Так что наряду с освоением методов интегрирования необходимо освоить использование справочников. Справочные пособия охватывают все типы берущихся интегралов. Однако очень часто приходится проделать определенную подготовительную работу, чтобы привести неопределённый интеграл к тому типу, который указан в справочнике. Что же касается несложных интегралов, то их часто проще вычислить самостоятельно, нежели найти в справочнике.

3. ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Приведем здесь формулы, которые необходимо знать наизусть. Они лежат в основе всего процесса интегрирования. Первые десять формул получены непосредственно из таблицы производных основных элементарных функций. Перечислим их.

1. $\int 0 dx = C$, где C = const. (3.1)

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, если $a \neq -1$. (3.2)

В частности,

$\int dx = x + C$ (см. также формулу (2.5).

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. (3.3)

Поясним появление в этой формуле символа модуля. Таблица производных дает формулу $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Здесь автоматически предполагается, что $x > 0$, и, следовательно, для $x > 0$ справедливо соотношение

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим теперь функцию $\ln(-x)$, определённую при $x < 0$. Поскольку

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

то для $x < 0$ справедливо равенство

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C. \qquad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) получаем, что для любого промежутка X, не содержащего ноль, формула (3.3) нашей таблицы справедлива.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0; \quad a \neq 1)$. (3.6)

Частный случай:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Заметим, что функция e^x не изменяется ни при интегрировании, ни при дифференцировании. Говорят, что она инвариантна по отношению к обеим этим операциям.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. (3.7)

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$. (3.8)

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$. (3.9)

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$. (3.10)

9. $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$. (3.11)

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. (3.12)

Следующие четыре формулы получены не из таблицы производных и требуют вывода, который будет проведён в последующих параграфах. Они очень часто встречаются в различных задачах.

11. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$. (3.13)

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C \quad (a > 0)$. (3.14)

13. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$. (3.15)

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C \quad (m \neq 0)$. (3.16)

Таким образом, можно записать таблицу основных интегралов (табл. 1). Интегралы, помещённые в таблицу, называются *табличными*.

Таблица 1

№	Неопределенный интеграл	№ формулы
1	$\int 0dx = C$, где $C = const$	(3.1)
2	$\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, если $a \neq -1$	(3.2)
3	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	(3.3)
4	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \qquad (a > 0; \quad a \neq 1)$	(3.6)
5	$\int e^x dx = e^x + C$	
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	(3.7)
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	(3.8)
8	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	(3.9)
9	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	(3.10)
10	$\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$	(3.11)
11	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	(3.12)
12	$\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$	(3.13)
13	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C \quad (a > 0)$	(3.14)
14	$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C \quad (a \neq 0)$	(3.15)
15	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+m}\right\rvert + C \quad (m \neq 0)$	(3.16)

Подчеркнём, что справедливость каждой строчки таблицы можно проверить, опираясь на формулу (2.2): производная от функции, стоящей в правой части равенства, равна подынтегральной функции. Для примера проверим справедливость формулы (3.16) в случае, когда $x+\sqrt{x^2+m}>0$. Действительно,

$$(\ln(x+\sqrt{x^2+m}))'=\frac{(x+\sqrt{x^2+m})'}{x+\sqrt{x^2+m}}=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+m}}}{x+\sqrt{x^2+m}}=$$

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2+m})}{(x+\sqrt{x^2+m})\sqrt{x^2+m}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+m}}.$$

В следующих разделах будут найдены первообразные для функций $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg}x$. Их можно присоединить к таблице неопределенных интегралов.

Приведем ряд примеров использования таблицы.

В примерах 3.1–3.8 использован интеграл (3.2). Однако прежде чем им воспользоваться, нужно записать подынтегральную функцию в виде x^a.

Пример 3.1. $\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}dx=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$.

Пример 3.2. $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$.

Пример 3.3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$.

Пример 3.4. $\int\sqrt[12]{x^5}\,dx=\int x^{\frac{5}{12}}dx=\frac{12}{17}x^{\frac{17}{12}}+C$.

Пример 3.5. $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}=\int x^{-\frac{3}{5}}dx=\frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}}+C$.

Пример 3.6. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{3}{2}}dx=-2x^{-\frac{1}{2}}+C$.

Пример 3.7. $\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{7}{3}}dx=-\frac{3}{4}x^{-\frac{4}{3}}+C$.

Пример 3.8. $\int(x\cdot\sqrt[5]{x})^3\,dx=\int x^{\frac{18}{5}}dx=\frac{5}{23}x^{\frac{23}{5}}+C$.

В примерах 3.9–3.13 использован интеграл (3.6).

Пример 3.9. $\int 5^x\,dx=\frac{5^x}{\ln 5}+C$.

Пример 3.10. $\int\frac{dx}{3^x}=\int\left(\frac{1}{3}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}+C=-\frac{1}{3^x\ln 3}+C$.

Пример 3.11. $\int 2^x\cdot 3^x\,dx=\int 6^x\,dx=\frac{6^x}{\ln 6}+C$.

Пример 3.12. $\int(2^x)^3\,dx=\int 8^x\,dx=\frac{8^x}{\ln 8}+C=\frac{(2^x)^3}{3\ln 2}+C$.

Пример 3.13. $\int 3^{2x}\,dx=\int 9^x\,dx=\frac{9^x}{\ln 9}+C=\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$.

В примерах 3.14–3.15 использована формула (3.13).

Пример 3.14. $\int\frac{dx}{x^2+16}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C$.

Пример 3.15. $\int \frac{dx}{13+x^2} = \frac{1}{\sqrt{13}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{13}} + C$.

В следующем примере применен табличный интеграл (3.14).

Пример 3.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{14-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{14}} + C$.

В следующих двух примерах воспользуемся формулой (3.16) таблицы.

Пример 3.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-14}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-14}\right| + C$.

Пример 3.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+14}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+14}\right| + C$.

В последующих интегралах применим формулу (3.15).

Пример 3.19. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$.

Пример 3.20. $\int \frac{dx}{x^2-10} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{10}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + C$.

4. ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

I. Вынесение постоянного множителя за знак интеграла

Теорема 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла, т. е.*

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \qquad (4.1)$$

где α – *число.*

Доказательство. Возьмём производную от правой части равенства (4.1) и вынесем постоянный множитель за знак производной:

$$(\alpha \int f(x)dx)' = \alpha(\int f(x)dx)'.$$

Воспользуемся формулой (2.2). Так как $(\int f(x)dx)' = f(x)$, получим, что

$$(\alpha \int f(x)dx)' = \alpha f(x),$$

т. е. правая часть (4.1) является совокупностью первообразных для функции $\alpha f(x)$. Этим теорема 3 доказана.

Приведем примеры применения теоремы 3.

Пример 4.1. $\int 3^{x+2} dx = 9\int 3^x dx = 9\frac{3^x}{\ln 3} + C = \frac{3^{x+2}}{\ln 3} + C$.

Пример 4.2.

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} \operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C.$$

Проверка: $\left(\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C\right)' = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{4x^2}{9}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{9+4x^2} = \frac{1}{4x^2+9}$.

Пример 4.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4} + C$.

Проверка: $\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{16}}}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$.

II. Представление интеграла в виде суммы нескольких слагаемых

Теорема 4. *Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.*

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \tag{4.2}$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве теоремы 3, продифференцируем правую часть равенства (4.2). Учитывая, что производная алгебраической суммы равна алгебраической сумме производных, получим

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)'.$$

Так как $(\int f(x)dx)' = f(x)$ и $(\int g(x)\,dx)' = g(x)$, получим, что

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Таким образом, теорема 4 доказана.

Замечание. Формула (4.2) может быть распространена на любое количество функций. При вычислении интегралов в правой части (4.2) возникает несколько произвольных постоянных. Из самого смысла неопределенного интеграла как совокупности первообразных вытекает, что не нужно выписывать все постоянные, а достаточно ввести одну произвольную постоянную в окончательное выражение.

Приведем примеры совместного применения теорем 3 и 4.

Пример 4.4. $\int \left(3\sqrt{x^3} - \frac{7}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{\sqrt{9x^2+1}}\right)dx =$

$$= 3\int x^{3/2}dx - 7\int x^{-3/2}dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{9}}} =$$

$$= \frac{6}{5}x^{5/2} + 14x^{-1/2} + \frac{2}{3}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{9}}\right| + C.$$

Пример 4.5. $\int \left(\frac{5}{\sin^2 x} + 2^{x-4} - \frac{3}{7-2x^2}\right)dx =$

$$= 5\int \frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{1}{16}\int 2^x dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\frac{7}{2} - x^2} =$$

$$= -5\operatorname{ctg} x + \frac{2^{x-4}}{\ln 2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x - \sqrt{\frac{7}{2}}}{x + \sqrt{\frac{7}{2}}}\right| + C.$$

Следующие примеры показывают, что часто подынтегральную функцию приходится сначала преобразовать, подготовив её к применению теорем 3 и 4.

Пример 4.6.

$$\int \frac{5x^2 + \sqrt{x} + 3x}{x^2}dx = \int 5dx + \int \frac{dx}{x^{3/2}} + 3\int \frac{dx}{x} = 5x - 2x^{-1/2} + 3\ln|x| + C.$$

Пример 4.7.

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2+1}dx = \int \frac{2(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \int 2dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = 2x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 4.8.

$$\int \frac{3\cos^2 x + 2\sin^2 x + 4}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x + 6}{\cos^2 x}dx = \int \left(1 + \frac{6}{\cos^2 x}\right)dx =$$

$$= \int dx + 6\int \frac{dx}{\cos^2 x} = x + 6\operatorname{tg} x + C.$$

Пример 4.9.

$$\int \frac{x^4+5}{x^2+2}dx = \int \frac{\left(x^4-4\right)+9}{x^2+2}dx = \int \left(x^2-2\right)dx + 9\int \frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{9}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

III. Формирование под знаком дифференциала линейного выражения *ax + b*.

Теорема 5. *Пусть известно, что*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{, т. е. } F'(x) = f(x).$$

Тогда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \qquad (4.3)$$

где a и b – числа, $a \neq 0$.

