

МАТЕМАТИКА

Р. Муравский


доктор мат. наук, профессор
Университет Адама Мицкевича,
факультет математики
и компьютерных наук
Познань, Польша
E-mail: rmur@amu.edu.pl

**ПОЛЬСКАЯ
ФИЛОСОФИЯ ЛОГИКИ
И МАТЕМАТИКИ
В ПЕРИОД МЕЖДУ
ДВУМЯ МИРОВЫМИ
ВОЙНАМИ
(Перевод и примечания
Г.И. Синкевич)**

В работе хотим показать главные направления и тенденции, основные точки зрения и взгляды, сложившиеся в философском осмыслении математики и логики в Польше в период между двумя мировыми войнами. Почему именно в этот период? Потому что в Польше это было время интенсивного развития математики (Польская математическая школа) и логики (Варшавская школа логики, Львовско-Варшавская философская школа¹). Возникает естественный вопрос, сопровождалось ли это развитие математики и логики философской рефлексией данных дисциплин, послужили ли какие-то определенные философские предпосылки основанием и стимулом этих исследований? С другой стороны, философия математики и логики опирается и использует фундаментальные результаты метаматематики, оснований математики и логики. Сказались ли достижения логики на способе философской рефлексии?

Ключевые слова: Математика; логика; философия математики; философия логики; конструктивизм; психологизм; логицизм; интуиционизм; формализм; Польская математическая школа; Варшавская школа логики.

R. Muravskiy

Doctor of Math. Sciences,
Professor
Adam Mickiewicz University 
Faculty of Mathematics and
Computer Science
Poznań, Poland
E-mail: rmur@amu.edu.pl

**POLISH PHILOSOPHY
OF LOGIC
AND MATHEMATICS
IN THE PERIOD
BETWEEN THE TWO
WORLD WARS
(Translation and Notes
G.I. Sinkevich)**

The aim of this paper is to indicate main trends and tendencies, main standpoints and views in the philosophical reflection on mathematics and logic in Poland between the two world wars. Why just this period? Because it was the time of intensive development of mathematics (Polish School of Mathematics) and of logic (Warsaw School of Logic, Lvov-Warsaw School of Philosophy) in Poland. Hence a natural question arises whether this development of mathematics and logic was accompanied by philosophical reflection on those disciplines, whether the researches were founded on and stimulated by certain fixed philosophical presuppositions. On the other hand philosophy of mathematics and logic is based on and uses certain results of metamathematics, of the foundations of mathematics and of logic. Did logical achievements influence the philosophical reflection?

Keywords: Mathematics; logic, set theory; philosophy of mathematics; philosophy of logic; constructivism; psychologism; logicism; intuitionism; formalism; Polish School of Mathematics; Warsaw School of Logic.

¹ О Львовско-Варшавской философской школе см. Воленский [1, 2] – примечание автора.

Материал статьи расположен следующим образом. Первый раздел посвящен периоду до 1918. В нем представлены философские идеи Серпинского, Янишевского, а также Зарембы. Основная часть – это второй раздел, посвященный периоду 1918–1939 гг. Здесь рассматривается общее отношение польских логиков и математиков к философии логики и математики и формирование их взглядов. Далее рассматривается отношение польских ученых к проблеме психологизма и к проблеме соотношения логики и математики с реальностью. Отмечены симпатии к номинализму и конвенционализму. Для более полной картины философских взглядов польских ученых в третьем и четвертом разделе рассматриваются философские взгляды на логику и математику двух выдающихся польских логиков и математиков – Альфреда Тарского и Анджея Мостовского².

1. До 1918

В конце 19-го века основными центрами, играющими важную роль, были Львов и Краков. Во Львове главной фигурой был, конечно, основатель Львовско-Варшавской философской школы Казимеж Твардовский (Kazimierz Twardowski, 1866–1938). Его значение в развитии аналитической традиции философии и логики в Польше хорошо известно. Атмосфера Львова также благоприятствовала математикам. Здесь следует упомянуть двоих: Вацлава Серпинского (Wacław Sierpiński, 1882–1969) и Зигмунта Янишевского (Zygmunt Janiszewski, 1888–1920). В 1908 г. Серпинский получил хабилитацию³ и начал читать лекции, в частности, лекции по теории множеств. В качестве хабилитационной лекции Серпинский выбрал философско-математическую проблему. Его лекция была посвящена роли и значению понятия соответствия в математике [3].

Еще один математик, сыгравший решающую роль в становлении польской математической школы, Зигмунт Янишевский, также проявлял интерес к философии математики. Он получил хабилитацию во Львове в 1913 г. Его

хабилитационная диссертация была по топологии, но его хабилитационная лекция называлась «О реализме и идеализме в математике» [4], следовательно, посвящена философии математики.

Почему Серпинский и Янишевский выбрали для своих хабилитационных лекций темы по философии математики? Одной из причин может быть то, что процедура хабилитации проводилась на философском факультете, и большинство членов ученого совета факультета не были математиками. Поэтому Серпинский и Янишевский выбрали темы по общим предметам. Но с другой стороны, они могли выбрать какие-либо популярные темы собственно из математики. То, что они выбрали именно темы из философии математики, свидетельствует о том, что во Львове атмосфера благоприятствовала развитию оснований и философии математики, и что оба они интересовались не только математикой, но и ее философией. Оба были убеждены в необходимости концепции математики, на основе которой она будет развиваться в Польше, и предположили, что такой основой должна послужить теория множеств.

