ISSN 2226-8383

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

***Научно-теоретический журнал***

Том XXV

Выпуск 5 (96)

Тула
2024

Учредитель: ФГБОУ ВО
«ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Адрес редакции:
300026, г. Тула, пр. Ленина, 125.
Тел. +79156812638
8(4872)374051
Адрес редакции: 300026,
E-mail: cheb@tsput.ru
URL: http://www.chebsbornik.ru

Издается с 2001 года.
Выходит 5 раз в год.
Регистрационный номер
СМИ: ПИ № ФС77-80049

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ Математика, Mathematical Reviews, РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Министерства просвещения Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого, Тульского государственного университета

**Главный редактор**
В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

**Ответственные секретари:**
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

**Заместители главного редактора:**
Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула)
А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

**Редакционная коллегия:**

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)
В. М. Бухштабер ((Россия, г. Москва))
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)
С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)
П. С. Геворкян (Россия, г. Москва)
Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)
В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)
А. О. Иванов (Россия, г. Москва)
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)
Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)
А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)
А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)
М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)
З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)
Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)
Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

12+

# СОДЕРЖАНИЕ

Том 25 Выпуск 5


С. А. Алдашев. Некорректность задачи Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения ..... 5

Е. Н. Бажанова. $\sigma_\Omega$-расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных $T$-групп и их спутники ..... 16

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя. О степенной сопряженности слов в группах с малым сокращением ..... 32

Н. Б. Безверхняя. О свойстве антинормальности двупорожденных подгрупп свободной группы ..... 45

Вит. В. Волчков, Г. В. Краснощёких. О нулях периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя ..... 57

Г. Джангибеков, Г. М. Козиев. К теории двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем дифференциальных уравнений ..... 74

А. Н. Кириллов. Периодическое управление биосообществом и гомеоморфизмы окружности ..... 90

С. А. Мешаик. О группе классов форм высоких степеней ..... 113

Т. Д. Нгуен, И. З. Ахметов, А. Ф. Галимянов. Численный метод решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра с помощью искусственных нейросетей ..... 126

П. Г. Поцейко. О рациональных аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке суммами Абеля – Пуассона ..... 140

И. Рахимов, Х. Джамиль, Р. Н. Мохд Насир. Полная классификация двух классов двумерных $PI$-алгебр над любым основным полем ..... 164

Х. М. Хуромонов. Наилучшее совместное приближение некоторых классов функций в пространстве Бергмана $B_2$ ..... 183

А. В. Шутов. Об аналоге задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа ..... 195

А. О. Юлина. Вариационные задачи в работах академика О. И. Сомова. Брахистохрона и таутохрона ..... 216

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Э. Альмухур, А. Адайлех, Т. Саса, А. Аль-Нана. Топологические основы динамики нарушения трехмерной симметрии для абелевых и неабелевых моделей Хиггса ..... 228

Р. М. Ашрапов, П. С. Дергач. О накрытии множеств специального вида геометрическими прогрессиями с рядом некоторых ограничений ..... 237

В. И. Паньженский, О. П. Сурина. О размерности группы Ли автоморфизмов параконтактного метрического многообразия ..... 244

И. А. Цыбин, Г. Н. Титов. Об одном вопросе, связанном с полумодулярностью решёток подгрупп конечных групп ..... 254

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

А. В. Романов. Масштабные эффекты микрополярной среды в задаче о кручении цилиндрического тела ..... 262

Г. В. Павилайнен, А. А. Тихонов, М. П. Юшков. Пафнутий Львович Чебышёв — академик Императорской Санкт-Петербургской академии наук (к 300-летию Российской академии наук и Санкт-Петербургского государственного университета) .. 277

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, Д. В. Праведников. Влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн в анизотропных средах ..... 292

РЕДКОЛЛЕГИЯ ..... 307

THE EDITORIAL BOARD ..... 311

TABLE OF CONTENTS ..... 315

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.956 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-5-15

# Некорректность задачи Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения

С. А. Алдашев

**Алдашев Серик Аймурзаевич** — доктор физико-математических наук, Институт математики и математического моделирования КН МНВО РК (г. Алматы).
*e-mail: aldash51@mail.ru*

**Аннотация**

Известно, что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к многомерным параболическим уравнениям.

Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводится к многомерным гиперболо-параболическим уравнениям.

Известно также, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать вырождающимися многомерными гиперболическими уравнениями.

Изучение процесса распространения тепла в среде, заполненной массой, приводит к многомерным параболическим уравнениям.

Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к многомерным гиперболо-параболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены, а их многомерные аналоги исследованы мало. Задача Трикоми для указанных уравнений на плоскости ранее исследована, но насколько нам известно, в пространстве не изучена. В данной работе показано, что для многомерного модельного смешанного гиперболо-параболического уравнения задача Трикоми разрешима неоднозначно. Приводится явный вид этого решения.

*Ключевые слова:* задача Трикоми, многомерное уравнение, разрешимость, сферические функции.

*Библиография:* 11 названий.

