Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

В. Б. СМИРНОВА, Л. Е. МОРОЗОВА

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2010

УДК 519.95 (075.8)

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент Е. К. Ершов (СПбГАСУ);
канд. физ.-мат. наук, доцент Д. Ю. Волков (РГПУ им. А. И. Герцена)

Смирнова, В. Б.

Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие / В. Б. Смирнова, Л. Е. Морозова; СПбГАСУ. – СПб., 2010. – 87 с.

Пособие предназначено для самостоятельного изучения раздела «Обыкновенные дифференциальные уравнения» студентами специальностей с сокращенным курсом математики. Даны основные определения и теоремы. Приводится методика решения задач. Рассмотрены многочисленные примеры.

Ил. 1. Библиогр.: 6 назв.

Рекомендовано Редакционно-издательским советом СПбГАСУ в качестве учебного пособия.

Введение

Изучение различных задач геометрии, механики, физики часто приводит к уравнениям, содержащим искомые переменные величины и их производные. Такие уравнения принято называть *дифференциальными*.

Если искомые величины являются функциями одной переменной, то дифференциальные уравнения называются *обыкновенными*. Если искомые величины являются функциями нескольких переменных, то уравнения называются *дифференциальными уравнениями с частными производными.*

В данном учебном пособии изучаются только обыкновенные дифференциальные уравнения. Дадим развернутое определение этого понятия.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется равенство, выражающее зависимость между функцией одной переменной, ее аргументом и ее производными. Это равенство может не содержать самой функции или ее аргумента, может не содержать ни функции, ни аргумента, но оно обязательно содержит хотя бы одну производную функции.

Приведем примеры обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y'' + 2y' - 3y = 0;$$

$$y^{(4)} = \sin 2x;$$

$$y''' - 2y'' = \operatorname{tg} x;$$

$$y''' = 5.$$

Всюду далее обыкновенные дифференциальные уравнения будем называть дифференциальными уравнениями.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей входящей в него производной.

В приведенных выше примерах порядки уравнений, рассматриваемых сверху вниз, таковы: 2; 4; 3; 3.

Глава 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $y = y(x)$.

Решением *уравнения (1.1) на промежутке X (открытом или замкнутом, конечном или бесконечном) называется дифференцируемая на промежутке X функция $y = y(x)$, которая при подстановке в (1.1) обращает его в тождество относительно аргумента $x \in X$.*

Если уравнение (1.1) можно разрешить относительно производной, то оно принимает вид

$$y' = f(x, y), \quad (y = y(x)). \tag{1.2}$$

В этом пособии мы будем рассматривать именно такие уравнения.

Приведем два примера уравнений первого порядка и постараемся найти их решения.

1. Рассмотрим уравнение

$$y'(x) = \cos 2x. \tag{1.3}$$

Легко видеть, что функция $y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ является решением уравнения (1.3) при всех $x \in (-\infty, \infty)$. Действительно, $y(x)$ – первообразная для функции $\cos 2x$. Но любая функция вида

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x + C, \tag{1.4}$$

где $C = \text{const}$, также является первообразной функции $\cos 2x$ и, следовательно, является решением уравнения (1.3). Так что уже этот пример позволяет сделать вывод, что дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2. Рассмотрим уравнение

$$y'(x) = 2y(x). \tag{1.5}$$

Нетрудно догадаться, что его решением при всех $x \in (-\infty, \infty)$ является функция $y(x) = e^{2x}$ (ведь только функция вида $e^{\alpha x}$, где α – число, не меняет своего вида при дифференцировании). Нетрудно также увидеть, что любая функция

$$y = Ce^{2x}, \tag{1.6}$$

где $C = \text{const}$, является решением уравнения (1.5). Таким образом, вывод, что дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, подтверждается и на этом примере.

Любое уравнение (1.2) имеет бесконечное множество решений. Чтобы конкретизировать какую-то функцию из этого множества, для уравнения (1.2) задают начальное условие

$$y(x)\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{1.7}$$

Оно читается так: функция $y(x)$ при $x = x_0$ имеет значение y_0. Условие (1.7) часто записывают в виде

$$y(x_0) = y_0.$$

Заметим, что при $x = x_0$, $y = y_0$ функция $f(x, y)$ должна быть определена.

Поскольку любое уравнение (1.2) имеет бесконечно много решений, для него вводятся понятия ***общего*** и ***частного*** решений.

Общим решением *уравнения (1.2) называется семейство функций $y = \varphi(x, C)$, зависящих от независимой переменной x и произвольной постоянной C, обладающее следующими свойствами:*

1) для любого конкретного значения $C = C_0$ функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет уравнению (1.2);

2) для любой пары чисел (x_0, y_0), для которой функция $f(x, y)$ определена, найдется такое значение $C = C_0$, что $\varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию (1.7).

Обратимся к рассмотренным ранее примерам. Убедимся, что решение (1.4) является общим решением уравнения (1.3). Пусть задано условие (1.7). Оно эквивалентно требованию

$$y_0 = \frac{1}{2}\sin 2x_0 + C_0.$$

Таким образом, $C_0 = y_0 - \frac{1}{2}\sin 2x_0$. Тогда функция

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x + y_0 - \frac{1}{2}\sin 2x_0$$

удовлетворяет условию (1.7).

Легко убедиться, что формула (1.6) дает общее решение уравнения (1.5). Действительно, при любом C функция $y = Ce^{2x}$ удовлетворяет уравнению (1.5), и для любой пары (x_0, y_0) функция $y = (y_0 e^{-2x_0})e^{2x}$ (т. е. $C_0 = \frac{y_0}{e^{2x_0}}$) удовлетворяет начальному условию (1.7).

***Частным решением** уравнения (1.2) называется решение, полученное из общего при конкретном значении C.*

Таким образом, общее решение является совокупностью частных решений.

У уравнения (1.2) могут оказаться решения, которые не могут быть получены из общего решения ни при каком значении C. Мы их рассматривать не будем. Нас будет интересовать нахождение общих и частных решений дифференциальных уравнений.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Замечание. Часто при интегрировании дифференциального уравнения зависимость между функцией y, ее аргументом x и произвольной

постоянной C не удается получить в виде $y = \varphi(x, C)$, а удается получить в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1.8}$$

Равенство (1.8) называется *общим интегралом* дифференциального уравнения (1.1). Равенство

$$\Phi(x, y, C_0) = 0, \tag{1.9}$$

полученное из (1.8) при конкретном значении $C = C_0$, называется *частным интегралом* уравнения (1.1).

Заметим, что каждое частное решение уравнения (1.2) $y = \varphi(x, C_0)$ задает линию на плоскости xOy. Эта линия называется *интегральной кривой* уравнения. Общее решение геометрически определяет множество интегральных кривых.

В связи с частными решениями уравнения (1.2) часто ставится ***задача Коши***. Эта задача состоит в нахождении решения уравнения (1.2), удовлетворяющего заданному начальному условию (1.7). Мы не излагаем здесь теорем, гарантирующих существование и единственность решения задачи Коши (1.2), (1.7). Они изложены в учебном пособии [6].

Если дифференциальное уравнение таково, что его общее решение или общий интеграл можно выразить через элементарные функции и неопределенные интегралы от элементарных функций (при этом интегралы могут оказаться неберущимися), то говорят, что уравнение *интегрируется в квадратурах*. Существует несколько типов уравнений первого порядка, которые интегрируются в квадратурах. В этом пособии будут рассмотрены следующие типы уравнений: простейшее, с разделяющимися переменными, линейное, обобщенное линейное (уравнение Я. Бернулли) и однородное.

1.1. Простейшие уравнения

Их общий вид таков:

$$y' = f(x). \tag{1.10}$$

Их общее решение представляет собой неопределенный интеграл от функции $f(x)$, т. е.

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Здесь и во всех последующих записях решений дифференциальных уравнений под символом $\int f(x)dx$ имеется в виду одна (любая) первообразная подынтегральной функции.

Уравнение (1.3) является простейшим.

1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Так называются уравнения вида

$$y' = f(x)g(y). \tag{1.11}$$

Чтобы получить общее решение (общий интеграл) уравнения (1.11), следует воспользоваться тем, что $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, а затем «разделить» переменные, т. е. записать уравнение (1.11) в виде

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

или

$$d\left(\int \frac{dy}{g(y)}\right) = d\left(\int f(x)dx\right).$$

Деля обе части (1.11) на $g(y)$, можно потерять решения вида $y = \eta$, где $y = \eta$ является решением уравнения $g(y) = 0$. Эти решения после получения общего решения следует рассмотреть отдельно. Может оказаться, что они не являются частными решениями (1.11).

Если дифференциалы двух функций равны, то сами функции могут отличаться друг от друга лишь на постоянное слагаемое. (См. теорему о первообразных учебного пособия [2].) Следовательно,

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \tag{1.12}$$

Формула (1.12) и дает общее решение (общий интеграл) уравнения (1.11). Заметим, что *простейшее* дифференциальное уравнение (1.10) является частным случаем *уравнения с разделяющимися переменными* (1.11), когда $g(y) \equiv 1$.

Пример 1.1. Найти общее решение уравнения

$$y' = y^2x + 4x + y^2 + 4. \tag{1.13}$$

Решение. Правую часть этого уравнения можно разложить на множители:

$$y^2x + 4x + y^2 + 4 = (y^2x + y^2) + (4x + 4) =$$
$$= y^2(x+1) + 4(x+1) = (y^2+4)(x+1).$$

Следовательно, уравнение (1.13) можно переписать в виде

$$y' = (y^2+4)(x+1)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = (y^2+4)(x+1) \tag{1.14}$$

и «разделить» в нем переменные:

$$\frac{dy}{y^2+4} = (x+1)dx.$$

Отсюда

$$\int \frac{dy}{y^2+4} = \int (x+1)dx + C$$

или

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Тем самым получен общий интеграл уравнения (1.13). Его можно переписать в виде

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right) = x^2 + 2x + C.$$

Пример 1.2. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{\sqrt{y^2+4}}{x}. \tag{1.15}$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2+4}$$

и, «разделив» переменные, получим

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2+4}} = \frac{dx}{x}. \tag{1.16}$$

Отсюда

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+4}} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|.$$

Здесь произвольная постоянная выбрана в виде $\ln|C|$ ($C \neq 0$). После вычисления интегралов получаем

$$\ln\left|y + \sqrt{y^2+4}\right| = \ln|x| + \ln|C|$$

или

$$y + \sqrt{y^2+4} = Cx \quad (C \neq 0).$$

Тем самым получен общий интеграл исходного уравнения (1.15).

Пример 1.3 [1]. Дано дифференциальное уравнение

$$y' = 2\sqrt{y} \quad (y > 0). \tag{1.17}$$

А. Найти его общее решение.

Б. Решить для него задачу Коши с начальным условием

$$y|_{x=1} = 1. \tag{1.18}$$

Решение

А. Запишем уравнение (1.17) в виде

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx. \tag{1.19}$$

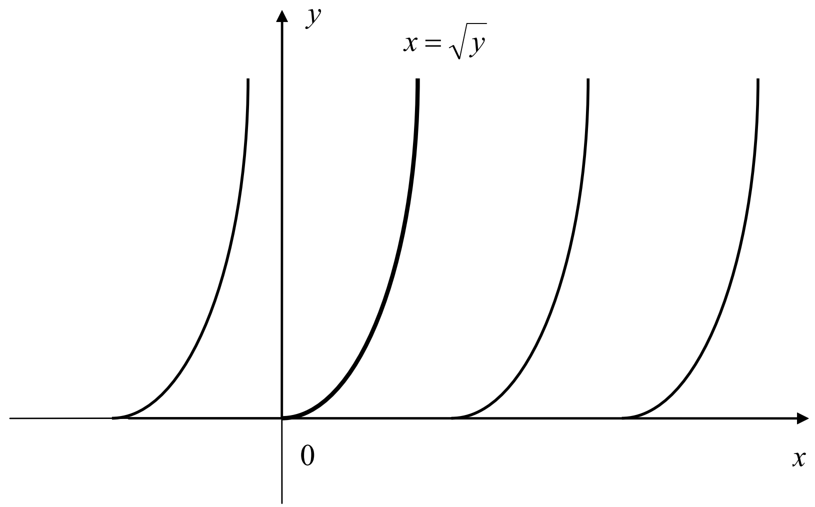
Проинтегрируем (1.19). Получим

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx + C$$

или

$$\sqrt{y} = x + C. \tag{1.20}$$

Получен общий интеграл уравнения (1.17). Легко увидеть, что геометрически формула (1.20) определяет семейство полупарабол $y = (x+C)^2$, $x > -C$ (рисунок).



Интегральные кривые уравнения (1.17)

Б. Чтобы решить задачу Коши (1.17), (1.18), подставим в формулу (1.20) начальные данные $x = 1$ и $y = 1$. Получим

$$1 = 1 + C; \quad C = 0.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$x = \sqrt{y}. \tag{1.21}$$

График функции (1.21) отмечен на рисунке жирной линией.