Вторым центром, который следует рассмотреть, был Краков. Основными фигурами здесь были Станислав Заремба (Stanisław Zaremba, 1863–1942) и Ян Слешинский (Jan Sleszyński, 1854–1931). Исследования С. Зарембы были в основном в области анализа и прикладной математики, но он интересовался также философией и методологией математики. Он опубликовал несколько работ в этих областях.

Говоря о С. Зарембе, следует упомянуть споры о понятии величины. В 1916 г. Ян Лукасевич (Jan Łukasiewicz, 1878–1956) посвятил один из своих курсов в Варшавском университете методологии дедуктивных наук. В своих лекциях он обсуждал книгу С. Зарембы **Arytmetyka teoretyczna** (Теоретическая арифметика, 1912) [5] и анализировал ее с точки зрения методологии, подвергая сомнению некоторые принципы, принятые Зарембой, а также его определение величины. Лукасевич опубликовал свои замечания в статье 1916 г. [9]. Это было начало

² Подробнее о философии логики и математики в Польше в период между мировыми войнами см. [6, 7, 8] – *примечание автора*.

³ Право на чтение лекций защищается представлением научной работы (диссертации) и чтением публичной лекции – *примечание переводчика*.

дискуссии, в которой приняли участие несколько человек, в том числе Казимеж Куратовский (Kazimierz Kuratowski), Тадеуш Чезовский (Tadeusz Czeżowski), Леон Хвистек (Leon Chwistek) и, конечно, сам С. Заремба. Суть спора фактически заключалась не в понятии величины, а в роли логики в математике. С. Заремба защищал точку зрения, что логика должна быть «внутри математики», быть служанкой математики (*ancilla mathematicae*, см. название его работы *La logique en mathématique*, – Логика в математике [10]), в то время как Лукасевич рассматривал (математическую) логику как самостоятельную дисциплину, обуславливающую основания и методологию математики. Последняя идея была воспринята также лидерами и основателями Польской математической школы в Варшаве, которые выделяли роль теории множеств, оснований математики и математической логики, и видели логику в центре математики (согласно С. Зарембе, она была на периферии математики).

2. Период 1918–1939

Отношение польских логиков и математиков к философии математики можно кратко охарактеризовать так: они рассматривали философские и математические основания математики как независимые, хотя и отчасти связанные и необходимые для понимания математической деятельности. Все они, кроме двоих (Леон Хвистек и Станислав Лесьневский (Stanisław Leśniewski)) руководствовались следующими двумя принципами:

- в метаматематических⁴ исследованиях могут применяться любые принятые математические методы;

- метаматематические рассуждения нельзя априори ограничивать никакими философскими рамками.

С другой стороны, в математике есть философские проблемы внутреннего происхождения, которыми математикам не следует пренебрегать. В частности, хотя метаматематические

результаты не разрешают философских споров относительно математики, но могут представить их в ином освещении.

Каковы же источники такого отношения? Можно указать два из них. Первый может быть проиллюстрирован работой Серпинского по аксиоме выбора и ее математическим приложениям. Серпинский в своей французской статье 1918 г. о роли аксиомы выбора⁵ [11] различает два независимых вопроса:

- философские споры вокруг этой аксиомы;
- ее место в доказательстве математических теорем.

Согласно Серпинскому, второй вопрос следует рассматривать независимо от философских предпочтений относительно ее принятия или отказа от нее. Это мнение Серпинского включено во все издания его учебника по теории множеств с 1923 г. (Очерк теории множеств, *Zarys teorii mnogości*, [12]) до 1965 г. (Кардинальные и порядковые числа, *Cardinal and Ordinal Numbers* [13]). В работе [13, с. 95] Он писал:

«Помимо нашей личной склонности к принятию аксиомы выбора, мы в любом случае должны принимать во внимание ее роль в теории множеств и в математическом анализе. С другой стороны, так как аксиома выбора была поставлена под сомнение некоторыми математиками, важно знать, какие теоремы доказаны с ее помощью и выделить то место, в котором доказательство опирается на аксиому выбора; ибо нередко случалось, что некоторые авторы использовали в доказательствах аксиому выбора, не подозревая об этом. В конце концов, если бы никто не сомневался в аксиоме выбора, было бы неинтересно выяснять, какие доказательства на ней основаны, и какие теоремы доказаны без ее помощи, – что, как мы знаем, сделано в отношении других аксиом».

Это просто означает, что следует игнорировать философские разногласия (и относиться к ним как к частному вопросу) и изучать (спорные) аксиомы как чисто математические

⁴ Метаматематика – раздел математической логики, посвященный теории доказательств – *примечание переводчика*.

⁵ Серпинский опубликовал большое исследование об аксиоме выбора на русском языке: «Аксиома Zermelo и ее роль в развитии теории множеств и в анализе» (читано на заседании Моск. мат. о-ва 21 февраля 1917 г.) – Математический сборник, 1924, 31, 94–128. См. также Ф.А. Медведев. Ранняя история аксиомы выбора. М., 1982 – *примечание переводчика*.