**Для цитирования:**
Алдашев, С.А. Некорректность задачи Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 5–15.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 517.956 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-5-15

# Ill-posedness of the Tricomi problem for a multidimensional mixed hyperbolic-parabolic equation

S. A. Aldashev

**Aldashev Serik Aimurzaevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Almaty).
*e-mail: aldash51@mail.ru*

**Abstract**

It is known that in mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the environment. If the medium is non-conducting, then we obtain multidimensional hyperbolic equations. If the medium has high conductivity, then we come to multidimensional parabolic equations.

Consequently, the analysis of electromagnetic fields in complex media (for example, if the conductivity of the medium changes) is reduced to multidimensional hyperbolic-parabolic equations.

It is also known that vibrations of elastic membranes in space according to Hamilton's principle can be modeled by multidimensional hyperbolic equations.

The study of the process of heat propagation in a medium filled with mass leads to multidimensional parabolic equations.

Consequently, studying the mathematical modeling of the heat propagation process in vibrating elastic membranes, we also come to multidimensional hyperbolic-parabolic equations. When studying these applications, it becomes necessary to obtain an explicit representation of the solutions of the problems under study.

Boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations in the plane are well-explored, but their multidimensional analogues have been studied very little. The Tricomi problem for the above equations has been previously investigated on a plane, but far as is known, this problem in space has not been analyzed. In this paper, we show that for the multidimensional model mixed hyperbolic-parabolic equation, the Tricomi problem is non-uniquely solvable. An explicit form of this solution is provided.

*Keywords:* Tricomi problem, multidimensional equation, solvability, spherical functions.

*Bibliography:* 11 titles.

**For citation:**
Aldashev, S. A. 2024, "Ill-posedness of the Tricomi problem for a multidimensional hyperbolic-parabolic equation" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 5–15.

## 1. Введение

Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены (см. [1], где исследованы задача Трикоми и первая краевая задача). Их аналоги в пространстве исследованы мало ([2]).

В данной статье найдена многомерная смешанная область, в которой задача Трикоми разрешима не однозначно для гиперболо-параболического уравнения. Приводится явный вид полученного классического решения.

## 2. Постановка задачи и результат

Пусть $D_\varepsilon-$ конечная область евклидова пространства $E_{m+1}$ точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная в полупространстве $t>0$ конусами $|x|=t+\varepsilon$, $|x|=1-t$, $0\le t\le\frac{(1-\varepsilon)}{2}$, а при $t<0-$ цилиндрической поверхностью $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$ и плоскостью $t=t_0<0$, где $|x|-$ длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$, а $0<\varepsilon<1$.

Обозначим через $D_\varepsilon^+$ и $D^-$ части области $D_\varepsilon$, лежащие соответственно в полупространствах $t>0$ и $t<0$. Части конусов $|x|=t+\varepsilon$, $|x|=1-t$, ограничивающих области $D_\varepsilon^+$, обозначим через $S^\varepsilon$ и $S^1$ соответственно. Пусть $S_\varepsilon=\{(x,t):t=0,\ \varepsilon<|x|<1\}$.

В области $D_\varepsilon$ рассмотрим модельное смешанное гиперболо-параболическое уравнение

$$0=\begin{cases}\Delta_x u-u_{tt},\ t>0,\\ \Delta_x u-u_t,\ t<0,\end{cases}\tag{1}$$

где $\Delta_x-$ оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m,\ m\ge 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,\ t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\le\pi$, $i=2,3,...,m-1$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Следуя ([1]) в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую задачу.

**Задача Т.** Найти решения уравнения (1) в области $D_\varepsilon$ при $t\ne 0$ из класса $C(\bar D_\varepsilon)\cap C^1(D_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon^+\cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon}=\varphi(r,\theta),\ u|_\Gamma=\psi(t,\theta).\tag{2}$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка $n$, $1\leqslant k\leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l=0,1,...-$ пространства Соболева, а $\tilde S_\varepsilon=\{(r,\theta)\in S_\varepsilon,\ \varepsilon<r<\frac{(1+\varepsilon)}{2}\}$.

Имеет место ([3])

Лемма. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S_\varepsilon)$. Если $l\geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\tag{3}$$

а также ряды, полученного из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\bar\varphi_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\bar\tau_n^k(r)$, $\bar\nu_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$, $\tau(r,\theta)=u(r,\theta,0)$, $\nu(r,\theta)=u_t(r,\theta,0)$.

Введем множество функций

$$B^l(S_\varepsilon)=\{f(r,\theta):f\in W_2^l(S_\varepsilon),\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}(||f_n^k(r)||^2_{C^2((\varepsilon,1))}+$$

$$+||f_n^k(r)||^2_{C([\varepsilon,1])})\exp 2(n^2+n(m-2))<\infty, l\ge m-1.\}$$

Тогда справедлива

**Теорема.** Если $\varphi(r,\theta)\in B^l(\tilde S_\varepsilon)$, $\psi(r,\theta)\in W^l(\Gamma)$, $l\ge m+1$, то задача $T$ разрешима неоднозначно. Отметим, что в [4] построены примеры, которые показывают, что однородная задача Т имеет бесчисленное множество решений.