Доказательство. Как обычно, продифференцируем правую часть формулы (4.3) и покажем, что ее производная равна подынтегральной функции, стоящей в левой части. Отметим, что функция $F(ax+b)$ является сложной функцией аргумента x и её можно представить в виде

$$F(ax+b) = F(z(x)), \text{ где } z(x) = ax + b.$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$F'_x(ax+b) = F'_x(z(x)) = F'_z(z(x)) \cdot z'(x) = f(z(x)) \cdot a = a\, f(ax+b).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\big(F(ax+b)\big)' = \frac{1}{a} \cdot a \cdot f(ax+b) = f(ax+b).$$

Теорема 5 доказана.

Заметим, что формулу (4.3) можно получить, введя под знаком интеграла новую переменную $z = ax + b$. При этом следует помнить, что

$$dz = d(ax+b) = adx.$$

Выражая dx из правой части этого равенства, получим

$$dx = \frac{1}{a}dz.$$

Итак, установим цепочку равенств:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) =$$

$$= \frac{1}{a}\int f(z)dz = \frac{1}{a}F(z) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (4.4)$$

Именно цепочкой (4.4) и удобно пользоваться, вычисляя конкретные интегралы. При этом введение новой переменной можно опускать, переходя сразу к последнему равенству.

Пример 4.10. $I = \int \sin(5x+2)dx = \frac{1}{5}\int \sin(5x+2)d(5x+2)$. Введём новую переменную $z = 5x + 2$.

Тогда

$$I = \frac{1}{5}\int \sin z dz = -\frac{1}{5}\cos z + C = -\frac{1}{5}\cos(5x+2) + C.$$

Проверка: $\left(-\frac{1}{5}\cos(5x+2)\right)' = -\frac{1}{5}\cdot\big(-\sin(5x+2)\big)\cdot 5 = \sin(5x+2).$

Пример 4.11. $I = \int \frac{dx}{3-7x} = -\frac{1}{7}\int \frac{d(3-7x)}{3-7x}$. Введём новую переменную $z = 3 - 7x$. Тогда $I = -\frac{1}{7}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{7}\ln|z| + C = -\frac{1}{7}\ln|3-7x| + C$.

Пример 4.12.

$$\int 3^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 3^{2x}d(2x) = \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + C,$$

(см. пример 3.13).

Пример 4.13. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+9} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C$,

(см. пример 4.2).

В примерах 4.14 и 4.15 подынтегральные функции предварительно представим в таком виде, чтобы можно было применить к ним таблицу интегралов.

Пример 4.14.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{17+6x+9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{16+(1+3x)^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+1)}{\sqrt{16+(3x+1)^2}}.$$

Введём новую переменную $z=3x+1$.
Тогда

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+16}}=\frac{1}{3}\ln\left|z+\sqrt{z^2+16}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x+1+\sqrt{17+6x+9x^2}\right|+C.$$

Пример 4.15.

$$I=\int\frac{dx}{15-4x-4x^2}=\int\frac{dx}{16-(1+2x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{16-(2x+1)^2}.$$

Введём новую переменную $z=2x+1$.
Тогда

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-16}=-\frac{1}{2\cdot2\cdot4}\ln\left|\frac{z-4}{z+4}\right|+C=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x+5}{2x-3}\right|+C.$$

Пример 4.16. $\int\sqrt[3]{4x+3}dx=\frac{1}{4}\int(4x+3)^{1/3}d(4x+3)=$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}(4x+3)^{4/3}+C=\frac{3}{16}(4x+3)^{4/3}+C.$$

Пример 4.17. $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{2-9x}}=-\frac{1}{9}\int(2-9x)^{-1/5}d(2-9x)=$

$$=-\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{4}(2-9x)^{4/5}+C=-\frac{5}{36}(2-9x)^{4/5}+C.$$

Пример 4.18. $\int\frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(1-3x)^2}}=$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(1-3x)}{\sqrt{9-(1-3x)^2}}=-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1-3x}{3}+C=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C.$$

Проверка: $\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(3x-1)^2}{3^2}}}=\frac{1}{\sqrt{9-(3x-1)^2}}.$

Пример 4.19. $\int\operatorname{tg}^2 5x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 5x}-1\right)dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 5x}\right)dx-\int dx=$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x)}{\cos^2(5x)}-x=\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x-x+C.$$

Пример 4.20. $\int\frac{x+5}{\sqrt{x-2}}dx=\int\frac{(x-2)+7}{\sqrt{x-2}}dx=$

$$=\int\sqrt{x-2}\,d(x-2)+7\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{x-2}}=\frac{2}{3}(x-2)^{3/2}+14(x-2)^{1/2}+C.$$

Пример 4.21. $\int\frac{x+2}{\sqrt{3x+4}}dx=\int\frac{\frac{1}{3}(3x+4)+\frac{2}{3}}{\sqrt{3x+4}}dx=$

$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{3x+4}dx+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}=$$

$$=\frac{1}{9}\int(3x+4)^{1/2}d(3x+4)+\frac{2}{9}\int(3x+4)^{-1/2}d(3x+4)=$$

$$=\frac{2}{27}(3x+4)^{3/2}+\frac{4}{9}(3x+4)^{1/2}+C.$$

Обратимся теперь к таблице и выведем предпоследние три интеграла, т. е. формулы (3.13), (3.14) и (3.15) с помощью теоремы 5.

- Вычислим интеграл (3.13) на основе интеграла (3.11) таблицы

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

- Интеграл (3.14) вычислим на основе интеграла (3.12) таблицы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

- Для вычисления интеграла (3.15) используем табличный интеграл (3.3)

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{d(x-a)}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{d(x+a)}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Свойство III, описанное в разделе 4, является частным случаем общего метода замены переменной в неопределённом интеграле. Основой метода является следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть известно, что*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ т. е. } F'(x) = f(x). \tag{5.1}$$

Тогда $$\int f(z(x)) \cdot z'(x)\,dx = F(z(x)) + C. \tag{5.2}$$

Доказательство. Продифференцируем правую часть формулы (5.2), учитывая, что $F(z(x))$ является сложной функцией аргумента x, а $F'_z(z) = f(z)$ по условию (5.1) теоремы. Тогда получаем

$$\left(F(z(x)) + C\right)_x' = F'_z(z(x)) \cdot z'_x(x) = f(z(x)) \cdot z'(x).$$

Следовательно, производная правой части (5.2) равна подынтегральной функции, стоящей в левой части (5.2). Это доказывает теорему 6.

Формулу (5.2) можно переписать так

$$\int f(z(x))dz(x) = F(z(x)) + C. \tag{5.3}$$

Таким образом, переменная, по которой ведется интегрирование, не обязательно является независимой переменной. Она может быть функцией другой переменной. Метод замены переменной как раз в том и состоит, что вводится новая переменная интегрирования.

Этот метод эффективен прежде всего тогда, когда подынтегральное выражение можно представить в виде $f(z(x))dz(x)$, а первообразная $F(z)$ функции $f(z)$ уже известна. Далеко не все подынтегральные выражения допускают такое представление. С другой стороны, не всегда легко увидеть, что это представление возможно. В умении вводить замену переменной состоит, пожалуй, основная трудность при вычислении неопределенного интеграла.

Приведем примеры, в которых замена множителя $z'(x)dx$ на $dz(x)$ позволяет представить все подынтегральное выражение как выражение, зависящее от одной и той же функции $z(x)$.

Пример 5.1. $I = \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$. Введём $z = \cos x$.

Тогда $I = -\int \frac{dz}{z} = -\ln|z| + C = -\ln|\cos x| + C.$

Пример 5.2. $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

Пример 5.3. $I = \int \frac{xdx}{x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9}$. Введём $z = x^2 + 9$.

Тогда $I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + C$.

Пример 5.4. $I = \int \frac{xdx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+16}$. Введём $z = x^2$.

Тогда $I=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+16}=\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{z}{4}+C=\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4}+C$.

Пример 5.5. $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^2-3}}=\frac{1}{4}\int\frac{d(2x^2-3)}{\sqrt{2x^2-3}}$. Введём $z=2x^2-3$.

Тогда $I=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\sqrt{z}+C=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-3}+C$.

Пример 5.6. $\int\frac{x^3+2x}{\sqrt{x^4+5}}dx=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+5}}+\int\frac{2x}{\sqrt{x^4+5}}dx=$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(x^4+5)}{\sqrt{x^4+5}}+\int\frac{d(x^2)}{\sqrt{(x^2)^2+5}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^4+5}+\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+5}\right)+C.$$

Пример 5.7. $\int\frac{e^x dx}{e^x+2}=\int\frac{d(e^x+2)}{e^x+2}=\ln\left(e^x+2\right)+C$.

Пример 5.8. $\int\frac{dx}{e^x+2}=\int\frac{e^{-x}dx}{1+2e^{-x}}=$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2e^{-x}+1\right)}{2e^{-x}+1}=-\frac{1}{2}\ln\left(2e^{-x}+1\right)+C.$$

Пример 5.9.

$$\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+3}=\int\frac{d(e^x)}{(e^x+2)^2-1}=\int\frac{d(e^x+2)}{(e^x+2)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x+3}\right|+C.$$

Пример 5.10. $\int\frac{dx}{x(\ln^2 x-25)}=\int\frac{d\ln x}{\ln^2 x-25}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{\ln x-5}{\ln x+5}\right|+C$.

В следующих двух примерах применим искусственный приём, выделяющий дифференциал от функции tg x.