1.3. Линейные уравнения

Линейным уравнением называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (p(x) \neq 0). \tag{1.22}$$

Заметим, что искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение (1.22) только в первой степени и между собой не перемножаются.

Общее решение этого уравнения будем искать методом Бернулли. Согласно этому методу решение ищется в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x)v(x), \tag{1.23}$$

где функция $v(x) \neq 0$ выбирается произвольно, а функция $u(x)$ определяется при известной уже $v(x)$ так, чтобы $y(x)$ была решением (1.22).

Подставим функцию (1.23) в уравнение (1.22). Получим

$$u'v + v'u + p(x)uv = f(x)$$

или

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x). \tag{1.24}$$

Наложим на функцию $v(x)$ условие, состоящее в том, что она удовлетворяет уравнению

$$v' + p(x)v = 0. \tag{1.25}$$

Здесь мы воспользовались возможностью произвольно выбрать $v(x)$. Уравнение (1.25) – уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому представим его в виде

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx. \tag{1.26}$$

Проинтегрируем (1.26). Получим

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$$

или

$$\ln|v| = -\int p(x)dx,$$

откуда

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}. \tag{1.27}$$

Нам нужна лишь одна, любая функция, удовлетворяющая (1.25), поэтому произвольную постоянную при интегрировании положим равной нулю.

Подставив функцию $v(x)$ в уравнение (1.24), получим для определения $u(x)$ простейшее уравнение

$$u' = \frac{f(x)}{v(x)}.$$

Его общее решение имеет вид

$$u(x) = \int \frac{f(x)}{v(x)} dx + C.$$

Тогда

$$y(x) = Cv(x) + \left(\int \frac{f(x)}{v(x)} dx\right)v(x),$$

где $v(x)$ определяется по формуле (1.27).

Пример 1.4. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = x^3. \tag{1.28}$$

Решение. Ищем решение в виде $y = uv$. Тогда (1.28) запишется следующим образом:

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^3. \tag{1.29}$$

Функцию $v(x)$ ищем как решение уравнения

$$v' - \frac{v}{x} = 0$$

или

$$\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}.$$

Тем самым выражение $v'u-\frac{uv}{x}$ в уравнении (1.29) обращается в ноль.

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$\ln|v|=\ln|x|$$

или

$$v=x.$$

Подставляем найденную функцию $v(x)$ в уравнение (1.29). Получаем

$$u'x=x^3$$

или

$$u'=x^2.$$

Тогда

$$u(x)=\frac{x^3}{3}+C.$$

Общее решение (1.28) имеет вид

$$y(x)=Cx+\frac{x^4}{3}.$$

Пример 1.5. Найти общее решение уравнения

$$y'+\frac{y}{x}=e^{2x}. \tag{1.30}$$

Решение. Ищем решение уравнения (1.30) в виде $y=uv$. Тогда (1.30) принимает вид

$$u'v+v'u+\frac{uv}{x}=e^{2x}. \tag{1.31}$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы она была решением уравнения

$$v'+\frac{v}{x}=0 \tag{1.32}$$

или

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\ln|v|=-\ln|x|,$$

откуда

$$v=\frac{1}{x}.$$

(Мы воспользовались свойством $\alpha\ln A=\ln A^{\alpha}$ $(A>0, \alpha\in R)$.)

Подставляем найденную функцию $v(x)$ в (1.31). Получаем

$$u'=xe^{2x},$$

откуда

$$u(x)=\int xe^{2x}dx+C$$

или

$$u(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$$

Общее решение уравнения (1.30) имеет вид

$$y(x)=\frac{C}{x}+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4x}e^{2x}.$$

Пример 1.6. Решить задачу Коши

$$y'+2y=\cos^2(e^{2x}), \tag{1.33}$$

$$y|_{x=0}=2. \tag{1.34}$$

Решение. Прежде всего следует получить общее решение уравнения (1.33). Ищем решение в виде $y=uv$. Подставим его в (1.33). Получим

$$u'v+v'u+2uv=\cos^2(e^{2x}). \tag{1.35}$$

Выберем функцию v так, чтобы $v'u+2uv=0$. Тогда

$$v'+2v=0. \tag{1.36}$$

Решаем (1.36) как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{v} = -2dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int dx,$$

$$\ln|v| = -2x,$$

$$v = \mathrm{e}^{-2x}. \tag{1.37}$$

Подставляем функцию $v(x)$ из (1.37) в уравнение (1.35). Получаем

$$u' = \mathrm{e}^{2x}\cos^2(\mathrm{e}^{2x}),$$

откуда

$$u(x) = \int \mathrm{e}^{2x}\cos^2(\mathrm{e}^{2x})dx + C.$$

Отдельно найдем первообразную, стоящую в правой части, с помощью замены $z = \mathrm{e}^{2x}$:

$$\int \mathrm{e}^{2x}\cos^2(\mathrm{e}^{2x})dx = \frac{1}{2}\int \cos^2 z dz = \frac{1}{4}\int (\cos 2z + 1)dz =$$

$$= \frac{1}{8}\sin 2z + \frac{z}{4} = \frac{1}{8}\sin\left(2\mathrm{e}^{2x}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}.$$

Таким образом,

$$u(x) = \frac{1}{8}\sin\left(2\mathrm{e}^{2x}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + C,$$

и общее решение уравнения (1.33) имеет вид

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x}\sin(2\mathrm{e}^{2x}) + \frac{1}{4}. \tag{1.38}$$

Теперь, чтобы найти постоянную C, подставим значения x и y из начального условия (1.34) в общее решение (1.38). Получим

$$2 = C + \frac{1}{8}\sin 2 + \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $C = \frac{7}{4} - \frac{1}{8}\sin 2$, и решение задачи (1.33), (1.34) имеет вид

$$y(x) = \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{8}\sin 2\right)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x}\sin\left(2\mathrm{e}^{2x}\right) + \frac{1}{4}.$$

1.4. Обобщенные линейные уравнения (уравнения Бернулли)

Уравнение Я. Бернулли имеет вид

$$y' + p(x)y = f(x)y^a, \tag{1.39}$$

где $a \neq 1$ и $a \neq 0$ (в случае $a = 1$ уравнение (1.39) превращается в уравнение с разделяющимися переменными, а в случае $a = 0$ – в линейное уравнение).

Решение уравнения (1.39) осуществляется тем же методом Бернулли, что и линейное уравнение (1.23), т. е. реализуется следующая схема:

1. Ищем решение в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x)v(x). \tag{1.40}$$

2. Подставляем функцию (1.40) в уравнение (1.39), получаем уравнение

$$u'v + v'u + p(x)uv = f(x)u^a v^a \tag{1.41}$$

и выбираем функцию $v(x)$ так, чтобы она была частным решением уравнения

$$v' + p(x)v = 0. \tag{1.42}$$

Тогда

$$v(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{1.43}$$

3. Подставляем найденную функцию (1.43) в уравнение (1.41) и получаем для определения $u(x)$ уравнение с разделяющимися переменными

$$u'v(x) = f(x)v^a(x)u^a. \tag{1.44}$$

4. Находим общий интеграл уравнения (1.44). Для этого разделяем переменные и получаем

$$\frac{du}{u^a} = f(x)v^{a-1}(x)dx.$$

Тогда

$$\frac{1}{1-a}u^{1-a} = \int f(x)v^{a-1}(x)dx + C. \qquad (1.45)$$

5. Находим общий интеграл уравнения (1.39). При этом удобно в (1.45) заменить функцию $u(x)$ по формуле

$$u(x) = \frac{y(x)}{v(x)},$$

полученной из (1.40). Общий интеграл имеет вид

$$y^{1-a}(x) = (1-a)v^{1-a}(x)\left(\int f(x)v^{a-1}(x)dx + C\right). \qquad (1.46)$$

Пример 1.7. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = y^3 \ln x. \qquad (1.47)$$

Решение. Это – уравнение Бернулли с $a = 3$. Применяем метод Бернулли и ищем решение в виде $y = uv$. Тогда уравнение (1.47) приобретает вид

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = u^3v^3 \ln x. \qquad (1.48)$$

Выбираем функцию v так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$v' - \frac{v}{x} = 0.$$

В примере 1.4 показано, что решением этого уравнения является функция $v = x$. Тогда из (1.48) получаем уравнение для нахождения $u(x)$:

$$u'x = u^3x^3 \ln x$$

или

$$\frac{du}{u^3} = x^2 \ln x dx. \qquad (1.49)$$

Интегрируем (1.49):

$$-\frac{1}{2}u^{-2} = \int x^2 \ln x dx + C$$

или

$$-\frac{1}{2u^2} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C. \qquad (1.50)$$

Учитывая, что $u = \frac{y}{x}$, получим из (1.50) общий интеграл (1.47) в виде

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

или

$$y^2 = \frac{9x^2}{2x^3 - 6x^3 \ln x + C}. \qquad (1.51)$$

Пример 1.8. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2+4}. \qquad (1.52)$$

Решение. Это – уравнение Бернулли, где $a = 2$. Согласно методу Бернулли полагаем $y = uv$. Тогда уравнение (1.52) принимает вид

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{u^2v^2}{x^2+4}. \qquad (1.53)$$

Выбираем функцию v так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

При решении примера 1.5 показано, что решением этого уравнения является функция $v = \frac{1}{x}$. Тогда из (1.53) получаем уравнение для нахождения $u(x)$:

$$\frac{u'}{x} = \frac{u^2}{x^2(x^2+4)}$$

или

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x(x^2+4)}. \tag{1.54}$$

Интегрируем (1.54). Получаем

$$-\frac{1}{u} = \int \frac{dx}{x(x^2+4)} + C. \tag{1.55}$$

Найдем $\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$. Для этого представим правильную дробь $\frac{1}{x(x^2+4)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+4}.$$

Определим коэффициенты A, B и D из тождественного равенства многочленов

$$1 \equiv A(x^2+4) + x(Bx+D),$$

откуда

$$\begin{cases} A+B=0; \\ D=0; \\ 4A=1, \end{cases}$$

или $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $D = 0$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Тогда формула (1.55) приобретает вид

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{4}\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}} + C.$$

Учитывая, что $y = uv = \frac{u}{x}$, а значит, $u = yx$, получим

$$-\frac{1}{yx} = \frac{1}{4}\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}} + C,$$

откуда

$$y = -\frac{4}{Cx + x\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}}.$$

Пример 1.9 [4]. Найти общее решение уравнения

$$y' + y = x\sqrt{y} \quad (y > 0). \tag{1.56}$$

Решение. Это – уравнение Бернулли, где $a = \frac{1}{2}$. Ищем его решение в форме $y = uv$. Тогда уравнение (1.56) приобретает вид

$$u'v + v'u + uv = x\sqrt{u}\sqrt{v}. \tag{1.57}$$

Требуем, чтобы функция $v(x)$ удовлетворяла уравнению

$$v' + v = 0. \tag{1.58}$$

Решаем уравнение (1.58) как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{v} = -dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int dx,$$

$$\ln|v| = -x,$$

$$v = \mathrm{e}^{-x}.$$

Подставляем найденную функцию $v(x)$ в (1.57). Получаем

$$u'\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sqrt{u}$$

или

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}dx. \tag{1.59}$$

Интегрируем (1.59):

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}dx + C. \tag{1.60}$$

Найдем первообразную, стоящую в правой части (1.60), интегрируя по частям. Положив $t = x$, $dz = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}dx$, найдем $dt = dx$ и $z = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. Тогда

$$\int x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}dx = 2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}dx = 2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Формула (1.60) принимает вид

$$2\sqrt{u} = 2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C. \tag{1.61}$$

Учитывая, что $u = \frac{y}{v}$, или $u = y\mathrm{e}^{x}$, определим из (1.61) общий интеграл уравнения (1.56) в виде

$$\sqrt{y} = x - 2 + C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

1.5. Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если оно может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.62}$$

Чтобы найти общее решение (или общий интеграл) уравнения (1.62), введем новую функцию $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, так что $y(x) = x\,z(x)$.

Тогда $y'(x) = x\,z'(x) + z(x)$ и уравнение (1.62) можно записать в виде

$$x\,z' = f(z) - z. \tag{1.63}$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем его:

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C| \quad (C \neq 0);$$

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|xC|. \tag{1.64}$$

Получен общий интеграл уравнения (1.63). После определения первообразной, стоящей в левой части (1.64), и замены z на $\frac{y}{x}$ получим общий интеграл уравнения (1.62).

Пример 1.10. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{x + y}{x - y}. \tag{1.65}$$

Решение. Уравнение (1.65) можно записать в виде

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}, \tag{1.66}$$

поделив числитель и знаменатель его правой части на x. Вводим новую функцию $z = \frac{y}{x}$, и уравнение (1.66) приобретает вид

$$z'x + z = \frac{1+z}{1-z}.$$

Преобразуем его:

$$z'x = \frac{1+z}{1-z} - z$$

или

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1+z^2}{1-z}.$$

Разделяя здесь переменные, получаем

$$\frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{dx}{x}. \tag{1.67}$$

Интегрируем (1.67). Тогда

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|,$$

откуда

$$\operatorname{arctg} z - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) = \ln|x| + \ln|C|$$

или

$$2\operatorname{arctg} z = \ln\left(C^2x^2(z^2+1)\right).$$

Отсюда

$$C^2x^2(z^2+1) = \mathrm{e}^{2\operatorname{arctg} z}.$$

Заменяя здесь z на $\frac{y}{x}$, находим окончательно

$$C^2\left(x^2+y^2\right) = \mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Это общий интеграл уравнения (1.65).