## 3. Доказательство теоремы

В сферических координатах уравнение (1) в области $D_\varepsilon^+$ имеет вид

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt}=0, \tag{4}$$

где

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1=1,\ g_j=(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

При $t\to-0$ на $S_\varepsilon$ получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$ вида

$$\tau_{rr}+\frac{m-1}{r}\tau_r-\frac{1}{r^2}\delta\tau=\nu(r,\theta),\ 0<r<1. \tag{5}$$

Известно ([3]), что спектр оператора $\delta$ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2)$, $n=0,1,...$ каждому из которых соответствует $k_n$ ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи Т в области $D_\varepsilon^+$ принадлежит классу $C(D_\varepsilon^+\cup S_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon^+)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (4) и (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\bar{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=0, \tag{7}$$

$$\bar{\tau}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\tau}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}_n^k=\bar{\nu}_n^k(r),\ 0<r<1, \tag{8}$$

при этом первое условие краевого условия (2) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,r-\varepsilon)=\bar{\varphi}_n^k(r),\ \varepsilon\le r\le\frac{(1+\varepsilon)}{2},\ k=\overline{1,\ k_n},\ n=0,1,... . \tag{9}$$

В (7)-(9) произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi=\frac{r+t}{2}$, $\eta=\frac{r-t}{2}$ соответственно получим

$$u_{n\xi\eta}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}u_n^k=0,\ \frac{\varepsilon}{2}<\eta<\xi<\frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$\tau_{n\xi\xi}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau_n^k=\nu_n^k(\xi),\ \frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$u_n^k(\xi,\frac{\varepsilon}{2})=\varphi_n^k(\xi),\ \frac{\varepsilon}{2}\le\xi\le\frac{1}{2}, \tag{12}$$

$$\tau_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(2\xi),\ \nu_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\nu}_n^k(2\xi),\ \varphi_n^k(\xi)=(\xi+\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\varphi}_n^k(\xi+\frac{\varepsilon}{2}),$$

$$\bar{\lambda}_n=((m-1)(3-m)-4\lambda_n)/4,\ k=\overline{1,\ k_n},\ n=0,1,... .$$

Используя общее решение уравнения (10) полученное в [5], в работе [6] показано, что решение задачи Коши для уравнения (10) имеет вид

$$u_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta,;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi,;\xi,\eta)+ \\ +\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}]d\xi_1, \tag{13}$$

где $R(\xi,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения (10) ([7]), а $P_\mu(z)$– функция Лежандра, $\mu=n+\frac{(m-3)}{2}$,

$$\frac{\partial}{\partial N}|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^\perp$– нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке $(\xi_1,\eta_1)$, направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

Далее из (2), (12) получим

$$\tau_n^k(\frac{\varepsilon}{2})=\varphi_n^k(\frac{\varepsilon}{2}),\ \tau_n^k(\frac{1}{2})=\psi_n^k(0),\ k=\overline{1,\ k_n},\ n=0,1,\dots. \tag{14}$$

Решение уравнение (11) записывается в виде ([8])

$$\tau_n^k(\varepsilon)=\frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2}-\xi^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1+C_{1n}^k\xi^{s_1}+C_{2n}^k\xi^{s_2},\ \frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2}, \tag{15}$$

$s_1=n+\frac{(m-1)}{2},\ s_2=-n-\frac{(m-3)}{2}$, $C_{1n}^k$, $C_{2n}^k$– произвольные независимые постоянные.

Подставляя (14) в (15) для $C_{1n}^k$, $C_{2n}^k$ получим систему уравнений

$$\begin{cases}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_1}C_{1n}^k+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_2}C_{2n}^k=\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}C_{1n}^k+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}C_{2n}^k=\psi_n^k(0)-\frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2}-2^{-s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1,\end{cases}$$

из которого найдем

$$C_{1n}^k=[2^{s_1}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+\varepsilon^{s_2}2^{s_1}(A_n^k-\psi_n^k(0)/(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2}), \\ C_{2n}^k=[\varepsilon^{s_1}2^{s_2}(\psi_n^k(0)-A_n^k)-2^{s_2}\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)]/(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2}), \\ \frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2}-2^{-s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1=A_n^k=const, \tag{16}$$

Из (13), (15), учитывая условие (12) будем иметь

$$f_n^k(\xi)=\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2}-\xi^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1+\sqrt{2}(s_2-s_1)\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1- \\ -\frac{(2\xi-\varepsilon)}{2\xi+\varepsilon}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\left\{\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi_1^{s_2-1}\xi_2^{3-s_2}-\xi_1^{s_1-1}\xi_2^{3-s_1})P_\mu'\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]\right\}\nu_n^k(\xi_2)d\xi_2, \tag{17}$$

где

$$f_n^k(\xi)=(s_2-s_1)\{2\varphi_n^k(\xi)-\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-C_{1n}^k\xi^{s_1}-C_{2n}^k\xi^{s_2}+$$
$$+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}C_{1n}^k\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P_\mu'\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1+$$
$$+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}C_{2n}^k\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P_\mu'\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1\Bigg\}.$$