конструкции, используя какие-либо продуктивные методы.

Вторым истоком рассматриваемого отношения польских математиков и логиков к философии была традиция польской аналитической философии, берущая свое начало из Львова, от работ Казимежа Твардовского. По словам К. Твардовского и его учеников, мы должны ясно и четко различать мировоззрение и научную философскую работу. Эта идея была в частности, выделена Лукасевичем, главным архитектором Варшавской школы логики. Он рассматривал различные философские проблемы, свойственные формальным наукам, как причастные мировоззрению математиков и логиков, но предметом логики и математики как специальных наук была для него работа, состоящая в построении логических и математических систем вместе с металоогическими и метаматематическими исследованиями. Следовательно, философские взгляды не могут быть установкой для измерения правильности формальных результатов. Тем не менее, философия может являться источником логических построений.

Одним из последствий описанного отношения польских логиков и математиков было то, что они не пытались разработать всеобъемлющую философию математики и логики (Лесьневский и Леон Хвистек были здесь исключениями!). Они формулировали свои философские мнения относительно математики или логики лишь изредка и лишь по тем проблемам, которые были им интересны, или над которыми они в действительности работали. Следовательно, в Польше не было никаких подлинных философов математики. Философские замечания были сформулированы логиками и математиками только на полях своих собственных математических или логических работ (и не имели никакого значения для самих результатов).

Современные тенденции и взгляды в философии математики, т.е. логицизм, интуиционизм и формализм были, конечно, хорошо известны

(и публикации о них с обсуждением этих тенденций, их смысла и развития). Но ничего из этого не было представлено в Варшавской школе. Более того, она не представляла какого-либо другого направления, у нее не было никакой официальной философии логики и математики. Это вытекало из веры в независимость логики и математики от философии. Мнения в области философии логики и математики рассматривались как «частные» вопросы, а философские заявления делались редко и неохотно. Если же они появлялись, то прямо или косвенно оговаривалось, что это личное мнение.

Хотя некоторые логические исследования были обусловлены философскими проблемами, например, многозначные логики Лукасевича, но формальные логические построения всегда были отделены от своих философских интерпретаций. Другим примером являются исследования по интуиционистской логике, осуществляемые среди других Тарским, без принятия интуиционизма как философии математики. Программа Янишевского⁶ и Польская математическая школа создали теоретико-множественный фундамент математики в методологическом, но не в философском смысле.

Каковы были отдельные философские взгляды, сформулированные польскими логиками, философами и математиками? Начнем с проблемы психологизма. Психологизм был популярен в философии логики и математики в конце XIX в. В соответствии с ним объекты, изучаемые с помощью логики и математики, существуют как психические сущности и становятся известными так же, как и другие психические факты. Уже Твардовский сделал шаг в сторону антипсихологизма. Следующим этапом была статья Лукасевича *Логика и психология* (*Logika a psychologia*, 1907, [14]), где он твердо объявил себя антипсихологистом в логике.

Польские логики не приняли концепцию логики как чистого синтаксиса. Эта точка зрения в то время была популярна, она была разработана под влиянием метаматематики

⁶ В 1919 г. появилась программная статья З. Янишевского «О потребностях математики в Польше» (*O potrzebach matematyki w Polsce//Nauka Polska*, 1918, 11–18), которая определила развитие польской математики на несколько десятилетий. Основными положениями статьи были выбор теории множеств как общего направления развития и создание международного журнала. Также на рус. яз. Г.И. Синкевич. Георг Кантор & Польская школа теории множеств. СПб, 2012 – *примечание переводчика*.

Гильберта и философии языка Венского кружка. Исключением здесь был Хвистек, который трактовал свои семантические системы как формальные системы выражений. Варшавская школа представляла семантическую точку зрения. В этом контексте следует рассматривать семантические основания логики, заложенные Тарским в тридцатые годы.

Семантическая точка зрения подразумевает отказ от аналитической концепции логики, т.е. отказ от того тезиса, что логика представляет собой совокупность – содержательно пустых тавтологий. Лесьневский (и Котарбинский, Tadeusz Kotarbiński) утверждали, что логика описывает наиболее общие характеристики бытия, логика играет роль общей теории реального мира.

Тарский (Alfred Tarski) охарактеризовал понятие тавтологии как неопределенное и не видел никаких объективных оснований для разделения терминов на логические и сверхлогические. Поэтому он не рассматривал границу между формальными и эмпирическими дисциплинами как явно очерченную.

Взгляды Лукасевича относительно рассматриваемой проблемы отношения между логикой и математикой, с одной стороны, и реальностью – с другой, претерпевали изменения. В 1912 г. он утверждал, что логические и математические суждения являются априорными истинами о мире идеальных сущностей [15]. Поэтому он рассматривал обе дисциплины как несвязанные с опытом. Построение Лукасевичем многозначной логики допускало, что логическим системам может быть придана онтологическая интерпретация, и подобный опыт поможет решить, какие из систем логики выполняются в реальности [16]. Позже он склонялся к конвенционализму и релятивизму. В работе [17] он писал:

«У нас нет никаких средств, чтобы решить, какая из **n**-значных систем логики $\langle . . . \rangle$ является истинной. Логика – это не наука о законах мышления или о каком-либо реальном объекте; по моему мнению, она лишь инструмент, который позволяет нам делать определенные выводы из определенных предположений. $\langle . . . \rangle$. Чем полезнее и богаче логическая система, тем она более ценна».