Пример 1.11. Найти общее решение уравнения

$$y' = \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}. \tag{1.68}$$

Решение. Сделаем замену искомой функции y по формуле $z = \frac{y}{x}$ и запишем уравнение (1.68) следующим образом:

$$xz' + z = \mathrm{e}^{-z} + z$$

или

$$xz' = \mathrm{e}^{-z},$$

откуда

$$\mathrm{e}^z dz = \frac{dx}{x}.$$

Значит,

$$\int \mathrm{e}^z dz = \int \frac{dx}{x} + C$$

или

$$\mathrm{e}^z = \ln|x| + C.$$

Отсюда находим, что

$$z = \ln\left(\ln|x| + C\right)$$

при $\ln|x| > -C$, или $|x| > \mathrm{e}^{-C}$.

Таким образом, общее решение уравнения (1.68) имеет вид

$$y = x\ln\left(\ln|x| + C\right) \quad (|x| > \mathrm{e}^{-C}).$$

Пример 1.12 [3]. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y^2 - 4xy}{2x^2 - 2xy + 2y^2}. \tag{1.69}$$

Решение. Уравнение (1.69) является однородным. Действительно, преобразуем его к виду

$$y' = \frac{\frac{y^2}{x^2} - \frac{4y}{x}}{2 - \frac{2y}{x} + 2\frac{y^2}{x^2}}. \tag{1.70}$$

Теперь сделаем замену $z = \frac{y}{x}$. Получим

$$z'x + z = \frac{z^2 - 4z}{2 - 2z + 2z^2}$$

или

$$z'x = \frac{-2z^3 + 3z^2 - 6z}{2z^2 - 2z + 2}. \tag{1.71}$$

«Разделим» переменные в уравнении (1.71) и проинтегрируем его. Это дает

$$\int \frac{2z^2 - 2z + 2}{-2z^3 + 3z^2 - 6z} dz = \int \frac{dx}{x} - \ln|C|. \tag{1.72}$$

Вычислим первообразную, стоящую в левой части (1.72). Заметим, что

$$\left(-2z^3 + 3z^2 - 6z\right)' = -6z^2 + 6z - 6.$$

Тогда

$$\int \frac{2z^2 - 2z + 2}{-2z^3 + 3z^2 - 6z} dz = -\frac{1}{3}\int \frac{d\left(-2z^3 + 3z^2 - 6z\right)}{-2z^3 + 3z^2 - 6z} = -\frac{1}{3}\ln\left|-2z^3 + 3z^2 - 6z\right|.$$

В результате формула (1.72) приобретает вид

$$-\frac{1}{3}\ln\left|-2z^3 + 3z^2 - 6z\right| = \ln|x| - \ln|C|$$

или

$$C = x^3\left(-2z^3 + 3z^2 - 6z\right).$$

Это общий интеграл уравнения (1.71). Заменяя в нем z на $\frac{y}{x}$ и C на $-C$, находим общий интеграл уравнения (1.69)

$$2y^3 - 3y^2x + 6yx^2 = C.$$

1.6. Решение задачи Коши для различных типов уравнений первого порядка

Пример 1.13 [4]. Решить задачу Коши:

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \tag{1.73}$$

$$y\big|_{x=\mathrm{e}} = \mathrm{e}\sqrt{2}. \tag{1.74}$$

Решение. Сначала получим общий интеграл уравнения (1.73). Это – однородное уравнение (его можно рассматривать и как уравнение Бернулли, где $a = -1$). Введем функцию $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Тогда $y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$ и уравнение (1.73) примет вид

$$x z' = \frac{1}{z} \tag{1.75}$$

или

$$zdz = \frac{dx}{x}. \tag{1.76}$$

Интегрируя (1.76), получим

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + C.$$

Общий интеграл уравнения (1.73) имеет вид

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C. \qquad (1.77)$$

Теперь подставим в (1.77) значения x и y из начального условия (1.74). Получим для определения C уравнение

$$1 = 1 + C,$$

откуда $C = 0$. Тогда искомый частный интеграл уравнения (1.73) имеет вид

$$y^2 = x^2 \ln x^2.$$

Учитывая (1.74), можем утверждать, что решение задачи Коши (1.73)–(1.74) имеет вид

$$y = x\sqrt{\ln x^2}.$$

Пример 1.14. Решить задачу Коши:

$$y' + \frac{y}{x} = y^2, \qquad (1.78)$$

$$y|_{x=1} = \frac{1}{2}. \qquad (1.79)$$

Решение. Уравнение (1.78) является уравнением Бернулли ($a = 2$). Найдем его общее решение. Положим $y = uv$. Уравнение (1.78) приобретает вид

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = u^2 v^2. \qquad (1.80)$$

Выбираем функцию v так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

При решении примера 1.5 показано, что этому уравнению удовлетворяет решение $v = \frac{1}{x}$. Тогда из (1.80) получаем уравнение для нахождения $u(x)$:

$$u' = u^2 \frac{1}{x}$$

или

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}. \qquad (1.81)$$

Интегрируя (1.81), получаем

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C.$$

Тогда, поскольку $u = \frac{y}{v} = yx$, общий интеграл уравнения (1.78) имеет вид

$$\frac{1}{xy} = -\ln|x| - C. \qquad (1.82)$$

Подставим начальные значения x и y из (1.79) в общий интеграл (1.82). Получим

$$2 = -C.$$

Тогда решение задачи (1.78)–(1.79) имеет вид

$$y = \frac{1}{x(2 - \ln|x|)}.$$

Пример 1.15. Решить задачу Коши:

$$y' = \frac{y}{2x + y^4}, \qquad (1.83)$$

$$y\big|_{x=2} = 1. \tag{1.84}$$

Решение. Прежде всего определим тип уравнения (1.83). Для этого представим его в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x + y^4}{y}$$

или

$$x'_y - \frac{2x}{y} = y^3. \tag{1.85}$$

Уравнение (1.85) является линейным относительно функции $x = x(y)$.

Ищем его общее решение в виде $x = uv$. Тогда из (1.85) следует, что

$$u'v + v'u - \frac{2uv}{y} = y^3. \tag{1.86}$$

Выбираем функцию v, удовлетворяющую уравнению

$$v' - \frac{2v}{y} = 0.$$

Тогда

$$\frac{dv}{v} = 2\frac{dy}{y}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его частное решение:

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dy}{y},$$

$$\ln|v| = 2\ln|y|,$$

$$v = y^2. \tag{1.87}$$

Подставим (1.87) в (1.86) и получим уравнение для определения $u(x)$

$$u'y^2 = y^3$$

или

$$u' = y.$$

Его общее решение имеет вид

$$u(y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Тогда общее решение уравнения (1.85) запишется следующим образом:

$$x(y) = \frac{y^4}{2} + Cy^2. \tag{1.88}$$

Подставим в (1.88) начальные значения x и y из (1.84). Получим

$$2 = \frac{1}{2} + C,$$

откуда $C = \frac{3}{2}$. Таким образом, частный интеграл для задачи Коши (1.83)–(1.84) имеет вид

$$x = \frac{y^4}{2} + \frac{3}{2}y^2.$$

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка таков:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (2.1)$$

Здесь $y = y(x)$.

Решением *уравнения (2.1) на промежутке X называется дважды дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение (2.1) обращает его в тождество относительно аргумента x на промежутке X.*

Во многих случаях уравнение (2.1) может быть разрешено относительно старшей производной. Тогда оно принимает вид

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad (2.2)$$

Именно такие уравнения мы и будем рассматривать.

Рассмотрим пример уравнения второго порядка

$$y'' + y = 0. \qquad (2.3)$$

Здесь легко «угадать» решения: $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Нетрудно также догадаться, что любая функция вида

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

где C_1 и C_2 – любые числа, также будет решением данного уравнения.

Ещё один пример:

$$y'' = x^2. \qquad (2.4)$$

Любая функция вида $y = \dfrac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 – числа, является решением этого уравнения. Действительно,

$$y'' = \left(\frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2\right)'' = \left(\frac{x^4}{12}\right)'' + (C_1 x + C_2)'' = x^2 + 0 = x^2.$$

Итак, уравнение второго порядка, так же как и уравнение первого порядка, имеет множество решений. В отличие от уравнений первого порядка множество решений здесь определяется не одним параметром C, а двумя параметрами: C_1 и C_2.

Чтобы конкретизировать какую-то функцию из этого множества решений, для уравнения (2.2) задают начальные условия

$$y(x)\big|_{x=x_0} = b_0, \quad y'(x)\big|_{x=x_0} = b_1 \qquad (2.5)$$

(или $y(x_0) = b_0$, $y'(x_0) = b_1$). Функция $f(x, y, y')$ должна быть определена при $x = x_0$, $y = b_0$, $y' = b_1$.

Для уравнения второго порядка (так же как и для уравнения первого порядка) введем понятия *общего* и *частного* решений.

Общим решением *уравнения (2.2) называется семейство функций $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящих от независимой переменной x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2, обладающее следующими свойствами:*

1) для любых значений C_1^0, C_2^0 функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ является решением (2.2);

2) для любых трёх чисел x_0, b_0, b_1, таких, что значение $f(x_0, b_0, b_1)$ определено, существуют такие значения C_1^0, C_2^0, что $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет начальным условиям (2.5).

Частным решением *уравнения (2.2) называется решение, полученное из общего решения при конкретных значениях C_1 и C_2.*

Задача Коши для уравнения (2.2) состоит в нахождении его частного решения, удовлетворяющего начальным условиям (2.5).

2.1. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Приведем некоторые типы уравнений второго порядка, которые могут быть сведены к уравнениям первого порядка.

2.1.1. Простейшие уравнения

Общий вид простейшего уравнения таков:

$$y'' = f(x). \tag{2.6}$$

Общее решение этого уравнения получается последовательным интегрированием. Запишем (2.6) в виде уравнения первого порядка относительно $y'(x)$:

$$(y')' = f(x) \tag{2.7}$$

и получим общее решение этого простейшего уравнения:

$$y'(x) = \int f(x)dx + C_1. \tag{2.8}$$

Равенство (2.8) снова является простейшим уравнением первого порядка. Его общее решение имеет вид

$$y(x) = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2$$

или

$$y(x) = \int \left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2. \tag{2.9}$$

Приведенное ранее в качестве примера уравнение (2.4) является простейшим уравнением.

Пример 2.1. Дано уравнение

$$y'' = \cos 2x. \tag{2.10}$$

А. Найти его общее решение.

Б. Решить задачу Коши для уравнения (2.10) с начальными условиями

$$y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = -1. \tag{2.11}$$

Решение

А. Последовательно интегрируем (2.10):

$$y'(x) = \int \cos 2x dx + C_1$$

или

$$y'(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1; \tag{2.12}$$

$$y(x) = \int (\frac{1}{2}\sin 2x + C_1)dx + C_2$$

или

$$y(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2. \tag{2.13}$$

Б. Подставим значения x, y и y' из начальных условий (2.11) последовательно в (2.12) и (2.13). Из (2.12) получим

$$-1 = 0 + C_1,$$

откуда $C_1 = -1$. Из (2.13) получим

$$1 = -\frac{1}{4} + C_2,$$

откуда $C_2 = \dfrac{5}{4}$.

Итак, решение задачи Коши (2.10)–(2.11) имеет вид

$$y(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x - x + \frac{5}{4}.$$

2.1.2. Уравнения, в которых отсутствует искомая функция

Это уравнение имеет вид

$$y'' = f(x, y'). \tag{2.14}$$

Введём новую функцию

$$z(x) = y'(x). \tag{2.15}$$

Тогда $y''(x) = z'(x)$ и уравнение (2.14) можно рассматривать как уравнение первого порядка относительно $z(x)$

$$z' = f(x, z).$$

Пусть $z = \varphi(x, C_1)$ является общим решением этого уравнения. Тогда, учитывая (2.15), имеем

$$y' = \varphi(x, C_1). \tag{2.16}$$

Мы получили простейшее уравнение первого порядка для определения $y(x)$. Общее решение уравнения (2.16) имеет вид

$$y(x) = \int \varphi(x, C_1)\, dx + C_2. \tag{2.17}$$

Это и есть общее решение уравнения (2.14).

Пример 2.2. Дано уравнение

$$y'' = \frac{1}{x^3} - \frac{y'}{x}. \tag{2.18}$$

А. Найти его общее решение.