Продифференцировав уравнение (17) по $\xi$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\chi_n^k(\xi)=\nu_n^k(\xi)+\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}G_n(\xi,\xi_1)\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1,\ \frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}(s_2-s_1)\chi_n^k(\xi)=\frac{df_n^k}{d\xi},\ \sqrt{2}(s_2-s_1)G_n(\xi,\xi_1)=s_2\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2}-s_1\xi^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1}+$$
$$+\sqrt{2}(s_2-s_1)\frac{(\varepsilon^2-4\xi_1^2)}{\xi_1(2\xi+\varepsilon)^2}P_\mu'\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]-\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}(\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2}-\xi_1^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1})-$$
$$-\int\limits_{\xi_1}^{\xi}(\xi_2^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2}-\xi_2^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1})\Bigg[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}P_\mu'\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)+$$
$$+\frac{(2\xi-\varepsilon)(\varepsilon^2-4\xi_2^2)}{\xi_2(2\xi+\varepsilon)^3}P_\mu''\left(\frac{\xi_2^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)\Bigg]d\xi_2,$$

из которого найдем

$$\nu_n^k(\xi)=\chi_n^k(\xi)-\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}R_n(\xi,\xi_1;-1)\chi_n^k(\xi_1)d\xi_1, \tag{18}$$

где $R_n(\xi,\xi_1;-1)-$ резольвента ядра $G_n(\xi,\xi_1)$.

Далее из (16)-(18) имеем

$$\sqrt{2}(s_2-s_1)^2A_n^k=\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2}-2^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\left[\frac{df_n^k}{d\xi_1}-\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi_1}R_n(\xi_1,\xi_2;-1)\frac{df_n^k}{d\xi_2}d\xi_2\right]d\xi_1, \tag{19}$$

$$\frac{(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2})}{(s_2-s_1)}\frac{df_n^k}{\xi}=\left\{\varepsilon^{s_1}2^{s_1}\left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi_{\frac{\varepsilon}{2}}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\right.\right.$$
$$+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_1\right)\xi^{s_1-1}+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_1-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi_{\frac{\varepsilon}{2}}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\Bigg]-$$
$$-\varepsilon^{s_1}2^{s_2}\left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi_{\frac{\varepsilon}{2}}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_2\right)\xi^{s_2-1}+\right.$$
$$+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_2-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi_{\frac{\varepsilon}{2}}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\Bigg]A_n^k+2\frac{d\varphi_n^k}{d\xi}+$$
$$+\left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi_{\frac{\varepsilon}{2}}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_1\right)\xi^{s_1-1}\right.$$
$$\left.+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_1-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi_{\frac{\varepsilon}{2}}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\right]\left[2^{s_1}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-\varepsilon^{s_2}2^{s_1}\psi_n^k(0)\right]+$$
$$+\left[-\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi_{\frac{\varepsilon}{2}}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_2\right)\xi^{s_2-1}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_2-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi_{\frac{\varepsilon}{2}}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\right]\left[\varepsilon^{s_1}2^{s_2}\psi_n^k(0)-2^{s_2}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right].\right. \tag{20}$$

Из (19), (20) однозначно определяется $A_n^k$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$, при этом, если $\varphi_n^k(\xi)\equiv 0$, $\psi_n^k(0)\equiv 0$, то $A_n^k=0$.

Таким образом, из (18), (15), единственным образом найдем $\tau_n^k(\xi)$, $\forall\xi\in[\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}]$.

Учитывая оценки ([3])

$$|k_n|\le c,\ n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\le cn^{\frac{m}{2}-p+1},\ c=const, \tag{21}$$

$j=\overline{1,m-1}$, $p=0,1,\dots$, а также ограничения на заданные функции $\varphi(r,\theta),\psi(t,\theta)$, аналогично [6], можно показать, что ряд

$$\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta) \tag{22}$$

сходится абсолютно и равномерно.

Следовательно, функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta) \tag{23}$$

является решением задачи (4), (2), (22) в области $D_\varepsilon^+$, где функции $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$, находятся по формуле (13), в которой $\nu_n^k(\xi)$, $\tau_n^k(\xi)$ определяются из (18), (22).

Теперь задачу $T$ будем изучать в области $D^-$. Для этого сначала функцию $\tau_n^k(r)$ продолжим гладким образом на отрезке $[0,1]$ в виде

$$g_n^k(r)=\begin{cases}\tau_n^k(r),\ \varepsilon\le r\le 1\\ \tilde\tau_0^1(r),\ 0\le r\le\varepsilon,\\ n^{-l}\tilde\tau_n^k(r),\ 0\le r\le\varepsilon,\ k=\overline{1,k_n},\ n=1,2,\dots,\end{cases} \tag{24}$$

где $\tilde\tau_n^k(r)\in C([0,\varepsilon])$, причем $\tilde\tau_n^k(\varepsilon)=\tau_n^k(\varepsilon)$, $\tilde\tau_n^k(r)=r^\alpha\hat\tau_n^k(r)$, $\alpha\ge\frac{(m-1)}{2}$.