Казимеж Айдукевич (Kazimierz Ajdukiewicz, 1890–1963) также сочувствовал конвенционализму (в радикальном варианте). Он утверждал, что логика включает в себя правила употребления (правила смысла) как аксиоматические, так и дедуктивные. Позже он отказался от радикального конвенционализма и стал утверждать, что законы логики относятся к опыту косвенно, и что они должны рассматриваться как правила вывода, следовательно, они принадлежат к метанауке и носят в основном методологический характер.

Следующая рассматриваемая и обсуждаемая проблема – это проблема номинализма. Отъявленным номиналистом был Лесьневский. Поэтому он отрицал существование любых общих объектов. Следовательно, создаваемые им системы состояли из конечного числа отдельных надписей. Номиналистические склонности были у Тарского (унаследовавшего их от Лесьневского), но потребности метаматематики привели его к отказу от этих симпатий.

Взгляды Лукасевича на номинализм были иными. Он утверждал, что аргументы Тарского в пользу номинализма недостаточно убедительны. По его мнению, логики просто используют номиналистическую терминологию, в действительности не являясь номиналистами. Он был склонен интерпретировать логику в откровенно неоплатоническом духе. В работе [18] он писал:

«Подводя итоги этим заметкам, я хотел бы наметить в общих чертах образ, связанный с самыми глубокими интуициями, которые я всегда ощущаю перед лицом логики. Этот образ, возможно, прольет свет на истинное основание предмета в большей степени, нежели всякое дискурсивное описание. Сейчас всякий раз, когда я работаю даже над самыми незначительными логическими проблемами, – например, при поиске лаконичной аксиомы импликационного исчисления высказываний, – у меня всегда создается впечатление, что передо мной мощная, самая когерентная и самая устойчивая структура. Я ощущаю ее как твердую структуру, как материальный объект из самых тяжелых металлов, стократно сильнее стали и бетона. Я ничего не могу в ней изменить; ничего не могу произвольно создать, но путем

напряженной работы я обнаруживаю в ней новые и новые детали и постигаю незыблемые и вечные истины. Где она и какова она, эта идеальная структура? Верующий сказал бы, что она пребывает в Боге и суть Его мысль».

Заметим, что Лукасевич подчеркивал, что сама логика не может разрешить философский спор об универсалиях. Следовательно, беспочвенны любые утверждения о том, номиналистична логика или нет. Аналогичных мнений о нейтральности логики в отношении проблемы универсалий придерживались Айдукевич и Чезовский. Добавим, что Котарбинский в ранней и радикальной версии своего реизма придерживался взглядов, близких взглядам Лесьневского.

Как мы уже отмечали, Леон Хвистек (1884–1944) и Станислав Лесьневский (1886–1939) были исключениями в описываемом отношении к философским проблемам и спорным вопросам, точнее, их интересовали только те логические проблемы, которые входили в систему собственных философских взглядов на основания математики; их философские взгляды порождали интерес к частным проблемам, а логические исследования были обусловлены философскими взглядами.

Лесьневский заведовал кафедрой философии математики в Варшавском университете (с 1919 г. до своей смерти – в 1939 г.). Он представлял философский подход к логике, хотя был убежден, что философские исследования безнадежны и не приводят к конкретным решениям. Его цель состояла в том, чтобы построить систему логики, которая будет удовлетворять двум общим требованиям: она должна служить основой математике и должна быть построена свободным от неопределенностей способом. Он сделал это путем построения трех систем: прототетики, онтологии и мерологии. Лесьневский толковал логические системы номиналистическим способом. Язык был для него набором конкретных отдельных надписей. В нем существовали только те выражения, которые были реально написаны, он не признавал «потенциальное» существование. Он назвал это «конструктивным номинализмом». Следовательно, он отвергал трактовку логики и математики как игр с

использованием лишенных смысла символов. По его словам, любая система языка, говорящая «что-то» о «чем-то», есть способ выразить то, что интуитивно верно, это незаменимый способ кодирования и передачи логических интуиций. Добавим также, что Лесьневский утверждал, что логике следует понимать как экстенсивную и двусмысленную.

Хвистек известен главным образом благодаря своим логическими работами, т.е. благодаря его упрощению теории типов Рассела и Уайтхеда (он сделал это в номиналистическом духе). Целью его логического исследования было создание всеобъемлющей системы логики и математики, основанной на теории выражений (называемой им рациональной метаматематикой). Его результаты и идеи имели весьма ограниченное влияние. Причиной были используемые им сложные и нестандартные обозначения, а также его способ представления результатов.