Б. Решить задачу Коши для уравнения (2.18) с начальными условиями

$$y|_{x=1} = 1, \quad y'|_{x=1} = 2. \tag{2.19}$$

Решение

А. Введём $z(x) = y'(x)$. Тогда $y''(x) = z'(x)$, и (2.18) можно записать в виде

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^3}. \tag{2.20}$$

Мы получили линейное уравнение первого порядка относительно $z(x)$. Решаем его методом Бернулли:

$$z = uv,$$

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^3}. \tag{2.21}$$

Выбираем функцию v так, чтобы

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

Это уравнение имеет решение (см. решение уравнения (1.32) из примера 1.5)

$$v = \frac{1}{x}.$$

Подставляем его в (2.21). Получаем

$$u' \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}$$

или

$$u' = \frac{1}{x^2}.$$

Тогда

$$u(x) = -\frac{1}{x} + C_1$$

и

$$z(x) = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x} + C_1\right)$$

или

$$z(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}.$$

Отсюда

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}. \tag{2.22}$$

Интегрируем простейшее уравнение (2.22):

$$y(x) = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}\right) dx + C_2$$

или

$$y(x) = \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2. \qquad (2.23)$$

Б. Подставим значения x, y и y' из начальных условий (2.19) последовательно в (2.22) и (2.23). Получим из (2.22)

$$2 = -1 + C_1,$$

откуда $C_1 = 3$. Получим из (2.23)

$$1 = 1 + C_2,$$

откуда $C_2 = 0$. Решение задачи Коши (2.18), (2.19) имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{x} + 3\ln|x|.$$

Замечание. В уравнениях, допускающих понижение порядка, при решении задачи Коши значения одной из двух произвольных постоянных можно находить сразу после первого интегрирования.

2.1.3. Уравнения, не содержащие независимой переменной

Такие уравнения имеют вид

$$y'' = f(y, y'). \qquad (2.24)$$

Примем y за новую независимую переменную и введем новую функцию этой переменной $p(y) = y'$. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получим:

$$y'' = y''_{xx} = (y'_x)'_x = (p(y))'_x = p'_y y'_x = p'_y p.$$

Теперь уравнение (2.24) превратилось в уравнение первого порядка

$$p'_y p = f(y, p) \quad (p = p(y)). \qquad (2.25)$$

Предположим, что нам известно его общее решение

$$p = \Psi(y, C_1). \qquad (2.26)$$

Равенство (2.26) является уравнением первого порядка относительно функции $y = y(x)$:

$$y' = \Psi(y, C_1) \quad (y = y(x)). \qquad (2.27)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируем его:

$$\int \frac{dy}{\Psi(y, C_1)} = x + C_2. \qquad (2.28)$$

Получен общий интеграл уравнения (2.24).

Пример 2.3 [4]. Решить уравнение

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y} \quad (y = y(x)). \qquad (2.29)$$

Решение. Вводим новую независимую переменную y и новую функцию $p(y) = y'_x$. Тогда $y'' = p'_y p$, и (2.29) принимает вид

$$pp' + \frac{p^2}{y} = 0 \quad (p = p(y)) \qquad (2.30)$$

или

$$p\left(p' + \frac{p}{y}\right) = 0.$$

Отметив, что $p = 0$ (т. е. $y = \text{const}$) является решением (2.30), рассмотрим теперь уравнение

$$p' + \frac{p}{y} = 0. \qquad (2.31)$$

Уравнение (2.31) является уравнением с разделяющимися переменными. Приведем (2.31) к виду

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \qquad (2.32)$$

и проинтегрируем (2.32):

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y} + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0).$$

Тогда

$$\ln|p| = -\ln|y| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0),$$

откуда

$$p = \frac{C_1}{y}. \tag{2.33}$$

Учитывая, что $p = y'_x$, перепишем (2.33) следующим образом:

$$y' = \frac{C_1}{y} \quad (y = y(x)). \tag{2.34}$$

Это тоже уравнение с разделяющимися переменными. Отделим переменные в (2.34)

$$ydy = C_1 dx$$

и снова проинтегрируем:

$$\int ydy = C_1 x + C_2.$$

Отсюда

$$y^2 = C_1 x + C_2$$

или

$$y = \pm\sqrt{C_1 x + C_2}. \tag{2.35}$$

Получено общее решение уравнения (2.29). Заметим, что решение $y = \text{const}$ входит в общее решение (2.35).

Пример 2.4 [3]. Найти общий интеграл (или общее решение) уравнения

$$y'' = \frac{1 + (y')^2}{2y} \quad (y = y(x)). \tag{2.36}$$

Решение. Вводим новую независимую переменную y и новую функцию $p(y) = y'_x$. Тогда $y'' = p'_y p$ и (2.36) принимает вид

$$pp' = \frac{1 + p^2}{2y} \quad (p = p(y)). \tag{2.37}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Приведем его к виду

$$\frac{2pdp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y}$$

и проинтегрируем:

$$\int \frac{2pdp}{1 + p^2} = \int \frac{dy}{y} + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0).$$

Тогда

$$\ln(1 + p^2) = \ln|y| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0)$$

или

$$1 + p^2 = C_1 y \quad (C_1 \neq 0). \tag{2.38}$$

Из (2.38) и замены $p(y) = y'_x$ следует, что

$$y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}. \tag{2.39}$$

Интегрируем (2.39):

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm x + C_2$$

или

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2 \quad (C_1 \neq 0).$$

Таким образом, найден общий интеграл исходного уравнения (2.36)

$$4C_1 y - 4 = (\pm C_1 x + C_2)^2 \quad (C_1 \neq 0).$$

2.1.4. Примеры различных уравнений, допускающих понижение порядка

Пример 2.5. Решить задачу Коши

$$y'' = 2\sqrt{y' - 1}, \tag{2.40}$$

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 2. \tag{2.41}$$

Решение. Уравнение (2.40) не содержит ни аргумента, ни искомой функции. Положим $y'(x) = z(x)$. Тогда $y''(x) = z'(x)$, и уравнение (2.40) приобретает вид

$$z' = 2\sqrt{z-1}$$

или

$$\frac{dz}{2\sqrt{z-1}} = dx. \tag{2.42}$$

Общий интеграл уравнения (2.42) имеет вид

$$\sqrt{z-1} = x + C_1. \tag{2.43}$$

Подставим в (2.43) начальные значения $z = y'$ и x, доставляемые формулами (2.41). Получим

$$1 = C_1.$$

Подставив значение $C_1 = 1$ в (2.43), получим уравнение первого порядка

$$\sqrt{y'-1} = x + 1$$

или

$$y' - 1 = (x+1)^2.$$

Его общее решение имеет вид

$$y(x) = \frac{(x+1)^3}{3} + x + C_2.$$

Снова используем формулы (2.41). Получим

$$0 = y(0) = \frac{1}{3} + C_2,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{1}{3}.$$

Итак, решение задачи Коши (2.40)–(2.41) имеет вид

$$y(x) = \frac{(x+1)^3}{3} + x - \frac{1}{3}$$

или

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x.$$

Пример 2.6 [3]. Найти общее решение уравнения

$$y'' = \frac{y'}{x}\ln\frac{y'}{x}. \tag{2.44}$$

Решение. Уравнение (2.44) не содержит искомой функции. Введем функцию $z(x) = y'(x)$. Уравнение (2.44) приобретает вид

$$z' = \frac{z}{x}\ln\frac{z}{x}. \tag{2.45}$$

Это однородное уравнение. Осуществим замену $u = \dfrac{z}{x}$. Тогда $z = ux$ и $z' = u'x + u$. Уравнение (2.45) преобразуется к виду

$$u'x = u(\ln u - 1)$$

или

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}. \tag{2.46}$$

Проинтегрировав (2.46), получим

$$\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x} + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0)$$

или

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|xC_1| \quad (C_1 \neq 0).$$

Отсюда

$$\ln u - 1 = C_1 x$$

или

$$u = \mathrm{e}^{C_1 x + 1}.$$

Тогда

$$z = x\mathrm{e}^{C_1 x + 1}$$

или

$$y' = x\mathrm{e}^{C_1 x + 1}. \tag{2.47}$$

Уравнение (2.47) – простейшее уравнение первого порядка. Найдем $y(x)$ непосредственным интегрированием. Получаем

$$y(x) = \int x\mathrm{e}^{C_1 x + 1} dx + C_2.$$

Общее решение (2.44) имеет вид

$$y(x) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{C_1} x\mathrm{e}^{C_1 x + 1} - \dfrac{1}{C_1^2}\mathrm{e}^{C_1 x + 1} + C_2, \\ \dfrac{\mathrm{e}x^2}{2} + C_2. \end{array}\right.$$

Пример 2.7. Решить задачу Коши:

$$y'' = \frac{4(y')^2}{y-1} \quad (y = y(x)), \tag{2.48}$$

$$y\Big|_{x=\frac{2}{3}} = 2, \quad y'\Big|_{x=\frac{2}{3}} = 1. \tag{2.49}$$

Решение. Уравнение (2.48) не содержит аргумента x. Будем рассматривать переменную y как новую независимую переменную. Введем новую функцию $p(y) = y'_x$. Тогда $y'' = p'_y p$, и уравнение (2.48) принимает вид

$$pp' = \frac{4p^2}{y-1} \quad (p = p(y)). \tag{2.50}$$

Отметим, что $p = 0$ является решением уравнения (2.50). Оно не удовлетворяет начальным условиям (2.49). Так что интересующее нас решение задачи Коши удовлетворяет уравнению

$$p' = \frac{4p}{y-1}$$

или

$$\frac{4dy}{y-1} = \frac{dp}{p}. \tag{2.51}$$

Проинтегрируем (2.51) и получим

$$4\ln|y-1| = \ln|p| + C_1. \tag{2.52}$$

Подставим начальные значения y и p из условий (2.49). Получим, что $C_1 = 0$. Тогда из (2.52) следует, что

$$y' = (y-1)^4$$

или

$$\frac{dy}{(y-1)^4} = dx. \tag{2.53}$$

Интегрируя (2.53), получаем

$$-\frac{1}{3(y-1)^3} = x + C_2. \tag{2.54}$$

Подставляя значения x и y из условий (2.49) в (2.54), получаем, что $C_2 = -1$. Таким образом, искомое решение имеет вид

$$y = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3x-3}}.$$

Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка таков:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{3.1}$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (3.1) называется ***однородным***. В противном случае оно называется ***неоднородным***.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.2}$$

3.1. Свойство суперпозиции решений линейного однородного уравнения

Теорема 1. *Если функции* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *являются решениями линейного однородного уравнения (3.2)) на промежутке* X, то любая функция вида

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{3.3}$$

где C_1 и C_2 *– произвольные постоянные, тоже является решением уравнения (3.2) на промежутке X.*

Доказательство. Вычислим первую и вторую производные от функции (3.3):

$$y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x),$$
$$y''(x) = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x).$$

Подставим функцию и ее производные в левую часть уравнения (3.2). Получим

$$\begin{aligned} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) &= \\ = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) &+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ p(x)(C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)) + \\ &+ q(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Перегруппируем слагаемые в правой части равенства (3.4). Тогда

$$\begin{aligned} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) &= \\ = C_1 \left\{ y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) \right\} &+ \\ + C_2 \left\{ y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) \right\}&. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Выражения, стоящие в фигурных скобках в правой части (3.5), обращаются в ноль, поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения (3.2). Следовательно, при любых C_1 и C_2 справедливо тождество

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) \equiv 0,$$

и функция (3.3) при любых C_1 и C_2 является решением (3.2). Теорема доказана.

3.2. Вронскиан и его свойство

Снова рассмотрим линейное однородное уравнение (3.2). Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два его частных решения на промежутке X.

Определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

называется ***вронскианом*** решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ (по имени польского математика Ю. Вронского). Конкретный вид функции $W(x)$ определяется видом решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Однако, каковы бы ни были $y_1(x)$ и $y_2(x)$, функциям $W(x)$ присуще одно общее свойство.

Теорема 2. *Либо вронскиан* $W(x)$ *тождественно равен нулю при всех* x *из промежутка* X, *либо он ни при одном значении x в ноль не обращается.*

Доказательство. Запишем $W(x)$ в виде

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \tag{3.6}$$

и продифференцируем эту функцию:

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1(x)y_2''(x) + y_1'(x)y_2'(x) - y_2'(x)y_1'(x) - y_2(x)y_1''(x) = \\ &= y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Составим теперь уравнение, связывающее $W(x)$ и $W'(x)$. Для этого проведем следующие рассуждения. Справедливы тождества

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \tag{3.8}$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0. \tag{3.9}$$

Умножим тождество (3.8) на $(-y_2)$, а (3.9) – на y_1 и сложим полученные тождества. В результате получим

$$(-y_2y_1'' + y_1y_2'') + p(x)(-y_2y_1' + y_1y_2') = 0.$$

Из равенств (3.6), (3.7) следует тогда, что $W(x)$ удовлетворяет уравнению

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0. \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Найдем его общее решение. Запишем (3.10) в виде

$$\frac{dW(x)}{dx} = -p(x)W(x)$$

или

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -p(x)dx.$$

Отсюда

$$\int \frac{dW(x)}{W(x)} = -\int p(x)dx + \ln|C| \quad (C \neq 0) \tag{3.11}$$

или

$$\ln|W(x)| = \ln|C| + \ln e^{-\int p(x)dx} \quad (C \neq 0). \tag{3.12}$$

Тогда

$$W(x) = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{3.13}$$

Заметим, что в формулах (3.11) и (3.12) мы должны предположить, что $C \neq 0$. Однако в итоговой формуле (3.13) это ограничение можно снять, так как $W(x) \equiv 0$ очевидным образом является решением уравнения (3.10). Из формулы (3.13) следует, что либо функция $W(x)$ нигде в ноль не обращается (при $C \neq 0$), либо $W(x) \equiv 0$ (при $C = 0$). Теорема доказана.