Пример 5.11. $\int\frac{\operatorname{tg}xdx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=\int\frac{\operatorname{tg}xdx}{\cos^2 x(1+3\operatorname{tg}^2 x)}=\int\frac{\operatorname{tg}xd\operatorname{tg}x}{3\operatorname{tg}^2 x+1}=$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(3\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^2 x+1}=\frac{1}{6}\ln\left|3\operatorname{tg}^2 x+1\right|+C.$$

Пример 5.12. $\int\frac{dx}{\cos^2 x+4}=\int\frac{dx}{5\cos^2 x+4\sin^2 x}=$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x(5+4\operatorname{tg}^2 x)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2\operatorname{tg}x)}{5+(2\operatorname{tg}x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}+C.$$

В рассмотренных примерах мы выделяли в подынтегральном выражении дифференциал некоторой функции, которую и объявляли новой переменной интегрирования. Замену переменной можно осуществить и по-другому, заменив переменную интегрирования какой-то функцией. Обычно такой прием используется при интегрировании иррациональных функций. При этом новая функция выбирается так, чтобы избавиться от иррациональности.

Приведём примеры такой замены переменной.

Пример 5.13. Вычислить $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

Выберем замену в виде $x=2\sin t$, где $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Тем самым $\sqrt{4-x^2}=2\cos t$ и иррациональное выражение исчезает, превращаясь в тригонометрическое. Далее

$$dx=2\cos tdt.$$

Здесь ещё раз подчеркнем, что мы перешли к новой переменной t во всем подынтегральном выражении, в том числе и в дифференциале.

Тогда

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=4\int\cos^2 tdt=2\int\left(1+\cos 2t\right)dt=2t+\sin 2t+C.$$

Теперь вернёмся к переменной x:

$$t=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right);\quad \sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

В итоге $\int\sqrt{4-x^2}dx=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C$.

Пример 5.14. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

Выбираем замену в виде $x = z^2$. Тогда $dx = 2zdz$. В результате

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = 2\int \frac{z^2 dz}{1+z^2} = 2\int \frac{(z^2+1)-1}{1+z^2}dz = 2\int dz - 2\int \frac{dz}{1+z^2} =$$
$$= 2z - 2\operatorname{arctg} z + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 7. *Справедливо тождество*

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \tag{6.1}$$

Доказательство. Проинтегрируем известное тождество вида

$$d\big(u(x)\cdot v(x)\big) = v(x)\cdot du(x) + u(x)\cdot dv(x). \tag{6.2}$$

Получим

$$\int d\big(u(x)\cdot v(x)\big) = \int v(x)\cdot du(x) + \int u(x)\cdot dv(x). \tag{6.3}$$

Но

$$\int d\big(u(x)\cdot v(x)\big) = u(x)v(x) + C. \tag{6.4}$$

Тогда из (6.3) следует (6.1), где постоянная C из равенства (6.4) включена в состав интеграла $\int v(x)du(x)$. Теорема 7 доказана.

Замечание. Обычно формулу (6.1) записывают коротко:

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{6.5}$$

Формулу (6.1) имеет смысл применять тогда, когда $\int vdu$ оказывается проще, чем $\int udv$. Чаще всего это «упрощение» происходит в том случае, когда производная $u'(x)$ имеет более «простой» вид, чем сама функция $u(x)$.

Пусть, например, нужно вычислить $\int x\sin 5xdx$. Принимаем в качестве $u(x)$ функцию x. Тогда $du(x) = dx$. В качестве $dv(x)$ возьмем дифференциальное выражение $\sin 5xdx$ и вычислим $v(x)$:

$$v(x) = \int \sin 5xdx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

Поскольку в тождестве (6.1) нужна лишь одна первообразная от функции $v(x)$, можем положить $C = 0$. Итак,

$$\int x\sin 5xdx = -\frac{1}{5}x\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5xdx = -\frac{1}{5}x\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C.$$

Отметим, что в результате применения формулы (6.1) мы свели вычисление неизвестного интеграла $\int x\sin 5xdx$ к вычислению известного интеграла $\int \cos 5xdx$.

Перечислим ниже типы интегралов, которые следует вычислять, используя формулу интегрирования по частям (6.1).

I. $\int x^n e^{ax+b}dx,\quad n\in N;\quad a,b\in R,\ a\neq 0$

II. $\int x^n \sin(ax+b)dx,\quad n\in N;\quad a,b\in R,\ a\neq 0$

III. $\int x^n \cos(ax+b)dx,\quad n\in N;\quad a,b\in R,\ a\neq 0$

IV. $\int x^a \ln xdx,\quad a\in R,\quad a\neq -1.$

V. $\int x^m \operatorname{arctg} xdx,\quad m = 0,1,2,\ldots$

VI. $\int x^m \arcsin xdx,\quad m = 0,1,2,\ldots$

В интегралах типов I, II, III в качестве $u(x)$ следует выбрать x^n, в качестве $dv(x)$ – оставшуюся часть подынтегрального выражения. Формулу (6.1) для этих интегралов придется применять n раз. В интегралах типа IV в качестве $u(x)$ принимается $\ln x$, в качестве $dv(x)$ принимается $x^a dx$. В интегралах типов V, VI в качестве $u(x)$ принимается обратная тригонометрическая функция, а в качестве $dv(x)$ принимается $x^m dx$.

Приведем примеры интегрирования по частям.

Пример 6.1. $I=\int \ln x\,dx$. Положим $u=\ln x$, $dv=dx$. Получим $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=x$. Тогда $I=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$.

Пример 6.2. $I=\int \arcsin x dx$. Положим $u=\arcsin x$, $dv=dx$.

Получим $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=x$.

Тогда

$$I=x\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 6.3. $I=\int \operatorname{arctg} x dx$. Положим $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$.

Получим $du=\dfrac{dx}{1+x^2}$, $v=x$.

Тогда

$$I=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=$$
$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

Пример 6.4. $I=\int\sqrt[3]{x}\ln x dx$. Полагаем $u=\ln x$, $dv=\sqrt[3]{x}dx$.

Получим $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$.

Тогда

$$I=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln x-\frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln x-\frac{9}{16}x^{\frac{4}{3}}+C.$$

Пример 6.5. $I=\int x^2e^{3x-2}dx$. Положим $u=x^2$, $dv=e^{3x-2}dx$.

Найдём $du=2xdx$, $v=\int e^{3x-2}dx=\dfrac{1}{3}e^{3x-2}$. Получим

$$I=\frac{1}{3}e^{3x-2}x^2-\frac{2}{3}\int xe^{3x-2}dx.$$

Снова интегрируем по частям. Положим $u_1=x$, $dv_1=e^{3x-2}dx$.

Получим $du_1=dx$, $v_1=\dfrac{1}{3}e^{3x-2}$.

Тогда

$$I=\frac{1}{3}e^{3x-2}x^2-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x-2}x-\frac{1}{3}\int e^{3x-2}dx\right)=\frac{1}{3}x^2e^{3x-2}-$$
$$-\frac{2}{9}xe^{3x-2}+\frac{2}{9}\int e^{3x-2}dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x-2}-\frac{2}{9}xe^{3x-2}+\frac{2}{27}e^{3x-2}+C.$$

Пример 6.6. $I=\int\ln^2 x dx$. Положим $u=\ln^2 x$, $dv=dx$.

Вычислим $du=\dfrac{2\ln x}{x}dx$, $v=x$. Тогда $I=x\ln^2 x-2\int\ln x dx$.

Интеграл $\int\ln x dx$ вычислен в примере 6.1. Получим

$$I=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C\cdot$$

Пример 6.7. $I=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}dx$. Положим $u=x$, $dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

Получим $du=dx$, $v=\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x$.

Тогда

$$I=x\operatorname{tg} x-\int\operatorname{tg} x dx=x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C.$$

Пример 6.8. $I=\int\dfrac{\ln x}{x^3}dx$. Положим $u=\ln x$, $dv=\dfrac{dx}{x^3}$. Получим $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=\int x^{-3}dx=-\dfrac{1}{2x^2}$.

Тогда

$$I = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Интегралы, приводящиеся к самим себе

Иногда в результате применения формулы (6.1) мы получаем новый интеграл, который отличается от исходного интеграла $\int udv$ лишь множителем. Тогда формулу (6.1) можно рассматривать как уравнение относительно $\int udv$. Такие интегралы называются интегралами, приводящимися к себе.

Пример 6.9. $I = \int \sqrt{x^2 + a}dx$, где $a \neq 0$.

Применим интегрирование по частям, где $u = \sqrt{x^2 + a}$, $dv = dx$. Тогда

$$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}}, \quad v = x.$$

Получим

$$I = \int \sqrt{x^2 + a}\, dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx. \qquad (6.6)$$

Проведём тождественные преобразования:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \frac{(x^2 + a) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \int \sqrt{x^2 + a}dx - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} =$$

$$= I - a\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$$

Подставляем полученный результат в формулу (6.6).
Тогда

$$I = x\sqrt{x^2 + a} - I + a\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$$

Мы получили уравнение относительно I. Решаем его. В итоге

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a} + a\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|\right) + C.$$

Пример 6.10. $I = \int e^{ax} \sin bxdx$, где $a \neq 0,\ b \neq 0$.

Применяем интегрирование по частям. Положим $u = e^{ax}$, $dv = \sin bxdx$.

Получим $du = ae^{ax}dx$, $v = -\frac{1}{b}\cos bx$. Тогда

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx. \qquad (6.7)$$

Снова применим интегрирование по частям в интеграле $I_1 = \int e^{ax}\cos bxdx$. Положим $u_1 = e^{ax}$, $dv_1 = \cos bxdx$. Найдём $du_1 = ae^{ax}dx$, $v_1 = \frac{1}{b}\sin bx$. Тогда $I_1 = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx$.

Подставим интеграл I_1 в (6.7) и получим уравнение относительно I.

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}I.$$

Решая это уравнение, определяем I.

$$I = \frac{(-b\cos bx + a\sin bx)e^{ax}}{(a^2 + b^2)}.$$

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 3. *Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) будем называть частное от деления двух многочленов. Общий вид рациональной дроби таков*:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ *– многочлен степени* n*, а* $Q_m(x)$ *– многочлен степени* m.