Он представлял рационализм (называемый им критический рационализм) и отвергал иррационализм. По его словам, есть два источника знания: опыт и дедукция. Методы, используемые в науке и в философии, должны быть конструктивными. Цель науки заключается в описании с помощью математических выражений данных в опыте объектов. Математические формулы – это лишь описания опыта и не могут рассматриваться в качестве законов относительно объектов, которые не даны в опыте.

Одной из наиболее известных философских концепций Хвистека была его теория множественной реальности. В окончательном виде она изложена в его книге 1935 г. **Границы науки** [19]. В соответствии с различными типами опыта он постулировал четыре типа реальности: реальность впечатлений, реальность образов, реальность вещей и физическую реальность (сконструированную в науке). Он пытался также охарактеризовать свойства этих типов реальности с помощью соответствующих наборов аксиом.

В логике и математике Хвистек представлял номинализм и был против формализма. Он утверждал, что объекты дедуктивных систем являются выражениями и ничем иным.

Геометрия, согласно ему, является экспериментальной дисциплиной. Развитие неевклидовых геометрий рассматривалась им как наиболее важным достижением в науке. Оно отвергло кантовский идеализм и представление об априорности геометрии. Геометрия и другие математические теории, как и теории науки, должны разрабатываться конструктивным образом, т.е. их следует основывать на таких аксиомах и определениях, чтобы выводимые из них теоремы согласовывались с опытом.

3. Альфред Тарский

Прежде всего отметим, что Тарский интересовался философскими проблемами и активно участвовал в современной ему философской жизни. Он был убежден в философской значимости своих работ. Себя он представлял так [20]:

«Будучи математиком (а также логиком, возможно, своего рода философом) <. . .>».

Философская позиция Тарского была антиметафизической, он придерживался идеи научной философии. Он принял программу «малой философии», которая направлена на детальный и систематический анализ понятий, используемых в философии. Такая философия минималистична, антиспекулятивна и скептична по отношению ко многим фундаментальным проблемам традиционной философии. Такое отношение было унаследовано Тарским из Львовско-Варшавской школы и усилено контактами с Венским кружком. Он также придерживался эмпиризма, отвергал аналитические/синтетические различия и подчеркивал, что логические и эмпирические истины принадлежат к одной общей категории. Под влиянием Лесьневского и Котарбинского он склонялся скорее к пониманию выражений в сильно номиналистическом смысле. В соответствии с этим предложения рассматриваются в качестве конкретных физических объектов, а языки – как состоящие из символических выражений. Потребности металогических исследований обуславливали их понимание как выражений-типов. Тарский четко различал разговорную, естественную речь и формализованный язык.

Мостовский (Andrzej Mostowski) писал о Тарском [21, с. 81]:

«Тарский, в устных дискуссиях, часто говорил о своих симпатиях к номинализму. Хотя он никогда не принимал «реизм» Тадеуша Котарбиньского, на раннем этапе своей деятельности он его, несомненно, привлекал. Тем не менее, теоретико-множественные методы, образовавшие основу его логических и математических исследований, заставляли его постоянно использовать абстрактные и общие понятия, чего номиналисты стараются избегать. За отсутствием более подробных публикаций Тарского на философские темы эта коллизия, видимо, останется неразрешенной».

Тарский был склонен идентифицировать математику с дедуктивным методом. Он утверждал, что не существует никаких жестких границ между формальными и эмпирическими науками. Он допускал отказ от логических и математических теорий по эмпирическим основаниям. Он утверждал также, что не существует четкого разграничения между логической и фактической истиной и что понятие тавтологии остается неясным.

Следует подчеркнуть, что все это были его «частные» философские взгляды, которые не оказали влияния на его логические и математические исследования, иными словами, его исследования были независимы от каких-либо философских предпосылок. В статье **Über einige fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften** (О некоторых основных понятиях методологии дедуктивных наук, 1930, [22]) он недвусмысленно написал:

«<. . .> Следует отметить, что никакая частная философская точка зрения относительно оснований математики в этой работе не предполагается».

Это было характерно как для него, так и для всей Варшавской школы в логике. Независимость логических и математических исследований от философских взглядов объясняет когнитивное противоречие и расхождение между симпатиями Тарского к номинализму и эмпиризму и его «платонической» математической и логической практикой. Заметим, что такое отношение позволило ему внести свой вклад в различные важные направления

без необходимости принятия их философских предпосылок и попытаться примирить философию и исследовательскую практику. Его программа метаматематики может быть выражена его словами из работы [23], в которой он написал:

«В качестве существенного вклада польской школы в метаматематические исследования можно считать тот факт, что она с самого начала допускала в метаматематические исследования все продуктивные методы, как финитарные, так и инфинитарные».

4. Анджей Мостовский

А. Мостовский унаследовал свою общую философскую позицию от Тарского. Он свободно пользовался инфинитарными методами и решительно настаивал, что философские допущения не должны ограничивать формальный вид деятельности. Тем не менее, по-видимому, сам Мостовский чувствовал себя обязанным дать более широкое и систематическое освещение своих взглядов на философию математики.

Во вступлениях и предисловиях ко многим техническим статьям и работам Мостовский подчеркивал важность и необходимость некоторых философских предпосылок. Он обсуждал также возможные философские выводы представленных в них технических математических результатов. Но такие комментарии и замечания всегда были сведены к минимуму и не имели никакого влияния на технические соображения.