Ясно, что обращение или необращение вронскиана $W(x)$ в ноль зависит от того, на каких решениях он построен. В следующем пункте мы выделим в отдельные классы пары решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, для которых $W(x) \equiv 0$, и пары, для которых $W(x)$ нигде не обращается в ноль.

3.3. Линейно зависимые и линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – какие-либо частные решения однородного уравнения (3.2) на промежутке X. Будем говорить, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются ***линейно независимыми*** на промежутке X, если

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{const} \quad (x \in X). \tag{3.14}$$

В противном случае, т. е. если

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const} \quad (x \in X), \tag{3.15}$$

эти решения называются ***линейно зависимыми*** на промежутке X.

В качестве примера рассмотрим снова уравнение (2.3)

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Это линейное однородное уравнение второго порядка. Легко проверить, что у него есть следующие частные решения:

$$y_1(x) = \sin x,$$

$$y_2(x) = \cos x,$$

$$y_3(x) = 5\sin x.$$

Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно независимыми. Действительно,

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \operatorname{tg} x \not\equiv \text{const}.$$

Точно так же линейно независимыми являются решения $y_2(x)$ и $y_3(x)$. А решения $y_1(x)$ и $y_3(x)$ являются линейно зависимыми, так как

$$\frac{y_3(x)}{y_1(x)} = 5.$$

Теорема 3. *Для того чтобы частные решения* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *линейного однородного уравнения (3.2) были линейно независимыми на промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий им вронскиан* $W(x)$ *нигде на промежутке* X *не обращался в ноль.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ и продифференцируем ее:

$$\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)' = \frac{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)}{y_2^2(x)} = \frac{-W(x)}{y_2^2(x)}. \qquad (3.16)$$

Необходимость. Пусть решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, т. е. справедливо соотношение (3.14). В силу соотношения (3.14) можем утверждать, что $\left(\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)'$ не равна тождественно 0 при $x \in X$.

(Известно, что если для какой-либо функции $\Phi(x)$ справедливо тождество $\Phi'(x) \equiv 0$ при $x \in (a,b)$, то функция $\Phi(x) \equiv \text{const}$ при $x \in (a,b)$.) Но тогда из (3.16) следует, что вронскиан $W(x)$ ни при каком $x \in X$ в ноль не обращается.

Достаточность. Пусть $W(x)$ нигде на промежутке X в ноль не обращается. Воспользуемся снова формулой (3.16). Из нее следует, что

$$\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)' \not\equiv 0 \quad (x \in X)..$$

Следовательно,

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{const} \quad (x \in X).$$

Теорема доказана.

3.4. Структура общего решения линейного однородного уравнения

Теорема 4. *Общее решение линейного однородного уравнения (3.2) имеет вид*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (3.17)$$

где C_1 и C_2 *– произвольные постоянные, а* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *– любые линейно независимые частные решения уравнения (3.2).*

Доказательство. Исходя из определения общего решения, нужно показать:

1) функция (3.17) при любых C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению (3.2);

2) для любых x_0, b_0, b_1 найдутся конкретные значения C_1^0, C_2^0 такие, что функция $y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$ будет удовлетворять начальным условиям (2.5).

Справедливость первого из этих утверждений непосредственно следует из свойства суперпозиции решений.

Покажем справедливость утверждения 2). Рассмотрим начальные условия (2.5):

$$y(x)\big|_{x=x_0} = b_0, \quad y'(x)\big|_{x=x_0} = b_1.$$

Подставим значение x_0 в решение (3.17) и его производную и потребуем выполнения условий (2.5). Получим систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными C_1 и C_2 вида

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = b_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = b_1. \end{cases} \tag{3.18}$$

Значения $y_1(x_0)$, $y_2(x_0)$, $y_1'(x_0)$, $y_2'(x_0)$ являются её коэффициентами. Заметим, что определителем матрицы системы (3.18) является вронскиан

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Так как решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, то $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, система (3.18) всегда имеет единственное решение.

Его можно получить по формулам Крамера:

$$C_1^0 = \frac{\Delta_1}{W(x_0)}; \quad C_2^0 = \frac{\Delta_2}{W(x_0)}, \tag{3.19}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_0 & y_2(x_0) \\ b_1 & y_2'(x_0) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & b_0 \\ y_1'(x_0) & b_1 \end{vmatrix}.$$

Функция

$$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$$

удовлетворяет и уравнению (3.2), и начальным условиям (2.5). Теорема доказана.

3.5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим частный случай уравнения (3.2), когда $p(x)$ и $q(x)$ постоянны, т. е. рассмотрим уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.20}$$

где p и q – числа.

Покажем, что для уравнения (3.20) всегда можно найти пару линейно независимых частных решений и, следовательно, всегда можно построить общее решение.

Будем искать частные решения уравнения (3.20) в виде

$$y = \mathrm{e}^{kx}, \tag{3.21}$$

где k – число. Заметим, что $y' = k\mathrm{e}^{kx}$, $y'' = k^2\mathrm{e}^{kx}$. Подставим решение в виде (3.21) и его производные в уравнение (3.20). Получим

$$k^2\mathrm{e}^{kx} + pk\mathrm{e}^{kx} + q\mathrm{e}^{kx} = 0$$

или

$$\mathrm{e}^{kx}(k^2 + pk + q) = 0. \tag{3.22}$$

Равенство (3.22) превращается в тождество лишь тогда, когда k является решением квадратного уравнения

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3.23}$$

(Оно получено из (3.20) заменой производных $y^{(j)}$ $(j = 0, 1, 2)$ на степени k^j.)

Уравнение (3.23) называется ***характеристическим уравнением*** для дифференциального уравнения (3.20).

Итак, если k является корнем квадратного уравнения (3.23), то функция $y = \mathrm{e}^{kx}$ является решением дифференциального уравнения (3.20).

Известна формула, по которой вычисляются решения квадратного уравнения (3.23):

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \tag{3.24}$$

Заметим, что уравнение (3.23) может иметь два различных корня (если $p^2 > 4q$), два одинаковых корня (при $p^2 = 4q$) и может не иметь действительных корней (когда $p^2 < 4q$).

Рассмотрим каждый из трёх случаев отдельно.

1. $p^2 > 4q$. Тогда $k_1 \neq k_2$ и у уравнения (3.20) есть два решения:

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ и } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Они линейно независимы, так как

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}.$$

Следовательно, в этом случае общее решение уравнения (3.20) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. $p^2 = 4q$. Тогда $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$, и говорят, что уравнение (3.23) имеет один двукратный корень. В этом случае мы получаем с помощью нашего предшествующего рассуждения лишь одно решение уравнения (3.20):

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Покажем, что в этом случае функция

$$y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}$$

также является решением (3.20). Действительно,

$$y_2'(x) = (1 - \frac{p}{2}x)e^{-\frac{p}{2}x}, \quad y_2''(x) = (-p + \frac{p^2}{4}x)e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Тогда

$$y_2'' + py_2' + q = e^{-\frac{p}{2}x}\left(-p + \frac{p^2}{4}x + p - \frac{p^2}{2}x + qx\right).$$

Поскольку в данном случае $q = \dfrac{p^2}{4}$, легко установить, что выражение, стоящее в скобках, обращается в ноль и, следовательно, $y_2(x)$ удовлетворяет уравнению (3.20).

Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Общее решение (3.20) имеет вид

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{p}{2}x}.$$

3. $p^2 < 4q$. В этом случае уравнение (3.23) не имеет корней в области вещественных чисел.

Введём в рассмотрение числа

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} \neq 0 \tag{3.25}$$

и покажем, что функции

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

являются решениями (3.20). Рассмотрим $y_1(x)$ и вычислим её производные

$$y_1'(x) = \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_1''(x) = (\alpha^2 - \beta^2)e^{\alpha x}\sin\beta x + 2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Тогда

$$y_1'' + py_1' + q =$$

$$= e^{\alpha x}\{(\alpha^2 - \beta^2)\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x + \alpha p\sin\beta x + p\beta\cos\beta x + q\sin\beta x\} =$$

$$= e^{\alpha x}\{(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha p + q)\sin\beta x + (2\alpha\beta + \beta p)\cos\beta x\}.$$

Рассмотрим коэффициенты, стоящие в фигурных скобках при $\sin\beta x$ и при $\cos\beta x$, и вычислим их с учетом (3.25):

$$\alpha^2 - \beta^2 + \alpha p + q = \frac{p^2}{4} - q + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = 0,$$

$$2\alpha\beta + \beta p = \beta(2\alpha + p) = 0.$$

Таким образом, выражение, стоящее в фигурных скобках, обращается в ноль и, следовательно, $y_1(x)$ является решением (3.20). Точно так же можно показать, что $y_2(x)$ является решением (3.20). Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Общее решение (3.20) в этом случае имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2 e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

***Замечания*:** 1. Если характеристическое уравнение (3.23) имеет два вещественных корня, то эти корни называются простыми (в отличие от двукратного корня).

2. В случае, когда характеристическое уравнение (3.23) не имеет вещественных корней, говорят о его комплексных корнях $\alpha \pm i\beta$, где $i^2 = -1$, а α и β определяются по формулам (3.25). Арифметические действия сложения и умножения над комплексными числами осуществляются как действия над многочленами относительно i с учетом того, что $i^2 = -1$. Так,

$$(\alpha \pm i\beta)^2 + p(\alpha \pm i\beta) + q = \left(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q\right) \pm (2\alpha\beta + \beta p)i = 0.$$

Пример 3.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' - 7y = 0. \tag{3.26}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 6k - 7 = 0\cdot$$

Оно имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = -7$ (случай **1**). Общее решение (3.26) имеет вид

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-7x}.$$

Пример 3.2. Найти общее решение уравнения

$$2y'' + 5y' + 2y = 0. \tag{3.27}$$

Решение. Отметим сперва, что уравнение (3.27) формально отличается от уравнения (3.20) тем, что коэффициент при y'' у него отличен от 1. В этом случае можно поделить уравнение на коэффициент при y'' и привести его к виду (3.20). Можно поступить иначе: получить для него алгебраическое характеристическое уравнение относительно k, заменяя производные $y^{(j)}$ $(j = 0, 1, 2)$ на степени k^j, и решать его по формулам, составленным для полного (а не приведённого, как (3.23)) квадратного уравнения. Составим характеристическое уравнение

$$2k^2 + 5k + 2 = 0.$$

Найдём его корни:

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \left[\begin{array}{l} -2; \\ -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Общее решение (3.27) имеет вид

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Пример 3.3. Найти общее решение уравнения

$$9y'' + 24y' + 16y = 0. \tag{3.28}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$9k^2 + 24k + 16 = 0.$$

Оно имеет один двукратный корень $k_1 = k_2 = -\dfrac{4}{3}$ (случай **2**).

Общее решение уравнения (3.28) имеет вид

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}.$$

Пример 3.4. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 20y = 0. \tag{3.29}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 20 = 0,$$

в котором $p = -4$, $q = 20$. Это уравнение не имеет вещественных корней, так как $p^2 - 4q = 16 - 80 < 0$ (случай **3**). Введём числа α и β из (3.25):

$$\alpha = -\frac{p}{2} = 2,\ \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} = \frac{\sqrt{80 - 16}}{2} = 4.$$

Общее решение уравнения (3.29) имеет вид

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} \sin 4x + C_2 \mathrm{e}^{2x} \cos 4x.$$

Пример 3.5. Решить задачу Коши:

$$y'' + 4y' + 8y = 0, \tag{3.30}$$

$$y\big|_{x=0} = 0,\ \ y'\big|_{x=0} = 2. \tag{3.31}$$

Решение. Найдём сначала общее решение уравнения (3.30). Составим его характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 8 = 0, \tag{3.32}$$

в котором $p = 4,\ q = 8$. Уравнение (3.32) не имеет вещественных корней, поскольку $p^2 - 4q = 16 - 32 < 0$ (случай **3**). Введём числа

$$\alpha = -\frac{p}{2} = -2,\ \ \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} = 2.$$

Общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \sin 2x + C_2 e^{-2x} \cos 2x.$$

Подставим в него значения x, y и y' из начальных условий (3.31). Для этого сначала найдём его производную:

$$y'(x) = e^{-2x}(-2C_1 \sin 2x - 2C_2 \cos 2x + 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x) =$$
$$= e^{-2x}\{(-2C_1 - 2C_2)\sin 2x + (2C_1 - 2C_2)\cos 2x\}.$$

Далее:

$$y(0) = 0 = C_2,$$
$$y'(0) = 2 = 2C_1 - 2C_2,$$

откуда $C_1 = 1,\ C_2 = 0.$ Решение задачи Коши (3.29)–(3.30) имеет вид $y(x) = e^{-2x} \sin 2x$.