В силу оценок (21) ряд

$$u(r,\theta,0)=g(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} g_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\ 0\le r\le 1,$$

сходится абсолютно и равномерно, если $l>\frac{3m}{2}$.

В области $D^-$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_t=0, \tag{25}$$

с условием

$$u|_{S_0}=g(r,\theta),\ u|_{\Gamma}=\psi(r,\theta). \tag{26}$$

Решение задачи (25), (26) будем искать в виде (6).

Подставляя (6) в (25) получим уравнение

$$u_{nrr}^k-u_{nt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}u_n^k=0, \tag{27}$$

при этом краевое условие (26) имеет вид

$$u_n^k(r,0)=g_n^k(r),\ u_n^k(1,t)=\psi_n^k(t), k=\overline{1,\ k_n},\ n=0,1,\dots. \tag{28}$$

Произведя замену $\upsilon_n^k(r,t)=u_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$ задачу (27), (28) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv\upsilon_{nrr}^k-\upsilon_{nt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k=f_n^k(r,t), \tag{29}$$

$$\upsilon_n^k(r,0)=\tilde{g}_n^k(r),\ \upsilon_n^k(1,t)=0,\ 0<r<1, \tag{30}$$

$$f_n^k(r,t)=\psi_{nt}^k-\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\psi_n^k(t),\ \tilde{g}_n^k(r)=g_n^k(r)-\psi_n^k(0).$$

Решение задачи (29), (30) ищем в виде $\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k+\upsilon_{2n}^k$ где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ - решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{31}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,0)=0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{32}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)-$ решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{33}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,0)=\tilde{g}_n^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t)=0,\ 0<r<1. \tag{34}$$

Решение вышеуказанных задач аналогично [9] рассмотрим в виде

$$\nu_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{35}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r),\ \tilde{g}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r). \tag{36}$$

Подставляя (35) в (31),(32) с учетом (36), получим

$$R_{srr}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,\ 0<r<1, \tag{37}$$

$$R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{38}$$

$$T_{st} + \mu T = -a_{s,n}(t), \tag{39}$$

$$T_s(0) = 0. \tag{40}$$

Ограниченное решение задачи (37), (38) имеет вид ([9])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r), \tag{41}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $J_\nu(z)-$ функция Бесселя первого рода, $\gamma_s-$ ее нули, $\mu = \gamma_{s,n}^2$.

Решение задачи (39), (40) записывается в виде

$$T_s(t) = -\int_0^t a_{s,n}(\xi) \exp[-\gamma_{s,n}^2 (t-\xi)] d\xi. \tag{42}$$

Подставляя (41) в (36) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ 0 < r < 1, \tag{43}$$

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{g}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \tag{44}$$

Ряды (43), (44)- разложения в ряды Фурье-Бесселя ([10]), если

$$a_{s,n}(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_s)]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \tag{45}$$

$$b_{s,n} = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_s)]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{g}_n^k(\xi) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \tag{46}$$

где $\gamma_{s,n}, s = 1, 2, ...-$ положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (41), (42) получим решение задачи (31), (32) в виде

$$v_{1n}^k(r,t) = -\sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r) \{ \int_0^t a_{s,n}(\xi) \exp[-\gamma_{s,n}^2 (t-\xi)] d\xi \}, \tag{47}$$

где $a_{s,n}(t)$ определяется из (45).

Далее, подставляя (35) в (33), (34) будем иметь

$$T_{st} + \gamma_{s,n}^2 T_s = 0,$$

решением которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp(-\gamma_{s,n}^2 t). \tag{48}$$

Из (41), (48) с учетом (36) получим

$$v_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r) \exp(-\gamma_{s,n}^2 t), \tag{49}$$

где $b_{s,n}$ находится из (46).

Следовательно, решением задачи (25), (26) в области $D^-$ является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}[\psi_n^k(t)+\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)]r^{\frac{(1-m)}{2}}Y_{n,m}^k(\theta), \tag{50}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t),\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (47) и (49).

Так как продолжение (24) неоднозначно, то решение (33) также является неоднозначным.

Учитывая ограничения на заданные функции $\varphi(r,\theta),g(t,\theta),\psi(t,\theta)$, а также оценки (21), аналогично [6, 11] можно показать, что полученное решение вида (23) и (50) принадлежит искомому классу.

Теорема доказана.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных // М.: Наука, 2006. 287 с.

2. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики // Новосибирск: НГУ, 1983. 84 с.

3. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения // М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

4. Алдашев С. А. Неединственость решения многомерной задачи Трикоми для гиперболо-параболического уравнения // Украинский математический Вестник. 2015. Т. 12, № 1. С. 1–10.

5. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа // М.: Изд. АН СССР, 1959. 164 с.

6. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений // Алматы: Гылым, 1994. 170 с.

7. Copson E. T. On the Riemann-Green function // J.Rath. Mech and Anal. 1958. Vol. 1. P. 324–348.

8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1 // М.: Наука, 1973. 294 с.

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // М.: Наука, 1965. 703 с.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 // М.: Наука, 1974. 295 с.

11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики // М.: Наука, 1977. 659 с.