Во введении к монографии **Теория множеств** (*Teoria mnogości*), написанной вместе с К. Куратовским⁷, они пишут [24, с. 14]:

«До сих пор не существует всеобъемлющего философского обсуждения основных положений теории множеств. Проблема заключается в том, что до сих пор не выяснено, связаны ли и до какой степени абстрактные понятия теории множеств (и особенно в тех ее частях, в которых рассматриваются множества очень большой мощности) с основными понятиями математики, непосредственно связанными с практикой. Такой анализ необходим, потому что у

Кантора, создателя теории множеств, основные понятия этой теории окутаны некоторой мистикой».

С другой стороны, авторы убеждены в том, что значение и смысл теории множеств для оснований математики были продемонстрированы также в связи с философией математики.

И они заявляют, что наиболее характерной чертой теории множеств является то, что она дает инструмент для других разделов математики, непосредственно связанных с приложениями.

Философские замечания были сделаны только во введении. В книге не найти других философских заявлений или утверждений. Во всей книге авторы особенно выделяют (в духе Серпинского) философию аксиомы выбора и ее роль в математике и собственно в теории множеств – все теоремы, в которых используется аксиома выбора, отмечены маленьким кружочком.

Мостовский обращался к философским проблемам теории множеств позже, в частности, когда он комментировал результаты Коэна о независимости аксиомы выбора и гипотезы континуума (см. его работы 1964–1968 гг. [25–28]).

Он подчеркивал, что могут быть построены различные возможные, но взаимно несовместные аксиоматические теории множеств. Если это будет так, то «мы будем вынуждены признать, что в матче между платонизмом и формализмом последний снова забил гол» [28, с. 182].

Мостовский пришел к еще более сильному выводу в работе [27]. Он сказал, что у теории множеств нет шансов стать центральной математической дисциплиной. С одной стороны, большинство (если не все) математических понятий может быть интерпретировано в рамках теории множеств, «что представляет собой замечательное явление, которое, очевидно, требует объяснения», – как пишет Мостовский в [26, с. 83], но, с другой стороны, «существует несколько принципиально разных понятий множества, которые одинаково допустимы в качестве интуитивной основы для теории множеств» [26, с. 82]. И он приходит к следующему выводу [26, с. 94, 95]:

⁷ Рассмотренные замечания были перепечатаны во втором и третьем польских изданиях книги – *примечание автора*.

«Конечно, если есть много теорий множеств, то ни одна из них не может претендовать на центральное место в математике. Только их общая часть может претендовать на такое положение; но вопрос, будет ли эта общая часть содержать все аксиомы, необходимые для сведения математики к теории множеств».

Мостовский также рассматривал философские проблемы в связи с теоремами Геделя о неполноте. Как и в случае теории множеств, он указывал только философские проблемы, связанные с обсуждением спорных математических вопросов, и показывал возможные решения, но избегал любых определенных философских деклараций. Более того, все его философские комментарии были сведены к минимуму. Он подчеркивал, что мы не имеем точного понятия правильного математического доказательства.

В работе [29] Мостовский отмечает, что: «Математическое доказательство – это нечто более сложное, чем простая последовательность элементарных правил, содержащихся в так называемых правилах вывода. < . . . > Поэтому нужно обязательно проявлять сдержанность, акцентируя роль логических правил в [математических] доказательствах» [29, с. 83]. С другой стороны, автор убежден, что, несмотря на тот факт, что старая программа формализации математики практически пренебрегала, «сотрудничество логики и математики, оно было плодотворным, и возможно, еще принесет важные результаты» [ibidem].

Заметим также, что три направления философии математики, которые преобладали в двадцатые и тридцатые годы XX века (логицизм, формализм, интуиционизм), стали отправной точкой серии лекций Мостовского **Тридцать лет фундаментальных исследований (Thirty Years of Foundational Studies)** [30]. Он отметил, что они дали начало трем направлениям логико-математических исследований: конструктивизму, метаматематике и теоретико-множественному. Но в дальнейшем его основной текст не содержит никаких философских замечаний.

До сих пор мы указывали, что Мостовский, несмотря на свою осведомленность о философских проблемах, избегал философских

деклараций. Однако есть одна статья, в которой он делает явные заявления, а именно **Современное состояние исследований по основаниям математики (The present state of investigations of the foundations of mathematics)** [31, 32]. К сожалению, существует проблема интерпретации: статья была написана в первой половине пятидесятых, и идеологическая атмосфера того времени могла оказать на нее влияние. Сейчас не представляется возможным оценить, в какой степени на нее оказали воздействие внешние факторы. С другой стороны, автор может ограничить себя кругом чисто математических вопросов, тем самым полностью избежав философских замечаний и заявлений. Коль скоро он этого не сделал, мы будем рассматривать его замечания как искренние.

Он утверждает:

«< . . . > Объяснение природы математики лежит не в области математики, а в области философии, и возможно только в рамках глубоко продуманной философской концепции, воспринимающей математику не как обособленную от других наук, но с учетом ее укорененности в естественных науках, ее приложений, ее объединения с другими науками, и, наконец, ее истории».