Пример 3.6. Решить задачу Коши:

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \tag{3.33}$$

$$y\big|_{x=0} = 1,\ \ y'\big|_{x=0} = 2. \tag{3.34}$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 5k + 6 = 0.$$

Оно имеет два корня: $k_1 = -2,\ k_2 = -3$. Общее решение (3.33) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Вычисляем его производную

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{-3x}.$$

Подставляем в общее решение и его производную значения x, y и y' из начальных условий (3.34):

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2,$$

$$y'(0) = 2 = -2C_1 - 3C_2.$$

Получена система уравнений для определения C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ -2C_1 - 3C_2 = 2. \end{cases}$$

Эквивалентная (равносильная) система примет вид

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ \quad -C_2 = 4, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 5,\ C_2 = -4$.

Решение задачи Коши (3.33), (3.34) имеет вид

$$y(x) = 5e^{-2x} - 4e^{-3x}.$$

Пример 3.7. Решить задачу Коши:

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \tag{3.35}$$

$$y\big|_{x=0} = 1,\ \ y'\big|_{x=0} = -5. \tag{3.36}$$

Решение. Найдем сперва общее решение уравнения (3.35). Составим его характеристическое уравнение

$$k^2 + 6k + 9 = 0. \tag{3.37}$$

Оно имеет один двукратный корень: $k_1 = k_2 = -3$ (случай **2**). Общее решение (3.35) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

Подставим в него значения x, y и y' из начальных условий (3.36). Для этого найдем производную общего решения

$$y'(x) = -3C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-3x} - 3C_2 x e^{-3x}.$$

Далее:

$$y(0) = 1 = C_1,$$

$$y'(0) = -5 = -3C_1 + C_2,$$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = -2$. Решение задачи Коши (3.35)–(3.36) имеет вид

$$y(x) = e^{-3x} - 2x e^{-3x}.$$

Глава 4. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (f(x) \not\equiv 0). \tag{4.1}$$

4.1. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения

Пусть $\tilde{y}(x)$ – какое-либо частное решение уравнения (4.1), т. е. справедливо тождество

$$\tilde{y}'' + p(x)\tilde{y}' + q(x)\tilde{y} \equiv f(x). \tag{4.2}$$

Теорема 5. *Общее решение линейного неоднородного уравнения (4.1) имеет вид*

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x), \tag{4.3}$$

где $y_0(x)$ *– общее решение соответствующего однородного уравнения*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.4}$$

а $\tilde{y}(x)$ *– частное решение неоднородного уравнения (4.1).*

Доказательство. Учитывая вид общего решения однородного уравнения (4.4), нам нужно показать, что общее решение уравнения (4.1) имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x), \tag{4.5}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые частные решения однородного уравнения (4.4); C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а $\tilde{y}(x)$ – частное решение уравнения (4.1). Так же, как доказательство теоремы 4 об общем решении однородного уравнения (4.4), доказательство данной теоремы разделим на две части.

1. Докажем, что при любых значениях постоянных C_1 и C_2 функция (4.5) удовлетворяет уравнению (4.1). Для этого дважды продифференцируем функцию (4.3) и подставим саму функцию и ее производные в левую часть уравнения (4.1). Получим:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = (y_0 + \widetilde{y})'' + p(x)(y_0 + \widetilde{y})' + q(x)(y_0 + \widetilde{y}) =$$
$$= (y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0) + (\widetilde{y}'' + p(x)\widetilde{y}' + q(x)\widetilde{y}). \qquad (4.6)$$

Поскольку y_0 – общее решение уравнения (4.4), где $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, выражение в первой скобке правой части равенства (4.6) обращается в ноль. С другой стороны, в силу того, что $\widetilde{y}(x)$ удовлетворяет тождеству (4.2), выражение во второй скобке правой части (4.6) равно $f(x)$. Так что при любых значениях C_1, C_2 справедливо тождество

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \equiv f(x).$$

2. Докажем, что для любых начальных условий

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1 \qquad (4.7)$$

найдутся такие значения C_1^0 и C_2^0, для которых функция

$$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \widetilde{y}(x) \qquad (4.8)$$

удовлетворяет начальным условиям (4.7). Для этого вычислим значение функции (4.5) и ее производной при $x = x_0$ и потребуем выполнения (4.7). Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = b_0 - \widetilde{y}(x_0); \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = b_1 - \widetilde{y}'(x_0). \end{cases} \qquad (4.9)$$

Единственное решение этой системы можно найти по формулам Крамера:

$$C_1^0 = \frac{\begin{vmatrix} b_0 - \widetilde{y}(x_0) & y_2(x_0) \\ b_1 - \widetilde{y}'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{W(x_0)}, \quad C_2^0 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & b_0 - \widetilde{y}(x_0) \\ y_1'(x_0) & b_1 - \widetilde{y}'(x_0) \end{vmatrix}}{W(x_0)}, \qquad (4.10)$$

где $W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$ – значение вронскиана линейно независимых частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$. Напомним, что $W(x_0) \neq 0$, так как решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Таким образом, функция (4.8), где постоянные C_1^0 и C_2^0 вычислены по формулам (4.10), удовлетворяет начальным условиям (4.7).

Теорема доказана.

Существует несколько методов отыскания частных решений $\widetilde{y}(x)$ уравнения (4.1). Один из них является универсальным, другие приспособлены к определенным видам правых частей уравнения (4.1).

4.2. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Этот метод позволяет находить частное решение $\widetilde{y}(x)$ неоднородного уравнения (4.1) всегда, когда известно общее решение $y_0(x)$ однородного уравнения (4.4). Более того, он позволяет сразу получить общее решение (4.1).

Итак, рассмотрим параллельно оба уравнения (4.1) и (4.4):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Пусть общее решение (4.4) известно и имеет вид

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad \left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}\right). \qquad (4.11)$$

Будем искать частное решение (4.1) в виде (4.11), заменив постоянные C_1 и C_2 неизвестными пока функциями $A(x)$ и $B(x)$.

Тогда

$$\widetilde{y}(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x), \tag{4.12}$$

где функции $A(x)$ и $B(x)$ подлежат дальнейшему определению. Их следует выбрать так, чтобы решение $\widetilde{y}(x)$ удовлетворяло уравнению (4.1). Продифференцируем функцию (4.12). Получим

$$\widetilde{y}'(x) = A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x) + A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x).$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0. \tag{4.13}$$

Найдем теперь вторую производную от функции (4.12), учитывая дополнительные условия (4.13). Получим

$$\widetilde{y}''(x) = A(x)y_1''(x) + B(x)y_2''(x) + A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x).$$

Подставим $\widetilde{y}(x)$, $\widetilde{y}'(x)$, $\widetilde{y}''(x)$ в левую часть уравнения (4.1). Получим

$$\begin{aligned} &\widetilde{y}''(x) + p(x)\widetilde{y}'(x) + q(x)\widetilde{y}(x) = \\ &= A(x)\left[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\right] + \\ &+ B(x)\left[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\right] + \\ &+ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Действительно, поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ есть частные решения однородного уравнения (4.4), выражения, стоящие в квадратных скобках в цепочке равенств (4.14), обращаются в ноль.

Требуется теперь, чтобы выполнялось равенство

$$A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{4.15}$$

Тогда $\widetilde{y}(x)$ будет решением уравнения (4.1).

Итак, получена система уравнений для определения $A'(x)$ и $B'(x)$. Ее составляют уравнения (4.13) и (4.15). Она имеет вид

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0; \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{4.16}$$

Заметим, что определитель этой линейной относительно $A'(x)$ и $B'(x)$ системы является вронскианом решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (4.4)

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Поскольку решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, он всегда отличен от нуля. Система (4.16) имеет единственное решение, выражающее $A'(x)$ и $B'(x)$ через $y_1(x)$, $y_2(x)$ и их производные. Оно может быть найдено по формулам Крамера.

Зная $A'(x)$ и $B'(x)$, определим их первообразные:

$$A(x) = \int A'(x)dx \text{ и } B(x) = \int B'(x)dx.$$

Частное решение (4.1) может быть записано в виде

$$\widetilde{y}(x) = \left(\int A'(x)dx\right)y_1(x) + \left(\int B'(x)dx\right)y_2(x). \tag{4.17}$$

Тогда общее решение (4.1) имеет вид

$$y(x) = \left(\int A'(x)dx + C_1\right)y_1(x) + \left(\int B'(x)dx + C_2\right)y_2(x). \tag{4.18}$$

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}. \tag{4.19}$$

Решение. Рассмотрим соответствующее уравнению (4.19) однородное уравнение

$$y'' + y = 0. \tag{4.20}$$

Его общее решение имеет вид

$$y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x. \qquad (4.21)$$

Здесь $y_1(x) = \sin x$ и $y_2(x) = \cos x$ являются его линейно независимыми частными решениями.

Частное решение уравнения (4.19) ищем в виде

$$\widetilde{y}(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x.$$

Для отыскания функций $A'(x)$ и $B'(x)$ составим систему (4.16):

$$\begin{cases} A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 0; \\ A'(x)\cos x - B'(x)\sin x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases} \qquad (4.22)$$

Определитель этой системы имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1.$$

Тогда

$$A'(x) = -\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \dfrac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = \operatorname{ctg} x; \quad B'(x) = -\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = -1.$$

Далее:

$$A(x) = \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x|, \quad B(x) = -x,$$

и общее решение уравнения (4.19) имеет вид

$$y(x) = (\ln|\sin x| + C_1)\sin x + (C_2 - x)\cos x.$$

Пример 4.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{2x} + 1}. \qquad (4.23)$$

Решение. Соответствующее (4.23) однородное уравнение имеет вид

$$y'' + 3y' + 2y = 0. \qquad (4.24)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

имеет два действительных корня: $k_1 = -2$; $k_2 = -1$. Следовательно, (4.24) имеет два линейно независимых частных решения

$$y_1 = e^{-2x} \text{ и } y_2 = e^{-x},$$

а его общее решение запишется следующим образом:

$$y_0(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Частное решение уравнения (4.23) ищем в виде

$$\widetilde{y}(x) = A(x)e^{-2x} + B(x)e^{-x}.$$

Для нахождения функций $A'(x)$ и $B'(x)$ составляем систему уравнений

$$\begin{cases} A'(x)e^{-2x} + B'(x)e^{-x} = 0; \\ -2A'(x)e^{-2x} - B'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{e^{2x} + 1}. \end{cases} \qquad (4.25)$$

Ищем определитель системы (4.25):

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}.$$

Тогда

$$A'(x) = e^{3x}\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \dfrac{1}{e^{2x}+1} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1};$$

$$B'(x) = e^{3x}\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \dfrac{1}{e^{2x}+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}.$$

Можно решить систему (4.25) и по-другому. Сложим оба уравнения системы (4.25) и получим

$$-A'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}+1}$$

или

$$A'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.$$

Подставим полученный результат в первое уравнение системы (4.25) и найдем

$$B'(x) = \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}.$$

Ищем первообразные функций $A'(x)$ и $B'(x)$:

$$A(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = -\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right),$$

$$B(x) = \int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{d(e^{x})}{e^{2x}+1} = \operatorname{arctg} e^{x}.$$

Общее решение уравнения (4.23) имеет вид

$$y(x) = \left(C_1 - \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)\right)e^{-2x} + \left(C_2 + \operatorname{arctg} e^{x}\right)e^{-x}.$$

Пример 4.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2+9}. \qquad (4.26)$$

Решение. Составляем однородное уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 0. \qquad (4.27)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

имеет один кратный корень $k_0 = 2$. Общее решение (4.27) имеет вид

$$y_0(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

Ищем частное решение уравнения (4.26) в виде

$$\widetilde{y}(x) = A(x)e^{2x} + B(x)xe^{2x}.$$

Для отыскания $A'(x)$ и $B'(x)$ составляем систему уравнений

$$\begin{cases} A'(x)e^{2x} + B'(x)\, xe^{2x} = 0; \\ 2A'(x)e^{2x} + B'(x)\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+9} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A'(x) + B'(x)\, x = 0; \\ 2A'(x) + B'(x)(1+2x) = \dfrac{1}{x^2+9}. \end{cases} \qquad (4.28)$$

Определитель системы (4.28) имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда

$$A'(x) = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \dfrac{1}{x^2+9} & 1+2x \end{vmatrix} = -\frac{x}{x^2+9},$$

$$B'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \dfrac{1}{x^2+9} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2+9}.$$

Можно решить систему (4.28) по-другому. Первое уравнение системы (4.28) умножим на (–2) и сложим со вторым уравнением. Получим

$$B'(x) = \frac{1}{x^2+9}$$

и подставим этот результат в первое уравнение системы (4.28).