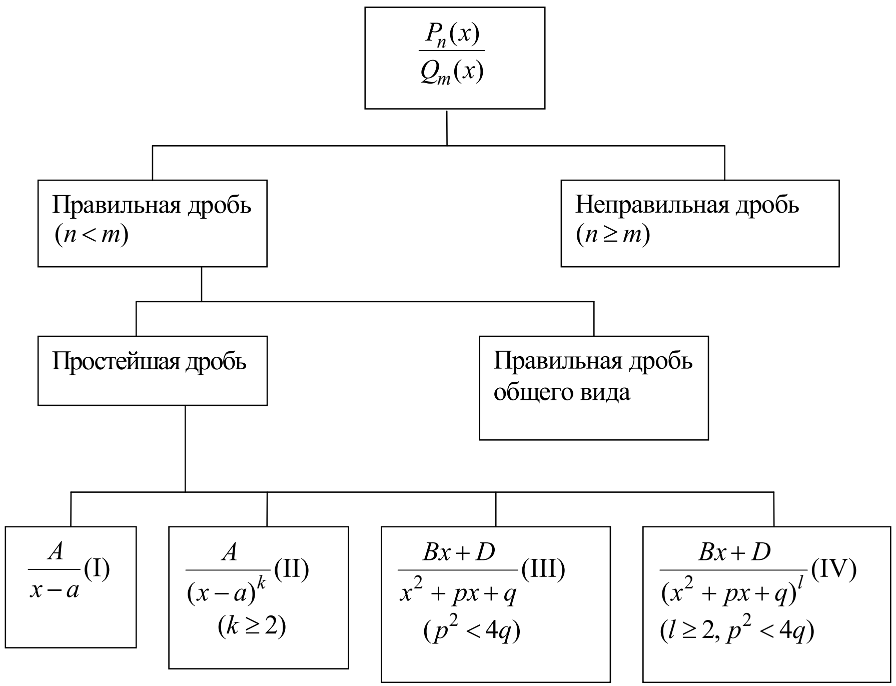
Если $n < m$, то рациональная дробь называется *правильной*, если $n \geq m$, то рациональная дробь называется *неправильной*. Из общей совокупности правильных дробей выделяются четыре специальных типа дробей, называемых *простейшими*. Простейшие дроби имеют вид

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}\ (k \geq 2,\ \text{целое}),$$

$$\frac{Bx+D}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^l}\ (l \geq 2,\ \text{целое}),$$

где $A,\ B,\ D,\ a,\ p,\ q$ – действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней ($p^2 < 4q$), т. е. не раскладывается на множители первой степени.

В целом классификацию рациональных дробей можно представить следующим образом.



Интегралы от рациональных дробей всегда являются берущимися. Покажем это, двигаясь по приведённой здесь схеме, поднимаясь с нижнего уровня на верхний уровень.

Интегрирование простейших дробей

1. Интеграл типа I берётся с использованием формулы (3.3) табл. 1 и линейной замены

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2. Интеграл типа II берётся с использованием формулы (3.2) табл. 1 и линейной замены

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = \frac{A}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C =$$

$$= -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

(Здесь $k \geq 2$.)

3. Рассмотрим интеграл типа III. $I = \int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}\,dx$, где $p^2 < 4q$.

Чтобы вычислить интеграл I, найдём сначала производную знаменателя подынтегральной функции:

$$(x^2+px+q)' = 2x+p.$$

Далее представим числитель как сумму двух слагаемых:

$$Bx + D = \frac{B}{2}(2x+p) + \left(-\frac{B}{2}p + D\right),$$

т. е. «выделим» в числителе производную знаменателя. Теперь I можно представить как сумму двух слагаемых:

$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(-\frac{B}{2}p + D\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}. \qquad (7.1)$$

Вычислим каждый из интегралов, стоящих в правой части (7.1), отдельно:

- $$\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln(x^2+px+q)+C,$$

- $$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})} = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Таким образом,

$$I = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{(D-\frac{Bp}{2})}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C. \qquad (7.2)$$

Заметим, что x^2+px+q всегда можно представить как сумму квадратов в силу того, что $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Формула (7.2) сложна для запоминания. Как правило, ею не пользуются, а непосредственно применяют к конкретному интегралу изложенный здесь метод.

Приведём примеры.

Пример 7.1. $\int \frac{5dx}{(2-x)^3} = -5\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \frac{5}{2}\frac{1}{(x-2)^2}+C.$

Пример 7.2. $I = \int \frac{(3x+7)dx}{x^2+4x+8}$. Найдем производную знаменателя $(x^2+4x+8)' = 2x+4$. Выделим эту производную в числителе

$$3x+7 = \frac{3}{2}(2x+4)+1.$$

Тогда

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+8} + \int \frac{dx}{x^2+4x+8} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+4x+8)}{x^2+4x+8} + \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4} = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+8)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.$$

Пример 7.3. $I = \int \frac{(7-5x)}{x^2+6x+25}dx$. Воспользуемся формулами

$(x^2+6x+25)' = 2x+6, \quad 7-5x = -\frac{5}{2}(2x+6)+22$. Тогда

$$I = -\frac{5}{2}\int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+25} + 22\int \frac{dx}{(x+3)^2+16} =$$

$$= -\frac{5}{2}\ln(x^2+6x+25)+\frac{11}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C.$$

4. Для интеграла типа IV $I = \int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^l}dx$, где $l \ge 2$, $p^2 < 4q$, непосредственное интегрирование является столь громоздким, что следует пользоваться справочником.

Интегрирование правильных дробей общего вида

Рассмотрим правильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n<m)$, которая не является простейшей дробью. Чтобы проинтегрировать такую функцию, её нужно представить в виде суммы простейших дробей.

Представление правильной дроби в виде суммы простейших дробей осуществляется по следующему правилу.

1. Знаменатель $Q_m(x)$ следует разложить на множители вида

$$(x-a)^k \text{ и } (x^2+px+q)^r,$$

где $k, r \geq 1$, а $p^2 < 4q$. Заметим, что $(x^2 + px + q)$ при условии $p^2 < 4q$ на множители разложить нельзя.

2. Следует построить «общий вид» представления с неопределёнными пока коэффициентами. При этом каждому множителю $(x-a)^k$ должна соответствовать сумма дробей

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}, \tag{7.3}$$

а каждому множителю $(x^2 + px + q)^r$ должна соответствовать сумма дробей

$$\frac{B_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + D_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{B_r x + D_r}{(x^2 + px + q)^r}, \tag{7.4}$$

где коэффициенты A_i $(i = 1, \ldots, k)$, B_j, D_j $(j = 1, \ldots, r)$ пока неизвестны и представлены буквами. В суммах (7.3) и (7.4) должны обязательно присутствовать все перечисленные выше слагаемые (k слагаемых в сумме (7.3) и r слагаемых в (7.4)). Общий вид представления содержит в себе все суммы (7.3) и (7.4).

3. Следует определить коэффициенты представления, полученного в пункте 2, исходя из тождественного равенства правильной дроби и суммы простейших дробей, полученной в пункте 2.

Покажем на конкретных примерах, как пользоваться данным правилом.

Пример 7.4. $I = \int \frac{(5x+2)dx}{x^3 + 4x^2 + 4x}$.

Применим сформулированное выше правило.

1. Разложим знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла, на множители:

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2.$$

2. Построим для дроби, стоящей под знаком интеграла, представление в виде суммы простейших дробей с неизвестными пока коэффициентами

$$\frac{5x+2}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2}. \tag{7.5}$$

Множитель x имеет степень 1, и ему соответствует в сумме одно слагаемое, множитель $(x+2)$ имеет степень 2, и ему в сумме соответствуют два слагаемых.

3. Приведём правую часть равенства (7.5) к общему знаменателю. Получим

$$\frac{5x+2}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{A(x+2)^2 + B_1 x(x+2) + B_2 x}{x(x+2)^2}. \tag{7.6}$$

Равенство (7.6) должно выполняться при всех значениях x. Поскольку знаменатели дробей, стоящих в левой и правой частях (7.6), одинаковы, числители этих дробей должны быть тождественно равными. Таким образом,

$$5x + 2 = A(x+2)^2 + B_1 x(x+2) + B_2 x \tag{7.7}$$

при всех значениях x. Чтобы определить A, B_1 и B_2, подставим в (7.7) три каких-либо значения x и получим систему трёх уравнений относительно неизвестных A, B_1 и B_2. Если представление правильной дроби в виде суммы простейших дробей составлено правильно, то эта система имеет единственное решение. Значения x обычно выбирают так, чтобы расчёты были как можно более простыми. В нашем случае выгодно выбрать $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ и $x_3 = -1$. Последовательно подставляя эти значения x в тождество (7.7), получим систему

$$\begin{cases} -8 = -2B_2; \\ 2 = 4A; \\ -3 = A - B_1 - B_2. \end{cases} \tag{7.8}$$

Система (7.8) имеет решение:

$$A=\frac{1}{2};\ B_2=4;\ B_1=-\frac{1}{2}.$$

Замечание. Если коэффициенты A, B_1, B_2 найдены верно, то слева и справа в (7.7) стоят одинаковые многочлены. Следовательно, их коэффициенты при одинаковых степенях должны быть равны. Установим это с помощью табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты при степенях x	Слева (7.7)	Справа (7.7)
x^2	0	$A+B_1=0$
x	5	$4A+2B_1+B_2=2-1+4=5$
x^0	2	$4A=2$

Таким образом, коэффициенты найдены верно. Итак, мы получили тождество

$$\frac{5x+2}{x^3+4x^2+4x}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+2)}+\frac{4}{(x+2)^2}.$$

Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2}+4\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|-\frac{4}{x+2}+C.$$

Пример 7.5. $I=\int\frac{(x^2+3x+3)dx}{(x+1)(x^2+4x+5)}$.

Представим дробь, стоящую под знаком интеграла, в виде суммы простейших дробей. Так как оба множителя, стоящих в знаменателе, имеют степень 1, представление будет иметь вид

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+4x+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2+4x+5}. \tag{7.9}$$

Заметим, что если в знаменателе стоит квадратный трёхчлен $\left(x^2+4x+5\right)$, то в числителе обязательно должен стоять многочлен первой степени $(Bx+D)$.