Исследования основ математики с помощью математических методов способствуют формированию более широких философских взглядов. По Мостовскому [31, с. 42], полученные результаты подтверждают:

«суждение материалистической философии о том, что математика – это последнее прибежище естественной науки, что ее понятия и методы коренятся в опыте и что попытки установления оснований математики, не принимая в расчет ее происхождения из естественных наук, обречены на провал».

Поэтому Мостовский представляет здесь эмпирическую точку зрения на философию математики. Он неоднократно признавал, что конструктивизм (особенно его цели, но не обязательно его решения) весьма привлекает его [33, с. 192]. Причиной этому послужил тот факт, что:

«желательно исследовать природу математических сущностей и найти обоснование основных законов, регулирующих природу этих сущностей, тогда как платонизм принимает эти

законы, постулируя их без дальнейшего обсуждения [ibidem]».

Он подчеркивал, что в основаниях математики конструктивистское направление ближе к номиналистической философии, нежели к идеалистической (в платоновском смысле). Этот номиналистический характер подразумевает, что конструктивизм не принимает общие математические понятия, но пытается построить их. «Это приводит к тому, результату, что можно идентифицировать математические понятия с их определениями» [33, с. 178]. В пользу номинализма говорит тот факт, что некоторые важные математические теории были удовлетворительным образом реконструированы на номиналистической основе, и их реконструкции оказались эквивалентны классическим теориям.

Симпатии Мостовского по отношению к номинализму можно рассматривать как результат влияния его учителя Тарского, который сам склонялся к сильно номиналистическому пониманию выражений и в этом отношении находился под влиянием Лесьневского и Котарбиньского [6, с. 333–335].

5. Заключение

Польские логики и математики, будучи убеждены в важности философской проблематики и весьма хорошо зная современные философские направления, трактовали логику и математику как самостоятельные дисциплины, независимые от их философской рефлексии, свободные от каких-либо философских предпосылок. Поэтому они четко отделяли практику математических и логических исследований от философских дискуссий относительно логики и математики. Философские взгляды и мнения воспринимались как «личное» дело, не долженствующее влиять на математические и метаматематические соображения. Напротив, в последних можно и должно пользоваться любыми корректными методами. Этот «методологический платонизм» позволил польским логикам и математикам работать в различных областях без оглядки на философские догмы. В спорных случаях, как, например, в случае аксиомы выбора в теории множеств, их отношение можно охарактеризовать как нейтральное – без каких-либо

философских деклараций они просто рассматривали и изучали различные математические следствия как принятия, так и отказа от сомнительных принципов и исследовали их роль в математике.

Автор выражает признательность канд. физ.-мат. наук Галине Синкевич (Санкт-Петербург) за перевод этой статьи на русский язык и доктору филол. наук С.Н. Бычкову (Москва) за ценные комментарии по поводу перевода.

Список литературы (References)

1. Woleński J. 1985, Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
2. Woleński J. 1989, Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
3. Sierpiński W. 1909, Pojęcie odpowiedniości w matematyce, Przegląd Filozoficzny 12. Pp. 8–19.
4. Janiszewski Z. 1916, O realizmie i idealizmie w matematyce, Przegląd Filozoficzny 19. Pp. 161–170. French translation: ‘Sur le réalisme et l’idéalisme en mathématiques’// Z. Janiszewski, Oeuvres choisies, rédigées par K. Borsuk et al., PWN, Warszawa 1962. Pp. 309–317.
5. Zaremba, S. 1912, Arytmetyka teoretyczna, Polska Akademia Umiejętności, Kraków.
6. Murawski R., 2004, Philosophical reflection on mathematics in Poland in the interwar period, Annals of Pure and Applied Logic 127. Pp. 325–337.
7. Murawski R., 2011, Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej, Monografie Fundacji na rzecz Nauki Polskiej, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
8. Murawski R., 2014, The Philosophy of Mathematics and Logic in the 1920s and 1930s in Poland, Birkhäuser Verlag, Basel.
9. Łukasiewicz J. 1916, O pojęciu wielkości (Z powodu dzieła Stanisława Zaremby), Przegląd Filozoficzny 19, 1–70. English translation: ‘On the concept of magnitude (In connection with Stanisław Zaremba’s **Theoretical Arithmetic**)’// J. Łukasiewicz, Selected Works, edited by L. Borkowski, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam–London and PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa 1970. Pp. 16–83.
10. Zaremba, S. 1926, La logique en mathématiques, Gauthier-Villars, Paris.
11. Sierpiński W. 1918, L’axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l’analyse, Bulletin International de l’Académie des Sciences et des Lettres de Cracovie, classe de Sciences mathématiques et naturelles, Série A: sciences mathématiques, 97–152; reprinted in: W. Sierpiński, Oeuvres choisies, vol. 2, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975. Pp. 208–255.
12. Sierpiński W. 1923, Zarys teorii mnogości. Wydawnictwo Kasy im. J. Mianowskiego, Warszawa.