## REFERENCES

1. Nakhushev, A. M. 2006, “Offset problems for equation in partial derivatives”, *Moscow: Nauka.* 287 p. (in Russian).

2. Vragov, V. N. 1983, “Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics”, *Novosibirsk: NSU.* 84 p. (in Russian).

3. Mikhlin, S. G. 1962, "Multidimensional singular integrals and integral equations", *Moscow: Fizmatgiz.* 254 p. (in Russian).

4. Adlashev, S. A. 2015, "Non-uniqueness of the solution of the multidimensional Tricomi problem for the hyperbolic-parabolic equation", *Ukrainian Mathematical Bulletin*, vol. 12, №1. P. 1–10. (in Russian).

5. Bitsadze, A. V. 1959, "Mixed Type Equations", *Moscow: Izd. AN USSR.* 164 p. (in Russian).

6. Aldashev, S. A. 1994, "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations", *Almaty: Gylym*, 170 p. (in Russian).

7. Copson, E. T. 1958, "On the Riemann-Green function", *J. Rath. Mech and Anal.*, vol. 1. P. 324–348.

8. Bateman, G., Erdelyi A. 1973, "Higher Transcendental Functions", *Moscow: Nauka*, vol. 1. 294 p. (in Russian).

9. Kamke, E. 1965, "Handbook of ordinary differential Equations", *Moscow: Nauka.* 703 p. (in Russian).

10. Bateman, G., Erdelyi, A. 1974, "Higher Transcendental Functions", *Moscow: Nauka*, vol. 2. 295 p. (in Russian).

11. Tikhonov, A. N., Samarsky, A. A. 1977, "Equations of mathematical Physics", *M.: Nauka.* 659 p. (in Russian).

Получено: 06.06.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-16-31

# $\sigma_\Omega$-расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных $T$-групп и их спутники

Е. Н. Бажанова

**Бажанова Екатерина Николаевна** — кандидат физико-математических наук, Московский городской педагогический университет (г. Москва).
*e-mail: DeminaENmf@yandex.ru*

**Аннотация**

В 2001 году В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной был предложен функциональный подход в построении формаций и классов Фиттинга конечных групп путем рассмотрения помимо функций-спутников еще одного вида функций — направлений. В результате были построены $\omega$-веерные ($\Omega$-расслоенные) формации и классы Фиттинга конечных групп, включающие в себя известные $\omega$-локальные ($\Omega$-композиционные) формации и классы Фиттинга, где $\omega$ — непустое множество простых чисел ($\Omega$ — непустой подкласс класса всех простых групп). Дальнейшие исследования показали, что понятие расслоенности может быть применено к построению расслоенных формаций и классов Фиттинга мультиоператорных $T$-групп с конечными композиционными рядами. Новая идея в функциональном подходе построения классов групп была предложена А. Н. Скибой. В серии статей он разработал $\sigma$-теорию конечных групп, где $\sigma$ — произвольное разбиение множества всех простых чисел, и применил ее методы к построению $\sigma$-локальных формаций. На основе $\sigma$-методов были построены классы, обобщающие $\omega$-веерные и $\Omega$-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. В настоящей работе определены классы, обобщающие расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных $T$-групп, обладающих композиционными рядами, изучены их минимальные и внутренние спутники.

*Ключевые слова:* мультиоператорная $T$-группа, $\sigma_\Omega$-расслоенный класс Фиттинга, минимальный спутник, внутренний спутник.

*Библиография:* 20 названий.

**Для цитирования:**
Бажанова, Е.Н. $\sigma_\Omega$-расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных $T$-групп и их спутники // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 16–31.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-16-31

# $\sigma_\Omega$-foliated Fitting classes of multioperator $T$-groups and its satellites

E. N. Bazhanova

**Bazhanova Ekaterina Nikolaevna** — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow City University (Moscow).
*e-mail: DeminaENmf@yandex.ru*

**Abstract**

In 2001, V.A. Vedernikov and M.M. Sorokina proposed a functional approach to the construction of formations and fitting classes of finite groups by considering, in addition to satellite functions, another type of functions - directions. As a result, $\omega$-fibered ($\Omega$-foliated) formations and Fitting classes of finite groups were constructed, including the well-known $\omega$-local ($\Omega$-composite) formations and Fitting classes, where $\omega$ is a nonempty set of primes ($\Omega$ — a nonempty subclass of the class of all simple groups). Further research has shown that the concept of foliation can be applied to the construction of foliated formations and Fitting classes of multioperator $T$-groups with finite composition series. A new idea in the functional approach of constructing classes of groups was proposed by A.N. Skiba. In a series of articles, he developed the $\sigma$-theory of finite groups, where $\sigma$ is an arbitrary partition of the set of all primes, and applied its methods to the construction of $\sigma$-local formations. Classes generalizing $\omega$-fibered and $\Omega$-foliated formations and Fitting classes of finite groups were constructed on the basis of the $\sigma$-methods. We define classes generalizing the foliated Fitting classes of multioperator T-groups with composite series and study their minimal and inner satellites.

*Keywords:* multioperator $T$-group, $\sigma_\Omega$-foliated Fitting class, minimal satellite, inner satellite.