Приводим правую часть (7.9) к общему знаменателю. Тогда

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+4x+5)}=\frac{A(x^2+4x+5)+(Bx+D)(x+1)}{(x+1)(x^2+4x+5)},$$

откуда следует

$$x^2+3x+3=A(x^2+4x+5)+(Bx+D)(x+1)\cdot \tag{7.10}$$

Нужно определить три коэффициента A, B и D. Используем удобные значения: $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$. Подставим их последовательно в (7.10).). Получим

$$\left.\begin{aligned}1&=2A\\3&=5A+D\\7&=10A+2B+2D\end{aligned}\right\}. \tag{7.11}$$

Система (7.11) имеет решение:

$$A=\frac{1}{2};\ B=\frac{1}{2};\ D=\frac{1}{2}.$$

Проверим полученный результат по табл. 3.

Таблица 3

Коэффициенты при степенях x	Слева (7.10)	Справа (7.10)
x^2	1	$A+B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
x	3	$4A+B+D=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$
x^0	3	$5A+D=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

Получено тождество

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+4x+5)}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+4x+5)}.$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{x^2+4x+5}.$$

Отдельно вычислим $I_1 = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+4x+5}$, используя формулы

$$(x^2+4x+5)' = 2x+4, \quad x+1 = \frac{1}{2}(2x+4)-1,$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+5} - \int \frac{dx}{x^2+4x+5} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} - \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Итак,

$$I = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+4x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Пример 7.6. $I = \int \frac{(3x+1)dx}{(x^2+2x-3)(x^2+1)}$.

Разлагаем знаменатель на множители:

$$(x^2+2x-3)(x^2+1) = (x-1)(x+3)(x^2+1).$$

Выписываем общий вид представления дроби в виде суммы простейших дробей и сразу же приводим сумму дробей к общему знаменателю:

$$\frac{(3x+1)}{(x^2+2x-3)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Ex+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+3)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Ex+D)(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x^2+1)}.$$

Составляем равенство числителей двух равных дробей с одинаковыми знаменателями:

$$3x+1 = A(x+3)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Ex+D)(x-1)(x+3). \quad (7.12)$$

Выбираем удобные значения x: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$ и составляем систему уравнений для определения четырёх коэффициентов: A, B, E, D.

$$\left.\begin{aligned} 4 &= 8A; \\ -8 &= -40B; \\ 1 &= 3A - B - 3D; \\ -2 &= 4A - 4B + 4E - 4D. \end{aligned}\right\} \quad (7.13)$$

Решаем систему (7.13): $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$,

$$D = \frac{1}{3}(-1 - B + 3A) = \frac{1}{3}(-1 - \frac{1}{5} + \frac{3}{2}) = \frac{1}{10},$$

$$E = \frac{1}{2}(-1 - 2A + 2B + 2D) = \frac{1}{2}(-1 - 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}) = -\frac{7}{10}.$$

Проверим полученные значения согласно табл. 4.

Таблица 4

Коэффициенты при степенях x	Слева (7.12)	Справа (7.12)
x^3	0	$A + B + E = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} - \frac{7}{10} = 0$
x^2	0	$3A - B + D + 2E = \frac{15}{10} - \frac{2}{10} + \frac{1}{10} - \frac{14}{10} = 0$
x	3	$A + B - 3E + 2D = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} + \frac{21}{10} + \frac{2}{10} = 3$
x^0	1	$3A - B - 3D = \frac{15}{10} - \frac{2}{10} - \frac{3}{10} = 1$

Таким образом,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{10}\int \frac{1-7x}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{5}\ln|x+3| + \frac{1}{10}\operatorname{arctg} x - \frac{7}{20}\ln(x^2+1) + C.$$

Интегрирование неправильных дробей

Чтобы проинтегрировать неправильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $n \geq m$, её следует представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого сначала следует представить $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = Q_m(x)M(x) + R(x), \qquad (7.14)$$

где степень многочлена $R(x)$ меньше, чем степень многочлена $Q_m(x)$.

Представление (7.14) равносильно делению многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ с остатком. В формуле (7.14) многочлен $M(x)$ является частным, а многочлен $R(x)$ – остатком. Затем равенство (7.14) следует почленно поделить на $Q_m(x)$. Мы получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

Здесь $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь.

Представление (7.14) иногда легко угадать (если $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ имеют достаточно простой вид), но, как правило, оно получается в результате деления $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ «уголком».

Приведём примеры.

Пример 7.7. $\int \frac{x+5}{x+3}dx = \int \frac{(x+3)+2}{x+3}dx = \int (1+\frac{2}{x+3})dx =$

$= \int dx + 2\int \frac{dx}{x+3} = x + 2\ln|x+3| + C.$

Пример 7.8. $\int \frac{2x^2+3x+4}{x^2+3}dx = \int \frac{2(x^2+3)+(3x-2)}{x^2+3}dx =$

$= \int 2dx + \int \frac{3x-2}{x^2+3}dx = 2x + \frac{3}{2}\ln(x^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

Пример 7.9. $I = \int \frac{x^3+5x^2+3x}{x^2+2x+5}dx$. Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Разделим числитель этой дроби на знаменатель с остатком.

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3+5x^2+3x & x^2+2x+5 \\ \underline{x^3+2x^2+5x} & x+3 \\ -\;3x^2-2x & \\ \underline{3x^2+6x+15} & \\ -8x-15; & \end{array}$$

$$I = \int \frac{(x^2+2x+5)(x+3)-8x-15}{x^2+2x+5}dx = \int (x+3)dx - \int \frac{(8x+15)dx}{x^2+2x+5}.$$

Вычислим отдельно

$$\int \frac{(8x+15)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{4(2x+2)+7}{x^2+2x+5}dx = 4\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 7\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$= 4\ln(x^2+2x+5) + \frac{7}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

Окончательно

$$I = \frac{x^2}{2} + 3x - 4\ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 7.10. $I = \int \frac{x^4+2}{x^2+2x-3}dx$. Поделим числитель на знаменатель с остатком.

$$\begin{array}{r|l} -\;x^4+2 & x^2+2x-3 \\ \underline{x^4+2x^3-3x^2} & x^2-2x+7 \\ -\;-2x^3+3x^2+2 & \\ \underline{-2x^3-4x^2+6x} & \\ -\;7x^2-6x+2 & \\ \underline{7x^2+14x-21} & \\ -20x+23 & \end{array}$$

$$I = \int \left(x^2-2x+7-\frac{20x-23}{x^2+2x-3}\right)dx = \int (x^2-2x+7)dx - \int \frac{20x-23}{x^2+2x-3}dx.$$

Вычислим отдельно $I_1 = \int \frac{20x-23}{x^2+2x-3}dx$. Разложим правильную дробь на простейшие дроби.

$$\frac{20x-23}{x^2+2x-3} = \frac{20x-23}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}.$$

$$20x-23 = A(x-1) + B(x+3).$$

Подставим в полученное тождество последовательно значения переменной $x=1,\quad x=-3$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} -3 &= 4B \\ -83 &= -4A \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{3}{4} \\ A = \dfrac{83}{4}. \end{cases}$$

Получим $I_1 = \int \frac{83}{4(x+3)}dx - \int \frac{3}{4(x-1)}dx$.

Окончательно

$$I = \frac{x^3}{3} - x^2 + 7x - \frac{83}{4}\ln|x+3| + \frac{3}{4}\ln|x-1| + C.$$

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

I. Интегрирование произведений синусов и косинусов различных аргументов

Для вычисления интегралов этого типа нужно последовательно осуществлять преобразование произведений пар тригонометрических функций в суммы пар тригонометрических функций согласно формулам:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Приведём примеры.

Пример 8.1. $\int \sin x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 3x + \sin(-x))dx =$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 3x - \sin x)dx = -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Пример 8.2. $\int \cos x\sin 2x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x + \cos 2x)\sin 2x dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\cos 4x\sin 2x dx + \frac{1}{2}\int\cos 2x\sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int(\sin 6x - \sin 2x)dx + \frac{1}{4}\int\sin 4x dx =$$

$$= -\frac{1}{24}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + C.$$

Пример 8.3. $\int \cos\frac{x}{2}\cos(2x+1)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos\left(\frac{5x}{2}+1\right) + \cos\left(\frac{3x}{2}+1\right)\right)dx = \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5}{2}x+1\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x+1\right) + C.$$

II. $\int \sin^m x\cos^n x dx$.

Здесь следует выделить два случая:

1) одно из чисел: m или n является целым, положительным, нечетным;

2) оба числа m и n являются целыми, неотрицательными $(m^2+n^2 \neq 0)$, чётными.

В случае 1 нужно выделить из нечетной степени $\sin^m x$ или $\cos^n x$ один множитель (соответственно $\sin x$ или $\cos x$) и объединить этот множитель с дифференциалом dx. Далее, нужно выразить подынтегральное выражение только через $\cos x$ или только через $\sin x$, воспользовавшись тем, что $\sin x\,dx = -d\cos x$, $\cos x dx = d\sin x$, а $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Приведём примеры.

Пример 8.4. $I=\int \sin^3 x\ \cos^2 x\, dx=\int(\sin^2 x\cos^2 x)(\sin x)\, dx=$

$=-\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\, d\cos x$. Сделаем замену переменной $z=\cos x$.

Получим $I=-\int(1-z^2)z^2dz=\int(z^4-z^2)dz=$

$$=\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Пример 8.5. $\int\cos x\sin^{11}x\, dx=\int\sin^{11}x\, d\sin x=\dfrac{\sin^{12}x}{12}+C$.