Находим первообразные функций $A'(x)$ и $B'(x)$:

$$A(x) = -\int \frac{x}{x^2+9}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right),$$

$$B(x)=\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}.$$

Тогда общее решение уравнения (4.26) имеет вид

$$y(x)=\left(C_1-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)\right)e^{2x}+\left(C_2+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)xe^{2x}.$$

4.3. Линейные дифференциальные уравнения со специальными правыми частями

Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ в левой части уравнения (4.1) являются постоянными. Тогда для определенных типов правых частей этого уравнения вид частного решения заранее известен и нет необходимости применять метод вариации постоянных.

Рассмотрим здесь два варианта специальных правых частей.

I. Уравнение (4.1) имеет вид

$$y''+py'+qy=P_n(x)e^{\lambda x}, \tag{4.29}$$

где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\quad(a_0\neq0)$ – многочлен степеí è n, а λ – вещественное число.

Уравнению (4.29) соответствует однородное уравнение

$$y''+py'+qy=0$$

с характеристическим уравнением

$$k^2+pk+q=0. \tag{4.30}$$

Теорема 6 (без доказательства).

Уравнение (4.29) имеет частное решение $\tilde{y}$ вида

$$\tilde{y}(x)=\begin{cases}Q_n(x)e^{\lambda x}, \text{ если } \lambda \text{ не является корнем (4.30);}\\ xQ_n(x)e^{\lambda x}, \text{ если } \lambda \text{ является простым корнем (4.30);}\\ x^2Q_n(x)e^{\lambda x}, \text{ если } \lambda \text{ является кратным корнем (4.30),}\end{cases}$$

где $Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n\quad(b_0\neq0)$ *– многочлен той же степени n, что и многочлен* $P_n(x)$, *с коэффициентами* $b_0, b_1,\ldots, b_{n-1}, b_n$, *подлежащими дальнейшему определению.*

Коэффициенты $b_i\ (i=0,1,\ldots,n)$ многочлена $Q_n(x)$ должны быть такими, чтобы функция $\tilde{y}(x)$ удовлетворяла уравнению (4.29), поэтому для их отыскания используют следующий алгоритм.

С помощью теоремы 6 устанавливается вид частного решения $\tilde{y}(x)$. Затем находятся производные $\tilde{y}'(x)$ и $\tilde{y}''(x)$. Решение $\tilde{y}(x)$ и его производные с неопределенными пока коэффициентами подставляются в уравнение (4.29) и обе его части сокращаются на $e^{\lambda x}$. Далее мы определяем коэффициенты $b_i\ (i=0,1,\ldots,n)$ исходя из тождественного равенства двух многочленов, стоящих в левой и правой частях полученного равенства.

Пример 4.4. Найти общее решение уравнения

$$y''+4y'-5y=(x+3)e^x. \tag{4.31}$$

Решение. Общее решение ищем в виде $y=y_0+\tilde{y}$. Неоднородному уравнению (4.31) соответствует однородное уравнение

$$y''+4y'-5y=0. \tag{4.32}$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2+4k-5=0 \tag{4.33}$$

имеет корни $k_1=1,\ k_2=-5$. Следовательно, общее решение однородного уравнения (4.32) имеет вид

$$y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{-5x}.$$

Обратимся теперь к правой части уравнения (4.31). Здесь $\lambda=1,\quad P_n(x)=x+3$, следовательно, $n=1$. Поскольку $\lambda=k_1$, частное решение уравнения (4.31) следует искать в виде

$$\tilde{y}(x)=x(Ax+B)e^x=\left(Ax^2+Bx\right)e^x,$$

где коэффициенты A и B неизвестны.

Чтобы определить A и B, подставим $\widetilde{y}(x)$ и его производные в исходное уравнение (4.31). Здесь при вычислении $\widetilde{y}''(x)$ удобно воспользоваться формулой $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$.

Итак,

$$\widetilde{y}(x) = \left(Ax^2 + Bx\right)e^x,$$
$$\widetilde{y}'(x) = \left(2Ax + B\right)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x,$$
$$\widetilde{y}''(x) = 2Ae^x + 2\left(2Ax + B\right)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x,$$

и левая часть уравнения (4.31) принимает вид

$$\widetilde{y}''(x) + 4\widetilde{y}'(x) - 5\widetilde{y}(x) =$$
$$= e^x\left\{\left(Ax^2 + Bx\right)(1 + 4 - 5) + \left(2Ax + B\right)(2 + 4) + 2A\right\} =$$
$$= \left\{6\left(2Ax + B\right) + 2A\right\}e^x.$$

Коэффициенты A и B должны быть такими, чтобы обе части уравнения (4.31) были тождественно равны друг другу, т. е.

$$12Ax + \left(6B + 2A\right) \equiv x + 3. \tag{4.34}$$

Тождество (4.34) выполняется тогда и только тогда, когда слева и справа стоят одинаковые коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 12A = 1; \\ 6B + 2A = 3. \end{cases}$$

Следовательно, $A = \dfrac{1}{12}$, $B = \dfrac{17}{36}$, а $\widetilde{y}(x) = \left(\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{17}{36}x\right)e^x$.

Таким образом, общее решение уравнения (4.31) имеет вид

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-5x} + \left(\frac{x^2}{12} + \frac{17}{36}x\right)e^x.$$

Пример 4.5. Решить задачу Коши:

$$y'' + 4y' + 8y = 5x + 2, \tag{4.35}$$

$$y\big|_{x=0} = 1; \quad y'\big|_{x=0} = -1. \tag{4.36}$$

Решение. Чтобы решить задачу Коши, найдем сначала общее решение уравнения (4.35) в виде $y = y_0 + \widetilde{y}$, а затем определим произвольные постоянные так, чтобы выполнялись начальные условия (4.36).

Неоднородному уравнению (4.35) соответствует однородное уравнение

$$y'' + 4y' + 8y = 0 \tag{4.37}$$

с характеристическим уравнением

$$k^2 + 4k + 8 = 0. \tag{4.38}$$

Уравнение (4.38) не имеет вещественных корней $(k_{1,2} = -2 \pm 2i)$. В этом случае $\alpha = -2$, $\beta = 2$ и, следовательно, общее решение однородного уравнения (4.37) имеет вид

$$y_0(x) = C_1e^{-2x}\sin 2x + C_2e^{-2x}\cos 2x.$$

Теперь по виду правой части уравнения (4.35) подберем $\widetilde{y}(x)$. Здесь $n = 1$, $\lambda = 0$. Частное решение уравнения (4.35) ищем в виде

$$\widetilde{y}(x) = Ax + B.$$

Тогда

$$\widetilde{y}'(x) = A, \quad \widetilde{y}''(x) = 0$$

и

$$y'' + 4y' + 8y = 4A + 8\left(Ax + B\right).$$

Так как должно выполняться тождество

$$8Ax + 4A + 8B \equiv 5x + 2,$$

то справедлива система

$$\begin{cases} 8A = 5; \\ 4A + 8B = 2. \end{cases}$$

Отсюда устанавливаем, что

$$A = \frac{5}{8}, \quad B = -\frac{1}{16}.$$

Итак, общее решение (4.35) имеет вид

$$y(x) = C_1e^{-2x}\sin 2x + C_2e^{-2x}\cos 2x + \frac{5}{8}x - \frac{1}{16}. \tag{4.39}$$

Учтём первое из начальных условий (4.36):

$$1 = y(0) = C_2 - \frac{1}{16}.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{17}{16}. \qquad (4.40)$$

Продифференцируем функцию (4.39) с учётом (4.40):

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} \sin 2x + 2C_1 e^{-2x} \cos 2x - $$
$$- \frac{17}{8} e^{-2x} \cos 2x - \frac{17}{8} e^{-2x} \sin 2x + \frac{5}{8}.$$

Учтем второе из начальных условий (4.36):

$$-1 = y'(0) = 2C_1 - \frac{17}{8} + \frac{5}{8}$$

или

$$C_1 = \frac{1}{4}.$$

Итак, решение задачи Коши (4.35), (4.36) имеет вид

$$y(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{17}{16}\cos 2x\right) + \frac{5}{8}x - \frac{1}{16}.$$

Пример 4.6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' - 10y = x^2 e^{3x}. \qquad (4.41)$$

Решение. Общее решение ищем в виде $y = y_0 + \tilde{y}$. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 3y' - 10y = 0 \qquad (4.42)$$

и его характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k - 10 = 0. \qquad (4.43)$$

Последнее имеет два вещественных корня: $k_1 = 2,\ k_2 = -5$. Следовательно, общее решение однородного уравнения (4.42) имеет вид

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}. \qquad (4.44)$$

Теперь для нахождения частного решения $\tilde{y}(x)$ обратимся к правой части уравнения (4.41). Здесь $\lambda = 3,\quad P_n(x) = x^2$, следовательно, $n = 2$. Так как $\lambda \neq k_1$ и $\lambda \neq k_2$, то частное решение уравнения (4.41) ищем в виде

$$\tilde{y}(x) = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{3x},$$

где коэффициенты A, B и C подлежат определению. Для этого найдем производные $\tilde{y}'(x),\quad \tilde{y}''(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = (2Ax + B)e^{3x} + 3\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{3x},$$
$$\tilde{y}''(x) = 2Ae^{3x} + 6(2Ax + B)e^{3x} + 9\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{3x},$$

и подставим $\tilde{y}(x)$ и его производные в левую часть уравнения (4.41). Получим

$$\tilde{y}'' + 3\tilde{y}' - 10\tilde{y} = e^{3x}\left\{\left(Ax^2 + Bx + C\right)(9 + 9 - 10) + (2Ax + B)(6 + 3) + 2A\right\} =$$
$$= e^{3x}\left\{8\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 9(2Ax + B) + 2A\right\}.$$

Приравнивая друг другу левую и правую части уравнения (4.41) и сокращая их на e^{3x}, получим тождество

$$8\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 9(2Ax + B) + 2A \equiv x^2.$$

Следовательно, A, B и C надлежит выбрать так, чтобы это тождество выполнялось. Тогда

$$\begin{cases} 8A = 1; \\ 18A + 8B = 0; \\ 2A + 9B + 8C = 0, \end{cases}$$

откуда $A = \frac{1}{8},\ B = -\frac{9}{32},\ C = \frac{73}{256}$.

Таким образом, общее решение (4.41) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{32}x + \frac{73}{256}\right)e^{3x}.$$

Пример 4.7. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = 2e^{-5x}. \tag{4.45}$$

Решение. Составим однородное уравнение

$$y'' + 10y' + 25y = 0 \tag{4.46}$$

и соответствующее ему характеристическое уравнение

$$k^2 + 10k + 25 = 0. \tag{4.47}$$

Уравнение (4.47) имеет один двукратный корень $k_1 = k_2 = -5$. Общее решение однородного уравнения (4.46) имеет вид

$$y_0(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}.$$

Отметим, что в правой части уравнения (4.45) $n = 0$, $\lambda = -5$, так что $\lambda = k_1 = k_2$. Частное решение уравнения (4.45) следует искать в виде

$$\tilde{y}(x) = Ax^2 e^{-5x},$$

где коэффициент A подлежит последующему определению. Найдем производные $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = A\left(2xe^{-5x} - 5x^2 e^{-5x}\right),$$
$$\tilde{y}''(x) = A\left(2e^{-5x} - 20xe^{-5x} + 25x^2 e^{-5x}\right)$$

и подставим $\tilde{y}(x)$ и найденные производные в левую часть уравнения (4.45). Получим

$$\tilde{y}'' + 10\tilde{y}' + 25\tilde{y} = Ae^{-5x}\left\{2 - 20x + 25x^2 + 20x - 50x^2 + 25x^2\right\} = 2Ae^{-5x}.$$

Следовательно,

$$2A \equiv 2$$

или

$$A = 1.$$

Таким образом, общее решение уравнения (4.45) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} + x^2 e^{-5x}.$$

II. Уравнение (4.1) имеет вид

$$y'' + py' + qy = \left(M\sin\omega x + N\cos\omega x\right)e^{\tau x}, \tag{4.48}$$

где M, N, $\omega \neq 0$ и τ – вещественные числа.

Уравнению (4.48) сопутствует однородное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0$$

с характеристическим уравнением

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{4.49}$$

Теорема 7 (без доказательства)

Уравнение (4.48) имеет частное решение $\tilde{y}$ вида

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} \left(A\sin\omega x + B\cos\omega x\right)e^{\tau x}, \text{ если числа } \tau \pm i\omega \ (i^2 = -1) \\ \text{не удовлетворяют уравнению (4.49),} \\ \text{т. е. } \tau \neq -\dfrac{p}{2} \text{ или } \omega \neq \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}; \\ x\left(A\sin\omega x + B\cos\omega x\right)e^{\tau x}, \text{ если числа } \tau \pm i\omega \ (i^2 = -1) \\ \text{являются корнями уравнения (4.49),} \\ \text{т. е. } \tau = -\dfrac{p}{2} \text{ и } \omega = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}. \end{cases}$$

Здесь A и B – числа, подлежащие последующему определению.