*Bibliography:* 20 titles.

**For citation:**
Bazhanova, E.N. 2024, "$\sigma_\Omega$-foliated Fitting classes of multioperator $T$-groups and its satellites", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 16–31.

## 1. Введение

Изучение классов алгебраических систем – множества алгебраических систем, содержащих вместе с каждой своей системой все ей изоморфные – является характерной чертой современной алгебры. Теория классов конечных групп начала активно развиваться во второй половине XX века после выхода работы Гашюца [1], в которой было определено понятие формации конечных групп. С помощью специальных функций Гашюцом были построены локальные формации, позже Б. Хартли [2] определил локальные классы Фиттинга. В работе [3] А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым исследуются частично локальные ($\omega$-локальные) и частично композиционные формации и классы Фиттинга конечных групп, где $\omega$ – непустое подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$.

Способ построения новых видов формаций и классов Фиттинга был предложен В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной путем рассмотрения еще одной функции — направления. Функция направление определяется как отображение из множества всех простых чисел (множества

всех конечных простых групп) во множество всех непустых формаций Фиттинга. В работах [4, 5] ими были построены соответственно $\Omega$-расслоенные ($\Omega$ – непустой подкласс класса всех конечных простых групп) и $\omega$-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп, имеющие бесконечное множество направлений, одним из которых является направление $\Omega$-композиционного и $\omega$-локального спутника соответственно. В дальнейшем В.А. Ведерников и Е.Н. Бажанова распространили идею расслоенных формаций и классов Фиттинга на класс мультиоператорных $T$-групп, обладающих условиями минимальности и максимальности для идеалов. Так, в работах [6, 7] были определены различные типы $\Omega$-расслоенных формаций и классов Фиттинга мультиоператорных $T$-групп, обладающих композиционными рядами.

А.Н. Скибой (см., например, [8]) была разработана $\sigma$-теория конечных групп, где $\sigma$ — некоторое разбиение множества простых чисел $\mathbb{P}$. В указанной работе были построены $\sigma$-локальные формации конечных групп. Идея $\sigma$-разбиений получила дальнейшее развитие в исследовании классов конечных групп (см., например, [9, 10, 11, 12]).

Цель данной работы — применить $\sigma$-подход к построению $\sigma_\Omega$-расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных $T$-групп, обладающих композиционными рядами, а также получить описание их минимальных и внутренних спутников, где $\sigma_\Omega$ — произвольное разбиение непустого подкласса $\Omega$ класса всех простых $T$-групп.

Некоторые результаты работы были анонсированы в [13, 14].

## 2. Необходимые определения, обозначения и вспомогательные результаты

Используемые в дальнейшем обозначения, определения и результаты можно найти в работах [15, 16, 17, 18, 19].

Пусть дана аддитивная группа $G$ с нулевым элементом 0. Группа $G$ называется *мультиоператорной $T$-группой* с системой мультиоператоров $T$ (или, коротко, *$T$-группой*), если в $G$ задана еще некоторая система $n$-арных алгебраических операций $T$ при некоторых $n$, удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ должно выполняться условие $t(0, \ldots, 0) = 0$, где слева элемент 0 стоит $n$ раз, если операция $t$ $n$-арна.

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс всех $T$-групп с конечными композиционными рядами, $\mathfrak{I}$ — класс всех простых $T$-групп. Все рассматриваемые $T$-группы принадлежат классу $\mathfrak{C}$. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество $T$-групп. Группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$, называется $\mathfrak{X}$-группой; через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс $T$-групп, порожденный $\mathfrak{X}$, в частности, $(G)$ – класс всех $T$-групп, изоморфных $T$-группе $G$.

Запись $M \lhd G$ означает, что $M$ является идеалом $T$-группы $G$. Напомним, что $T$-группа $G$ называется *комонолитической*, если в $G$ имеется такой идеал $M$ (комонолит $T$-группы $G$), что $G/M$ — простая $T$-группа и $N \subseteq M$ для любого собственного идеала $N$ $T$-группы $G$.

*Формацией* или *корадикальным классом* называется класс $T$-групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация $T$-групп и $G$ – $T$-группа. Пересечение всех идеалов $T$-группы $G$, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* $T$-группы $G$ и обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$.

Класс $T$-групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга* или *радикальным классом*, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если $N_1$ и $N_2$ – идеалы в $T$-группе $G$ и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1 + N_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга $T$-групп. Сумма всех $\mathfrak{X}$-идеалов $T$-группы $G$ называется *$\mathfrak{X}$-радикалом* $T$-группы $G$ и обозначается через $G_{\mathfrak{X}}$.