Пример 8.6. $I=\int\cos^5 x\ \sqrt[3]{\sin x}\, dx=\int\cos^4 x\sqrt[3]{\sin x}(\cos x)dx=$

$=\int(1-\sin^2 x)^2\cdot\sqrt[3]{\sin x}\, d\sin x$. Введем новую переменную $z=\sin x$. Тогда

$$I=\int(1-z^2)^2\cdot(\sqrt[3]{z})dz=\int(z^{\frac{1}{3}}-2z^{\frac{7}{3}}+z^{\frac{13}{3}})dz=$$

$$=\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}}-2\cdot\frac{3}{10}z^{\frac{10}{3}}+\frac{3}{16}z^{\frac{16}{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{4}(\sin x)^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{5}(\sin x)^{\frac{10}{3}}+\frac{3}{16}(\sin x)^{\frac{16}{3}}+C.$$

Заметим, что если обе степени m и n положительные и нечетные, то отделять множитель выгодно от степени с меньшим показателем.

Пример 8.7. $\int\cos^3 x\sin^7 x\, dx=\int\cos^2 x\sin^7 x\cdot\cos x\, dx=$

$$=\int(1-\sin^2 x)\sin^7 x\, d\sin x=\frac{\sin^8 x}{8}-\frac{\sin^{10}x}{10}+C.$$

В случае 2 нужно воспользоваться формулами

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

позволяющими понизить степень функций, входящих в подынтегральное выражение.

Пример 8.8. $\int\cos^2 x dx=\dfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C.$

Пример 8.9.

$$\int\sin^4 x dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)dx=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Пример 8.10. $\int\sin^2 x\cos^4 x dx=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 x dx=$

$$=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\ \cos^2 x\, dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x dx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2x dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2x\, d\sin 2x=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

III. $\boldsymbol{\int \mathrm{tg}^n x dx, \int \mathrm{ctg}^n x dx\ (n=1,2,\ldots)}$.

Ранее уже были найдены

$$\int\mathrm{tg}\, x dx=-\ln|\cos x|+C,$$

$$\int\mathrm{ctg}\, x dx=\ln|\sin x|+C.$$

Для вычисления интегралов от прочих натуральных степеней функций $\mathrm{tg}\, x$ и $\mathrm{ctg}\, x$ следует воспользоваться формулами

$$\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1 \quad \text{и} \quad \mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$$

соответственно, записав предварительно интегрируемые функции в виде

$$\mathrm{tg}^n x=\mathrm{tg}^{n-2}x\cdot\mathrm{tg}^2 x;$$

$$\mathrm{ctg}^n x=\mathrm{ctg}^{n-2}x\cdot\mathrm{ctg}^2 x.$$

При этом следует учесть, что $d(\text{tg}\,x)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$, а $d(\text{ctg}\,x)=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.

Пример 8.11.

$$\int \text{tg}^2 x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\text{tg}\,x-x+C.$$

Пример 8.12.

$$\int \text{ctg}^3 x dx=\int \text{ctg}\,x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int\frac{\text{ctg}\,x dx}{\sin^2 x}-\int \text{ctg}\,x dx=$$

$$=-\int \text{ctg}\,x d\,\text{ctg}\,x-\int \text{ctg}\,x dx=-\frac{\text{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C.$$

Пример 8.13. $\int \text{tg}^4 x dx=\int \text{tg}^2 x\cdot \text{tg}^2 x dx=\int \text{tg}^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$

$$=\int \text{tg}^2 x d\,\text{tg}\,x-\int \text{tg}^2 x dx=\frac{\text{tg}^3 x}{3}-(\text{tg}\,x-x)+C=\frac{\text{tg}^3 x}{3}-\text{tg}\,x+x+C.$$

9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

I. Рассмотрим интегралы вида

$$\int\frac{\boldsymbol{Ax+B}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}\boldsymbol{dx},$$

где A, B, a, b, c – числа, $a\neq 0$.

Чтобы вычислить этот интеграл, следует вычислить производную подкоренного выражения:

$$(ax^2+bx+c)'=2ax+b.$$

Затем в числителе подынтегральной функции следует выделить эту производную, поделив «уголком» числитель на полученную производную, т. е. представить числитель в виде суммы двух слагаемых:

$$Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a}).$$

Тогда

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+(B-\frac{Ab}{2a})\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \qquad (9.1)$$

Рассмотрим каждый из интегралов, стоящих в правой части (9.1), отдельно.

а) $I=\int\dfrac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Положим $z=ax^2+bx+c$. Тогда

$I=\int\dfrac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$;

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)}}. \qquad (9.2)$$

Здесь в подкоренном выражении выделен полный квадрат. В результате правая часть равенства (9.2) приведена к табличному интегралу. Если $a>0$, это интеграл типа (3.16) из табл. 1, если $a<0$ – интеграл типа (3.14).

Пример 9.1. $I=\int\dfrac{(5x+2)dx}{\sqrt{4x^2+8x+10}}$. Воспользуемся формулами $\left(4x^2+8x+10\right)'=8x+8$, $5x+2=\dfrac{5}{8}(8x+8)-3$. Тогда

$$I=\frac{5}{8}\int\frac{(8x+8)dx}{\sqrt{4x^2+8x+10}}-3\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+10}}=$$

$$= \frac{5}{8}\int \frac{d\left(4x^2+8x+10\right)}{\sqrt{4x^2+8x+10}} - 3\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4(x+1)^2+6}} =$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt{4x^2+8x+10} - \frac{3}{2}\ln\left|2(x+1)+\sqrt{4x^2+8x+10}\right| + C.$$

Пример 9.2. $I = \int \frac{3x+7}{\sqrt{10+4x-x^2}}dx$. Воспользуемся формулами $\left(10+4x-x^2\right)' = -2x+4, \quad 3x+7 = -\frac{3}{2}(-2x+4)+13$. Получим

$$I = -\frac{3}{2}\int \frac{d\left(10+4x-x^2\right)}{\sqrt{10+4x-x^2}} + 13\int \frac{dx}{\sqrt{10+4x-x^2}} =$$

$$= -3\sqrt{10+4x-x^2} + 13\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{14-(x-2)^2}} =$$

$$= -3\sqrt{10+4x-x^2} + 13\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{14}} + C.$$

Пример 9.3. $I = \int \frac{2-x}{\sqrt{x^2+6x+25}}dx$. Воспользуемся формулами $\left(x^2+6x+25\right)' = 2x+6, \quad -x+2 = -\frac{1}{2}(2x+6)+5$. Получим

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+6x+25}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+25}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+6x+25\right)}{\sqrt{x^2+6x+25}} + 5\int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2+16}} =$$

$$= -\sqrt{x^2+6x+25} + 5\ln\left|(x+3)+\sqrt{x^2+6x+25}\right| + C.$$

II. В разделе 7 мы показали, как интегрировать дробно-рациональные функции. В дальнейшем основным приемом интегрирования будет отыскание таких подстановок $x = \varphi(t)$ (раздел 5), которые позволят избавиться от радикалов и приведут подынтегральное выражение к рациональному виду и тем самым позволят выразить исходный интеграл в виде функции аргумента t. Данный прием называется *рационализацией* подынтегрального выражения. Если при этом функция $x = \varphi(t)$ такая, что существует обратная и можно выразить t через x с помощью элементарных функций, то интеграл представится в виде функции аргумента x. Рассмотрим тригонометрическую рационализацию для интегралов вида $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ и $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})dx$, где через R обозначена дробно-рациональная функция двух аргументов.

1. В интеграле $\int \boldsymbol{R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx}$ положим

$$x = a\sin t \quad \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) \tag{9.3}$$

и вычислим

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\cos t.$$

Продифференцируем (9.3) и найдем $dx = a\cos t dt$. Тогда исходный интеграл примет вид $\int R(a\sin t, a\cos t)\, a\cos t\, dt$. Вычисляя его, получим функцию, зависящую от t и тригонометрических функций аргумента t. Чтобы вернуться к переменной x, следует из (9.3) выразить тригонометрическую функцию

$$\sin t = \frac{x}{a}, \tag{9.4}$$

откуда $t = \arcsin\frac{x}{a}$. Затем в прямоугольном треугольнике отметим острый угол t (рис. 1), противолежащий ему катет x и гипотенузу a. Тогда по теореме Пифагора прилежащий катет равен $\sqrt{a^2-x^2}$.

В этом треугольнике необходимые нам значения тригонометрических функций аргумента t выражаем как соотношения известных длин катетов и гипотенузы.

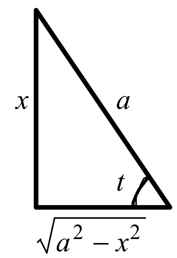


Рис. 1

Замечание. Изложенный прием определения тригонометрических функций аргумента t применим лишь для $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Но в силу свойств тригонометрических функций все формулы справедливы и для других значений *t*.

В примере 5.13 уже был применен прием рационализации для интеграла такого типа.

Пример 9.4. [6] $I = \int x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$. Воспользуемся заменой (9.3), где $a = 2$, и формулами $\sqrt{4 - x^2} = 2\cos t$, $dx = 2\cos t\, dt$. Получим:

$$I = 16\int \sin^2 t \cos^2 t\, dt = 4\int \sin^2 2t\, dt = 2\int (1 - \cos 4t) dt =$$
$$= 2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right) + C = 2t - \sin 2t \cos 2t + C =$$
$$= 2t - 2\sin t \cos t \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) + C.$$

Вернемся теперь к переменной x. Из (9.4) следует $\sin t = \frac{x}{2}$ и $t = \arcsin\frac{x}{2}$, а из треугольника, изображенного на рис. 1, видно, что $\cos t = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$. Тогда

$$I = 2\arcsin\frac{x}{2} - 2\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) + C =$$
$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{4}\sqrt{4 - x^2}\left(2 - x^2\right) + C.$$

2. В интеграле $\int \boldsymbol{R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx}$ положим

$$x = a\,\mathrm{tg}\, t \quad \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right) \tag{9.5}$$

и вычислим

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2\,\mathrm{tg}^2\, t + a^2} = a\sqrt{\mathrm{tg}^2\, t + 1} = a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}.$$

Продифференцируем (9.5) и найдем $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$. Тогда исходный интеграл примет вид $\int R(a\,\mathrm{tg}\, t, \frac{a}{\cos t})\frac{a}{\cos^2 t} dt$**.** Решая его, получим функцию, зависящую от t и тригонометрических функций аргумента t. Чтобы вернуться к переменной *x*, следует из (9.5) выразить тригонометрическую функцию

$$\mathrm{tg}\, t = \frac{x}{a}, \tag{9.6}$$

откуда $t = \mathrm{arctg}\frac{x}{a}$. Затем в прямоугольном треугольнике отметим острый угол t (рис. 2), противолежащий ему катет x и прилежащий к нему катет a. Тогда по теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{x^2 + a^2}$.