Числа A и B определяются непосредственной подстановкой решения $\tilde{y}(x)$ и его производных в уравнение (4.48). В результате этой подстановки уравнение (4.48) превратилось бы в тождество, если бы коэффициенты при $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$ в его левой и правой частях были бы одинаковыми. Условие равенства коэффициентов при $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$ в обеих частях уравнения и является условием для нахождения A и B.

Пример 4.8. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = 5\sin 2x + 3\cos 2x. \tag{4.50}$$

Решение. Уравнению (4.50) соответствует однородное уравнение

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \tag{4.51}$$

с характеристическим уравнением

$$k^2 + 2k + 5 = 0. \tag{4.52}$$

Уравнение (4.52) имеет два корня:

$$k_{1,2} = -1 \pm 2i \quad (\alpha = -\frac{p}{2} = -1, \ \ \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} = 2).$$

Значит,

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x).$$

В уравнении (4.50) $\omega = 2, \ \ \tau = 0, \ \ M = 5, \ \ N = 3$. Заметим, что числа $\tau \pm i\omega = \pm 2i$ не являются корнями уравнения (4.52). Следовательно, частное решение уравнения (4.50) ищем в виде

$$\tilde{y}(x) = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

Тогда

$$\tilde{y}'(x) = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x,$$
$$\tilde{y}''(x) = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

и

$$\tilde{y}''(x) + 2\tilde{y}'(x) + 5\tilde{y}(x) =$$
$$= \sin 2x(-4A - 4B + 5A) + \cos 2x(-4B + 4A + 5B) =$$
$$= (A - 4B)\sin 2x + (4A + B)\cos 2x.$$

Тождество

$$(A - 4B)\sin 2x + (4A + B)\cos 2x \equiv 5\sin 2x + 3\cos 2x \tag{4.53}$$

будет выполнено, если равны друг другу коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$.

Приравниваем коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях (4.53). Получаем систему равенств

$$\begin{cases} A - 4B = 5; \\ 4A + B = 3. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1, \quad B = -1$. Следовательно,

$$\tilde{y}(x) = \sin 2x - \cos 2x.$$

Тогда общее решение (4.52) имеет вид

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x}\sin 2x + C_2\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + \sin 2x - \cos 2x.$$

Пример 4.9. Решить задачу Коши:

$$y'' + y = 3\sin x + 2\cos x, \tag{4.54}$$

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1. \tag{4.55}$$

Решение. Найдем сначала общее решение уравнения (4.54). Составим для этого соответствующее ему однородное уравнение

$$y'' + y = 0 \tag{4.56}$$

и характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0. \tag{4.57}$$

Уравнение (4.57) имеет корни $k_{1,2} = \pm i \quad (\alpha = 0, \ \beta = 1)$. Следовательно,

$$y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Для уравнения (4.54) имеем $\omega = 1, \ \ \tau = 0, \ \ M = 3, \ \ N = 2$. Частное решение $\tilde{y}(x)$ следует искать в виде

$$\tilde{y}(x) = x(A\sin x + B\cos x),$$

поскольку значения $\tau \pm i\omega = \pm i$ совпадают с корнями (4.57). Тогда

$$\tilde{y}'(x) = x(A\cos x - B\sin x) + (A\sin x + B\cos x),$$

$$\tilde{y}''(x) = 2(A\cos x - B\sin x) + x(-A\sin x - B\cos x).$$

После подстановки $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$ и $\tilde{y}''(x)$ в левую часть (4.54) имеем

$$\tilde{y}''(x) + \tilde{y}(x) = 2(A\cos x - B\sin x).$$

Следовательно, A и B должны обеспечивать выполнение тождества

$$2(A\cos x - B\sin x) \equiv 3\sin x + 2\cos x.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ -2B = 3 \end{cases}$$

или

$$A = 1, \quad B = -\frac{3}{2}.$$

Общее решение (4.54) имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x(\sin x - \frac{3}{2}\cos x). \tag{4.58}$$

Будем теперь искать такие значения постоянных C_1 и C_2, чтобы выполнялись начальные условия (4.55). Согласно первому из них

$$0 = y(0) = C_2,$$

откуда $C_2 = 0$. Продифференцируем общее решение (4.58). Учитывая найденное значение C_2, получим

$$y'(x) = C_1 \cos x + (\sin x - \frac{3}{2}\cos x) + x(\cos x + \frac{3}{2}\sin x).$$

Согласно второму из равенств (4.55) имеем

$$1 = y'(0) = C_1 - \frac{3}{2},$$

откуда найдем $C_1 = \dfrac{5}{2}$.

Итак, решение задачи Коши (4.54), (4.55) имеет вид

$$y(x) = \frac{5}{2}\sin x + x\sin x - \frac{3}{2}x\cos x.$$

4.4. Принцип наложения

Теорема 8. *Пусть правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения может быть представлена как сумма двух слагаемых, а именно:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x). \tag{4.59}$$

Тогда уравнение (4.59) имеет частное решение вида

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x),$$

где $\tilde{y}_1(x)$ *– какое-нибудь частное решение уравнения*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x), \tag{4.60}$$

а $\tilde{y}_2(x)$ *– какое-нибудь частное решение уравнения*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x). \tag{4.61}$$

Доказательство. Подставим $\tilde{y}(x)$ в левую часть уравнения (4.59). Учитывая, что $\tilde{y}_1(x)$ удовлетворяет (4.60), а $\tilde{y}_2(x)$ удовлетворяет (4.61), получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} &\tilde{y}'' + p(x)\tilde{y}' + q(x)\tilde{y} = \\ &= (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)'' + p(x)(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)' + q(x)(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = \\ &= \left(\tilde{y}_1'' + p(x)\tilde{y}_1' + q(x)\tilde{y}_1\right) + \left(\tilde{y}_2'' + p(x)\tilde{y}_2' + q(x)\tilde{y}_2\right) = \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что $\tilde{y}(x)$ удовлетворяет (4.59).

Следствие. *Пусть линейное неоднородное уравнение имеет вид*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \quad (n > 1).$$

Тогда его частным решением будет функция

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \ldots + \tilde{y}_n(x),$$

где $\tilde{y}_k(x) \quad (k = 1, \ldots, n)$ *являются решениями уравнений*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_k(x).$$

Справедливость этого следствия очевидна.

Опираясь на теорему 8 и ее следствие, можно к разным слагаемым правой части неоднородного уравнения применять различные формулы и различные методы для отыскания частных решений.

Пример 4.10. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x} + (x+3)e^{x} + \sin 2x. \tag{4.62}$$

Решение. Составим соответствующее (4.62) однородное уравнение

$$y'' + 6y' + 8y = 0 \tag{4.63}$$

и характеристическое уравнение

$$k^2 + 6k + 8 = 0. \tag{4.64}$$

Последнее имеет два вещественных корня: $k_1 = -2$, $k_2 = -4$. Следовательно, общее решение уравнения (4.63) имеет вид

$$y_0(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x}.$$

Правую часть уравнения (4.62) представим в виде суммы трех слагаемых:

$$f_1(x) = 4e^{-2x}, \quad f_2(x) = (x+3)e^{x}, \quad f_3(x) = \sin 2x.$$

Будем последовательно искать частные решения неоднородных уравнений, правые части которых совпадают с одним из указанных слагаемых, а левые части – одинаковые и совпадают с левой частью уравнения (4.62):

1. Решим уравнение, правая часть которого совпадает с $f_1(x)$.

$$y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}. \tag{4.65}$$

Это уравнение со специальной правой частью вида $P_n(x)e^{\lambda x}$, где $n = 0$, а $\lambda = -2$. Так как λ совпадает с корнем $k_1 = -2$, то решение (4.65) ищем в виде

$$\tilde{y}_1(x) = Ax e^{-2x}.$$

Ищем число A:

$$\tilde{y}_1{}'(x) = A e^{-2x} - 2Ax e^{-2x},$$

$$\tilde{y}_1{}''(x) = -4A e^{-2x} + 4Ax e^{-2x},$$

$$\tilde{y}_1'' + 6\tilde{y}_1' + 8\tilde{y}_1 = Ae^{-2x}\left(-4 + 4x + 6 - 12x + 8x\right) = 2Ae^{-2x}.$$

Следовательно, $2Ae^{-2x} \equiv 4e^{-2x}$ и $A = 2$.

Тогда

$$\tilde{y}_1(x) = 2x e^{-2x}.$$

2. Решим уравнение, правая часть которого совпадает с $f_2(x)$.

$$y'' + 6y' + 8y = (x+3)e^{x}. \tag{4.66}$$

Уравнение (4.66) имеет специальную правую часть вида $P_n(x)e^{\lambda x}$, где $n = 1$, $\lambda = 1$. Так как $\lambda \neq k_1$ и $\lambda \neq k_2$, его частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y}_2(x) = (Dx + B)e^{x}.$$

Определяем коэффициенты D и B:

$$\tilde{y}_2{}'(x) = D e^{x} + (Dx + B)e^{x},$$

$$\tilde{y}_2{}''(x) = 2D e^{x} + (Dx + B)e^{x},$$

$$\tilde{y}_2'' + 6\tilde{y}_2' + 8\tilde{y}_2 = e^{x}\{2D + (Dx+B) + 6D + 6(Dx+B) + 8(Dx+B)\} =$$
$$= e^{x}\{8D + 15(Dx+B)\} = e^{x}\{15Dx + (15B + 8D)\}.$$

Следовательно,

$$15Dx + (15B + 8D) \equiv x + 3.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 15D = 1, \\ 15B + 8D = 3 \end{cases}$$

или

$$D = \frac{1}{15}, \quad B = \frac{37}{225}.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}_2(x) = \left(\frac{x}{15} + \frac{37}{225}\right)e^x.$$

3. Решим уравнение, правая часть которого совпадает с $f_3(x)$.

$$y'' + 6y' + 8y = \sin 2x. \qquad (4.67)$$

Это уравнение со специальной правой частью типа $\left(M\sin\omega x + {} \right.$ $\left. {}+ N\cos\omega x\right)e^{\tau x}$, где $\tau = 0$, $\omega = 2$, $M = 1$, $N = 0$. Так как числа $\tau \pm i\omega = \pm 2i$ не являются корнями (4.64), частное решение (4.67) следует искать в виде

$$\tilde{y}_3(x) = L\sin 2x + K\cos 2x.$$

Определяем L и K:

$$\tilde{y}_3{}'(x) = 2L\cos 2x - 2K\sin 2x,$$

$$\tilde{y}_3{}''(x) = -4L\sin 2x - 4K\cos 2x,$$

$$\tilde{y}_3{}''(x) + 6\tilde{y}_3{}'(x) + 8\tilde{y}_3(x) =$$
$$= \sin 2x\left(-4L - 12K + 8L\right) + \cos 2x\left(-4K + 12L + 8K\right) =$$
$$= \sin 2x\left(4L - 12K\right) + \cos 2x\left(4K + 12L\right).$$

Тогда из тождественного равенства

$$\sin 2x\left(4L - 12K\right) + \cos 2x\left(4K + 12L\right) \equiv \sin 2x$$

получаем систему

$$\begin{cases} 4L - 12K = 1, \\ 12L + 4K = 0, \end{cases}$$

откуда находим $L = \dfrac{1}{40}$, $\quad K = -\dfrac{3}{40}$.

Таким образом,

$$\tilde{y}_3(x) = \frac{1}{40}\sin 2x - \frac{3}{40}\cos 2x.$$

Окончательно получим

$$\tilde{y}(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} + 2x\,e^{-2x} + \left(\frac{x}{15} + \frac{37}{225}\right)e^x + \frac{1}{40}\sin 2x - \frac{3}{40}\cos 2x.$$

Рекомендуемая литература

1. *Натансон, И. П.* Краткий курс высшей математики / И. П. Натансон. – СПб. : Лань, 2005.
2. *Смирнова, В. Б.* Неопределенный интеграл : учебное пособие / В. Б. Смирнова, Л. Е. Морозова. – СПб. : СПбГАСУ, 2007.
3. *Матвеев, Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. – Минск : Вышейшая школа, 1977.
4. *Блажнова, Е. М.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям с решениями и ответами / Е. М. Блажнова, И. К. Кадников, А. П. Тузов, Я. С. Фельдман, Т. Д. Цветкова; под редакцией Тузова.– СПб. : НПО «Мир и семья – 95» ООО «Интерлан», 1999.
5. *Карпиловская, Э. Б.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : метод. указания к выполнению задания для студентов всех специальностей ЛИСИ / Э. Б. Карпиловская. – Л. : ЛИСИ, 1984.
6. *Ершов, Е. К.* Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / Е. К. Ершов, М. В. Неупокоева; СПбГАСУ. – СПб., 2002.

Оглавление

Учебное издание

Смирнова Вера Борисовна
Морозова Лидия Евсеевна

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор А. В. Афанасьева
Корректор А. Г. Лавров
Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 16.08.10. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 5,1. Тираж 1000 экз. Заказ 72. «С» 58.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.
Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 5.

ДЛЯ ЗАПИСЕЙ