13. Sierpiński W. 1965, Cardinal and Ordinal Numbers, Polish Scientific Publishers, Warszawa.
14. Łukasiewicz J. 1907, Logika a psychologia, Przegląd Filozoficzny 10. Pp. 489–491.
15. Łukasiewicz J. 1912, O twórczości w nauce, Księga pamiątkowa ku uczczeniu 250 rocznicy założenia Uniwersytetu Lwowskiego, Lwów, 1–15. English translation: ‘Creative elements in science’, in: J. Łukasiewicz, Selected Works, edited by L. Borkowski, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam–London and PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa 1970. Pp. 1–15.
16. Łukasiewicz J. 1936, Logistyka a filozofia, Przegląd Filozoficzny 39. Pp. 115–131. English translation: ‘Logistic and philosophy’ // J. Łukasiewicz, Selected Works, edited by L. Borkowski, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam–London and PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa 1970. Pp. 218–235.
17. Łukasiewicz J. 1952, On the intuitionistic theory of deduction, *Indagationes Mathematicae* 14, 202–212. Reprinted in: J. Łukasiewicz, Selected Works, edited by L. Borkowski, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam–London and PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa 1970. Pp. 325–340.
18. Łukasiewicz J. 1937, W obronie logistyki, in: *La pensée catholique et la logique moderne*, Wydawnictwo Wydziału Teologicznego UJ, Kraków, 7–13. English translation: ‘In defence of logistic’, // J. Łukasiewicz, Selected Works, edited by L. Borkowski, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam–London and PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa 1970. Pp. 236–249.
19. Chwistek L. 1935, Granice nauki. Zarys logiki i metodologii nauk ścisłych, Książnica-Atlas, Lwów-Warszawa. English translation: *The Limits of Science. An Outline of Logic and Methodology of Science*, Kegan Paul, Trench Trubner & Co Ltd., New York–London 1948.
20. Tarski A. 1944, The semantic conception of truth and the foundations of semantics, *Philosophy and Phenomenological Research* 4. Pp. 341–375.
21. Mostowski A. 1967, Tarski, Alfred // P. Edwards (Ed.), *The Encyclopedia of Philosophy*, vol. 8, Macmillan, New York. Pp. 77–81.
22. Tarski, A. 1930, Über einige fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37. Pp. 361–404.
23. Tarski A. 1954, Contribution to the discussion of P. Bernays ‘Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung’, *Revue Internationale de Philosophie* 8. Pp. 16–20.
24. Kuratowski K., Mostowski A., 1952, *Teoria mnogości*, Nakładem Polskiego Towarzystwa Matematycznego z subwencji Ministerstwa Szkolnictwa Wyższego, Warszawa–Wrocław (1st edition); Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1966 (2nd edition), Warszawa 1978 (3rd edition). English translation: *Set Theory*, PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa, and North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1967 (1st edition) and 1976 (2nd edition).
25. Mostowski A., 1964, Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese, *Elemente der Mathematik* 19. Pp. 121–125.
26. Mostowski A., 1967, Recent results in set theory // *Problems in the Philosophy of Mathematics*, ed. I. Lakatos, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, Pp. 82–96 and Pp. 105–108.
27. Mostowski A., 1967c, O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości, *Studia Logica* 20. Pp. 99–116.
28. Mostowski A., 1968, Niesprzeczność i niezależność hipotezy kontinuum, *Wiadomości Matematyczne* 10. Pp. 175–182.
29. Mostowski A., 1972, *Matematyka a logika. Refleksje przy lekturze książki A. Grzegorzcyka «Zarys arytmetyki teoretycznej» wraz z próbą recenzji*, *Wiadomości Matematyczne* 15. Pp. 79–89.
30. Mostowski A., 1965, *Thirty Years of Foundational Studies. Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930–1964*, *Acta Phil. Fennica* XVII. Pp. 1–180.
31. Mostowski A., 1955, The present state of investigations of the foundations of mathematics // *Rozprawy Matematyczne* 9. Pp. 1–48 [co-authors: A. Grzegorzcyk, S. Jaśkowski, J. Łoś, S. Mazur, H. Rasiowa and R. Sikorski].
32. Mostowski A., 1955, Współczesny stan badań nad podstawami matematyki, *Prace Matematyczne* 1. Pp. 13–55.
33. Mostowski A., 1959, On various degrees of constructivism // *Constructivity in Mathematics. Proceedings of the Colloquium held in Amsterdam, 1957*, ed. A. Heyting, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam. Pp. 178–194.
34. Sleszyński J. 1923, O znaczeniu logiki dla matematyki // *Poradnik dla samouków*, tom III: *Matematyka. Uzupełnienia do tomu pierwszego*, Wydawnictwo A. Heflicha i St. Michalskiego, Warszawa. Pp. 39–52.



Информация об авторе

Muravskiy Roman, доктор математических наук, профессор
 Университет Адама Мицкевича, факультет математики и компьютерных наук
 Познань, Польша, ул. Umultowska 87, 61-614. E-mail: rmur@amu.edu.pl

Information about author

Muravskiy Roman, Doctor of Math. Science, Professor
 Adam Mickiewicz University, Faculty of Mathematics  Computer Science
 Poznan, Poland, ul. Umultowska 87, 61–614. E-mail: rmur@amu.edu.pl