Далее необходимые значения тригонометрических функций аргумента *t* выразим как соотношения известных длин катетов и гипотенузы в этом треугольнике. Приведем примеры применения приема рационализации для интеграла рассмотренного типа.

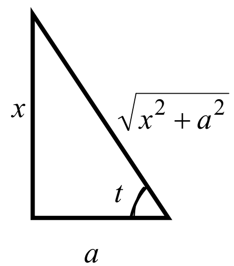


Рис. 2

Пример 9.5. $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 3}}$. Воспользуемся заменой (9.5), где $a = \sqrt{3}$, и формулами $\sqrt{x^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{\cos t}$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt$. Получим

$$I = \int \frac{\sqrt{3}\cos t\, dt}{3\,\mathrm{tg}^2\, t \cos^2 t\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\int\frac{\cos t\, dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{3}\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3\sin t} + C.$$

Вернемся теперь к переменной *x*. Для этого обратимся к рис. 2 и выразим $\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Тогда

$$I=-\frac{\sqrt{x^2+3}}{3x}+C.$$

3. В интеграле $\int \boldsymbol{R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx}$ положим

$$x=\frac{a}{\cos t} \qquad (9.7)$$

и вычислим

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\operatorname{tg}^2 t}=a\operatorname{tg} t.$$

Продифференцируем (9.7) и найдем $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$. Тогда исходный интеграл примет вид $\int R(\frac{a}{\cos t},a\operatorname{tg} t)\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$. Решая его, получим функцию, зависящую от t и тригонометрических функций аргумента t. Чтобы вернуться к переменной x, следует из (9.7) выразить тригонометрическую функцию

$$\cos t=\frac{a}{x}, \qquad (9.8)$$

откуда $t=\arccos\frac{a}{x}$. Затем в прямоугольном треугольнике отметим острый угол t (рис. 3), прилежащий к нему катет a и гипотенузу x. Тогда по теореме Пифагора противолежащий ему катет равен $\sqrt{x^2-a^2}$.

Затем необходимые значения тригонометрических функций аргумента t выразим как соотношения известных длин катетов и гипотенузы в этом треугольнике. Приведем пример применения приема рационализации для интеграла третьего типа.

Пример 9.6. $I=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}$. Введем новую функцию

$$x=\frac{2}{\cos t} \qquad (9.9)$$

и воспользуемся формулами $\sqrt{x^2-4}=2\operatorname{tg} t$, $dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$. Получим:

$$I=\int\frac{2\sin t dt}{\cos^2 t\left(\frac{2}{\cos t}-2\right)2\operatorname{tg} t}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin t}{\cos t(1-\cos t)\operatorname{tg} t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-\cos t}=$$

$$=\int\frac{d\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos t}{\sin t}+C.$$

Теперь из (9.9) выразим $\cos t=\frac{2}{x}$.

Из прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке 3, видно, что $\sin t=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$. Тогда

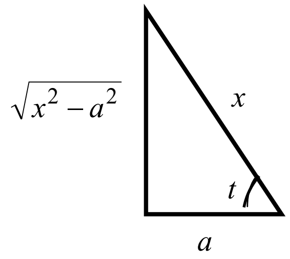


Рис. 3

$$I=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}+C=-\frac{x+2}{2\sqrt{x^2-4}}+C.$$

III. Рационализацию интеграла вида

$$\int \boldsymbol{R(x,\sqrt[\alpha]{ax+b},\sqrt[\beta]{ax+b},\ldots,\sqrt[\gamma]{ax+b})dx},$$

где R означает рациональную функцию двух и более аргументов, осуществим с помощью замены

$$ax+b=z^m. \qquad (9.10)$$

Здесь показатель степени m равен такому числу, которое делится нацело на $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$, другими словами m есть наименьшее общее кратное для чисел $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$. Это позволит нам избавиться от радикалов. Продифференцируем равенство (9.10)

$$adx=mz^{m-1}dz$$

и найдем $dx = \frac{m}{a} z^{m-1} dz$. Таким образом, все подынтегральное выражение будет сведено к рациональной функции одного аргумента z. Ранее в примере 5.14 этот прием уже применялся. Приведем еще один пример.

Пример 9.7. $I = \int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}+1} dx$. Сделаем замену $2x+1 = z^4$, продифференцируем это равенство

$$2dx = 4z^3 dz$$

и найдем $dx = 2z^3 dz$. Получим $I = \int \frac{z^2 \cdot 2z^3}{z^3+1} dz = 2\int \frac{z^5}{z^3+1} dz$. Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим ее целую часть, поделив числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{r|l} -z^5 & z^3+1 \\ \cline{2-2} \underline{z^5+z^2} & z^2 \\ -z^2 & \end{array}$$

Тогда $I = 2\int \left(z^2 - \frac{z^2}{z^3+1} \right) dz = \frac{2z^3}{3} - \frac{2}{3} \int \frac{d\left(z^3+1\right)}{z^3+1} = \frac{2z^3}{3} - \frac{2}{3} \ln\left|z^3+1\right| + C$.

Затем вернемся к старой переменной по формуле $z = \sqrt[4]{2x+1}$. Получим

$$I = \frac{2}{3}\sqrt[4]{(2x+1)^3} - \frac{2}{3}\ln\left(\sqrt[4]{(2x+1)^3}+1\right) + C.$$

10. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Ниже приведены задачи, решение которых требует применения нескольких приемов интегрирования. Почти во всех этих задачах нужно сначала угадать выгодную замену переменной, которая привела бы в итоге к какой-нибудь стандартной формуле.

Пример 10.1.

$I = \int \sin^3(1-5x)\cos^2(1-5x)dx$. Сделаем замену переменной $1-5x = z$. Тогда $I = -\frac{1}{5}\int \sin^3 z \cos^2 z\, dz = \frac{1}{5}\int \sin^2 z \cos^2 z\, d\cos z = = \frac{1}{5}\int \left(1-\cos^2 z\right)\cos^2 z d\cos z$. Снова введем новую переменную $\cos z = u$.

Тогда $I = \frac{1}{5}\int u^2 du - \frac{1}{5}\int u^4 du = \frac{u^3}{15} - \frac{u^5}{25} + C$. Возвращаясь к старой переменной по формуле $u = \cos(1-5x)$, получим

$$I = \frac{\cos^3(1-5x)}{15} - \frac{\cos^5(1-5x)}{25} + C.$$

Пример 10.2. $\int \sin 3x \cos^2 x\, dx = \int \sin 3x \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin 3x \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 3x dx + \frac{1}{2}\int \sin 3x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int \sin 3x d3x + \frac{1}{4}\int (\sin x + \sin 5x)dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{20}\cos 5x + C.$$

Пример 10.3.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\dfrac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}=\int\frac{d\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 10.4. $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$

Пример 10.5. $\int\arcsin(3x+2)dx$. Введем новую переменную $z=3x+2$ и получим $I=\frac{1}{3}\int\arcsin zdz$ (см. пример 6.2 из раздела 6 «Интегрирование по частям»).

Тогда

$$I=\frac{1}{3}\left(z\arcsin z+\sqrt{1-z^2}+C\right)=$$

$$=x\arcsin(3x+2)+\frac{2}{3}\arcsin(3x+2)+\frac{1}{3}\sqrt{1-(3x+2)^2}+C.$$

Пример 10.6. $I=\int e^x\sin^2\left(5e^x+2\right)dx$. Введем новую переменную $z=5e^x+2$ и найдем $dz=5e^x dx$. Получим $I=\frac{1}{5}\int\sin^2 zdz=$

$$=\frac{1}{10}\int\left(1-\cos 2z\right)dz=\frac{z}{10}-\frac{1}{20}\sin 2z+C=$$

$$=\frac{5e^x+2}{10}-\frac{1}{20}\sin\left(10e^x+4\right)+C=\frac{e^x}{2}-\frac{1}{20}\sin\left(10e^x+4\right)+C.$$

Пример 10.7. $I=\int\frac{\sin^3\left(2\ln x+7\right)}{x}dx$. Сделаем замену переменной $z=2\ln x+7$. Тогда $dz=\frac{2dx}{x}$. Получим $I=\frac{1}{2}\int\sin^3 z\,dz=$

$$=-\frac{1}{2}\int\sin^2 z\,d\cos z=-\frac{1}{2}\int\left(1-\cos^2 z\right)d\cos z=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos z-\frac{\cos^3 z}{3}\right)+C=\frac{\cos^3\left(2\ln x+7\right)}{6}-\frac{\cos\left(2\ln x+7\right)}{2}+C.$$

Пример 10.8. $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{\cos x}}dx=2\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt[5]{\cos x}}dx=-2\int\cos^{\frac{4}{5}}x\,d\cos x=$

$$=-\frac{10}{9}\cos^{\frac{9}{5}}x+C.$$

Пример 10.9. $I=\int\frac{\sin^4(\mathrm{ctg}\,x)}{\sin^2 x}dx$. Введем новую переменную $z=\mathrm{ctg}\,x$ и найдем $dz=-\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Тогда

$$I=-\int\sin^4 zdz=-\frac{1}{4}\int(1-\cos 2z)^2dz=-\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2z+\cos^2 2z\right)dz=$$

$$=-\frac{z}{4}+\frac{1}{4}\sin 2z-\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 4z\right)dz=-\frac{3z}{8}+\frac{1}{4}\sin 2z-\frac{1}{32}\sin 4z+C=$$

$$=-\frac{3}{8}\mathrm{ctg}\,x+\frac{1}{4}\sin(2\mathrm{ctg}\,x)-\frac{1}{32}\sin(4\mathrm{ctg}\,x)+C.$$

Пример 10.10. $I=\int\frac{\arcsin xdx}{\left(\arcsin^2 x+4\arcsin x-5\right)\sqrt{1-x^2}}$. Сделаем замену $z=\arcsin x$ и найдем $dz=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Получим

$I=\int\frac{zdz}{z^2+4z-5}=\int\frac{zdz}{(z-1)(z+5)}$. Представим правильную дробь как сумму простейших дробей:

$$\frac{z}{(z-1)(z+5)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+5}=\frac{A(z+5)+B(z-1)}{(z-1)(z+5)}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов выпишем тождественное равенство исходного и вновь полученного числителей:

$$z=A(z+5)+B(z-1).$$

Придадим переменной значение $z=1$. Тогда $1=6A$, откуда $A=\frac{1}{6}$.

Затем при $z=-5$ тождество примет вид: $-5=-6B$, откуда $B=\frac{5}{6}$.

Тогда

$$I=\frac{1}{6}\int\frac{dz}{z-1}+\frac{5}{6}\int\frac{dz}{z+5}=\frac{1}{6}\ln|z-1|+\frac{5}{6}\ln|z+5|+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|\arcsin x-1|+\frac{5}{6}\ln|\arcsin x+5|+C.$$

Пример 10.11. $I=\int x^2\operatorname{arctg}x\,dx$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим $u=\operatorname{arctg}x, dv=x^2dx$. Найдем $du=\frac{dx}{1+x^2}$ и $v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$.

Тогда

$$I=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{(1+x^2)}=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^2\cdot x\,dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx^2=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx^2=$$

$$=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\int dx^2+\frac{1}{6}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

Пример 10.12. $I=\int x^2\ln(x+2)dx$. Применим здесь формулу интегрирования по частям, полагая $u=\ln(x+2)$, $dv=x^2dx$. Тогда $du=\frac{dx}{x+2}$, $v=\frac{x^3}{3}$. Отсюда $I=\frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x+2}dx$. Выделим в неправильной рациональной дроби целую часть делением числителя на знаменатель.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x+2 \\ \cline{2-2} -\;\underline{x^3+2x^2} & x^2-2x+4 \\ -2x^2 & \\ -\;\underline{-2x^2-4x} & \\ 4x & \\ -\;\underline{4x+8} & \\ -8 & \end{array}$$

Получим $I=\frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\frac{1}{3}\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx=$

$$=\frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}\ln(x+2)+C.$$

Пример 10.13.

$$\int\operatorname{ctg}x\ln(\sin x)\,dx=\int\ln(\sin x)\,d(\ln(\sin x))=\frac{1}{2}\ln^2(\sin x)+C.$$

Здесь мы заметили, что $(\ln(\sin x))'=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg}x$.

Пример 10.14. $I=\int\frac{(e^{2x}+5e^x)dx}{e^{2x}+6e^x+25}$. Введем новую переменную $z=e^x$. Тогда $dz=e^xdx$. Получим $I=\int\frac{(z+5)dz}{z^2+6z+25}$. Воспользуемся формулами $\left(z^2+6z+25\right)'=2z+6,\quad z+5=\frac{1}{2}(2z+6)+2$.

Тогда

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2z+6)dz}{z^2+6z+25}+2\int\frac{d(z+3)}{(z+3)^2+16}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(z^2+6z+25\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z+3}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+6e^x+25\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x+3}{4}+C.$$

Пример 10.15. $I=\int\frac{\sqrt{4x+5}}{\sqrt{4x+4}}dx$. Введем новую переменную $z=\sqrt{4x+4}$. Найдем $4x+5=z^2+1$. Тогда $4dx=2zdz$, откуда $dx=\frac{1}{2}zdz$. Таким образом $I=\int\frac{\sqrt{z^2+1}\,zdz}{2z}=\frac{1}{2}\int\sqrt{z^2+1}dz$. Получили интеграл, вычисленный ранее в примере 6.9,

$$I=\frac{1}{4}\left(z\sqrt{z^2+1}+\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4x+4}\cdot\sqrt{4x+5}+\ln\left(\sqrt{4x+4}+\sqrt{4x+5}\right)\right)+C.$$

Пример 10.16. $I=\int\frac{e^x+4}{e^x+2}dx=\int\frac{(e^x+4)e^x}{(e^x+2)e^x}dx$. Сделаем замену переменной $z=e^x$. Тогда $dz=e^xdx$ и $I=\int\frac{(z+4)dz}{(z+2)z}$. Разложим правильную дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{z+4}{z(z+2)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+2}=\frac{A(z+2)+Bz}{z(z+2)}.$$

Из тождественного равенства числителей $z+4=A(z+2)+Bz$ найдем неизвестные буквенные коэффициенты.

При $z=0$ тождество принимает вид $4=2A$, откуда $A=2$.
При $z=-2$ тождество принимает вид $2=-2B$, откуда и $B=-1$.

Отсюда $I=2\int\frac{dz}{z}-\int\frac{dz}{z+2}=2\ln|z|-\ln|z+2|+C=$

$$=2\ln\left|e^x\right|-\ln\left|e^x+2\right|+C=2x-\ln\left|e^x+2\right|+C.$$

Предложим другое решение, которое использует интеграл, взятый в примере 5.8.

$$\int\frac{e^x+4}{e^x+2}dx=\int\left(1+\frac{2}{e^x+2}\right)dx=x-\ln\left(2e^{-x}+1\right)+C=$$
$$=x-\ln\left(\left(2+e^x\right)e^{-x}\right)+C=x-\ln\left(2+e^x\right)+x+C=2x-\ln\left(2+e^x\right)+C.$$

Пример 10.17. $I=\int\frac{dx}{1+x^3}$. Разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2-x+1}=$$
$$=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+D)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Рассмотрим тождественное равенство исходного числителя и вновь полученного:

$$1\equiv A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+D)(x+1).$$

Положим в нем последовательно $x=-1;\quad x=0$, а затем приравняем друг к другу коэффициенты при x^2. Тогда получим систему уравнений для нахождения неизвестных буквенных коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned}1&=3A;\\1&=A+D;\\0&=A+B.\end{aligned}\right\}$$

Решая ее, найдем $A=\frac{1}{3},D=\frac{2}{3},B=-\frac{1}{3}$.

Тогда

$$I=\int\frac{\frac{1}{3}dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Вычислим отдельно $I_1=\int\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$. Сделаем замену $x-\frac{1}{2}=z$.

Найдем $x=z+\frac{1}{2}$, $dx=dz$. Получим $I_1=\int\frac{z+\frac{1}{2}-2}{z^2+\frac{3}{4}}dz=$

$$=\int\frac{zdz}{z^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(z^2+\frac{3}{4}\right)}{z^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|z^2+\frac{3}{4}\right|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt{3}}+C.$$

Тогда

$$I=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^3}{x^3+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 10.18. $I=\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$. Сделаем замену $x=z^{12}$ и найдем $dx=12z^{11}dz$. Получим $I=\int\frac{z^4\cdot12z^{11}}{z^6+z^3}dz=12\int\frac{z^{12}}{z^3+1}dz$.

Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Выделим из нее целую часть.

$$\begin{array}{r|l}
z^{12} & z^3+1 \\ \cline{2-2}
\underline{z^{12}+z^9} & z^9-z^6+z^3-1 \\
-z^9 & \\
\underline{-z^9-z^6} & \\
z^6 & \\
\underline{z^6+z^3} & \\
-z^3 & \\
\underline{-z^3-1} & \\
1 &
\end{array}$$

Тогда $I=12\int\left(z^9-z^6+z^3-1+\frac{1}{z^3+1}\right)dz=$

$$=12\frac{z^{10}}{10}-12\frac{z^7}{7}+12\frac{z^4}{4}-12z+12\int\frac{dz}{z^3+1}.$$

Последний интеграл взят в примере 10.17. Воспользуемся этим результатом:

$$I=\frac{6}{5}z^{10}-\frac{12}{7}z^7+3z^4-12z+12\left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(z+1)^3}{z^3+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Затем вернемся к старой переменной $z=\sqrt[12]{x}$:

$$I=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7}+3\sqrt[3]{x}-12\sqrt[12]{x}+2\ln\left|\frac{\left(\sqrt[12]{x}+1\right)^3}{\sqrt[4]{x}+1}\right|+4\sqrt{3}\ \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 10.19. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2-x}+3}$. Сделаем замену переменной $2-x=z^2$. При этом $x=2-z^2,\quad dx=-2zdz$.

Тогда

$$I=\int\frac{-2zdz}{z+3}=-2\int\frac{z+3-3}{z+3}dz=-2\int\left(1-\frac{3}{z+3}\right)dz=-2\int dz+6\int\frac{d(z+3)}{z+3}=$$

$$=-2z+6\ln|z+3|+C=-2\sqrt{2-x}+6\ln\left|\sqrt{2-x}+3\right|+C.$$

Пример 10.20. Вычислить $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

Пусть $x>0$. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}=\int\frac{d\left(\frac{-1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2-1}}=$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2-1}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{|x|}+C.$$

При $x<0$: $I=-\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right|+C=$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{|x|}+C.$$

Рекомендуемая литература

1. *Двайт, Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – М.: Наука, 1964.
2. *Выгодский, М. Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М.: АСТ Астрель, 2006.
3. *Натансон, И. П.* Краткий курс высшей математики / И. П. Натансон. – СПб.: Лань, 2005.
4. *Неопределённый интеграл*. Методические указания к самостоятельному выполнению задания для студентов всех специальностей / сост. И. Б. Башмакова; под ред. С. Н. Нумерова. – Л.: ЛИСИ, 1983.
5. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – Ч. 1.
6. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.: «Наука», 1985.

Оглавление

Учебное издание

Вера Борисовна Смирнова
Лидия Евсеевна Морозова

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Редактор О. Д. Камнева
Корректор К. И. Бойкова
Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 03.08.10. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 3,9. Тираж 1000 экз. Заказ 6. «С» 3.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, 4.
Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, 5.

ДЛЯ ЗАПИСЕЙ