Класс $T$-групп, содержащийся в классе $\mathfrak{C}$, будем называть $\mathfrak{C}$-классом. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — $\mathfrak{C}$-классы $T$-групп. Тогда $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G \in \mathfrak{C} \mid G$ имеет идеал $N \in \mathfrak{X}$ с $G/N \in \mathfrak{Y})$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$; если $\mathfrak{X} = \varnothing$ или $\mathfrak{Y} = \varnothing$, то полагают $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \varnothing$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – $\mathfrak{C}$-класс $T$-групп и $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$-формация. Тогда $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{C} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называется *формационным произведением* классов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Отметим, что если $S_n\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{C} \mid G/G_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{X})$ называется *фиттинговым произведением* классов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{X}$. Отметим, что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}$; если $Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X} = \mathfrak{B}\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{K}(G)$ – класс всех простых $T$-групп, изоморфных композиционным факторам $T$-группы $G$. Для любого непустого подкласса $\Delta$ класса $\mathfrak{I}$ будем полагать: $\mathfrak{C}_\Delta = (G \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{K}(G) \subseteq \subseteq \Delta)$ и $\mathfrak{C}_{\Delta'} = (G \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{K}(G) \cap \Delta = \varnothing)$; нетрудно показать, что $\mathfrak{C}_\Delta$ является формацией Фиттинга. Обозначим $O^\Delta(G)$ — $\mathfrak{C}_\Delta$-корадикал $T$-группы $G$ и $O^{\Delta,\Delta'}(G)$ — $\mathfrak{C}_\Delta\mathfrak{C}_{\Delta'}$-корадикал $T$-группы $G$.

## 3. Основные результаты

### 3.1. Построение $\sigma_\Omega$-расслоенных классов Фиттинга $T$-групп

Пусть $\Omega$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\sigma_\Omega$ — произвольное разбиение класса $\Omega$, т.е. $\sigma_\Omega = \{\Omega_i \mid i \in I\}$, где $\Omega_i$ — непустой подкласс класса $\Omega$ для любого $i \in I$, $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$ и $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I, i \neq j$. Для произвольной $T$-группы $G$ и произвольного класса $T$-групп $\mathfrak{F}$ полагаем $\sigma_\Omega(G) = \{\Omega_i \in \sigma_\Omega \mid \Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing\}$ и $\sigma_\Omega(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\sigma_\Omega(G)$.

Следуя [7] введем определения следующих функций.

Определение 1. *Функция вида*

$$f : \sigma_\Omega \cup \{\sigma_\Omega{}'\} \to \{\textit{классы Фиттинга } T\textit{-групп}\},$$

*где $f(\sigma_\Omega{}') \neq \varnothing$, называется радикальной $\sigma_\Omega$-функцией или, коротко, $\sigma_\Omega R$-функцией.*

Определение 2. *Функция вида*

$$\varphi : \sigma_\Omega \to \{\textit{непустые формации Фиттинга } T\textit{-групп}\},$$

*удовлетворяющая условию $\mathfrak{C}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$, называется формационно-радикальной $\sigma_\Omega$-функцией или, коротко, $\sigma_\Omega FR$-функцией.*

Теорема 1. *Пусть $f$ и $\varphi$ — $\sigma_\Omega R$-функция и $\sigma_\Omega FR$-функция соответственно. Тогда*

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}') \textit{ и } G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \textit{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G))$$

*является классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$. Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}')$, $O^\Omega(N) \subseteq O^\Omega(G)$ по [6, лемма 2, п. 4)] и $f(\sigma_\Omega{}')$ является классом Фиттинга, то $O^\Omega(N) \in f(\sigma_\Omega{}')$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N)$. Тогда $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Так как $(N + G^{\varphi(\Omega_i)})/G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G/G^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$ и $\varphi(\Omega_i)$ является классом Фиттинга, то $N + G^{\varphi(\Omega_i)}/G^{\varphi(\Omega_i)} \cong N/N \cap G^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$. Поэтому $N^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq N \cap G^{\varphi(\Omega_i)}$. Теперь из $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$, $N^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G^{\varphi(\Omega_i)}$ и того, что $f(\Omega_i)$ является классом Фиттинга следует, что $N^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$. Таким образом, $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G = N_1 + N_2$, $N_1 \lhd G$, $N_2 \lhd G$, $N_1$ и $N_2$ принадлежат $\mathfrak{F}$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(N_1), O^\Omega(N_2) \in f(\sigma_\Omega{}')$, $O^\Omega(G) = O^\Omega(N_1) + O^\Omega(N_2)$ по [6, лемма 2, п. 6)] и $f(\sigma_\Omega{}')$ является классом Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}')$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Тогда $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_1)$ или $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_2)$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_1)$ и $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_2)$. Тогда $N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ и $N_2^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$. Так как $f(\Omega_i)$ – класс Фиттинга, то $D = N_1^{\varphi(\Omega_i)} + N_2^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$. Из $G = N_1 + N_2$ и $D \lhd G$ следует, что $G/D = (N_1 + D)/D + (N_2 + D)/D$. По модулярному тождеству Дедекинда

$$(N_1 + D)/D \cong N_1/N_1 \cap D = N_1/N_1 \cap (N_1^{\varphi(\Omega_i)} + N_2^{\varphi(\Omega_i)}) = N_1/(N_1^{\varphi(\Omega_i)} + (N_1 \cap N_2^{\varphi(\Omega_i)})) \cong$$

$$(N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)})/((N_1^{\varphi(\Omega_i)} + (N_1 \cap N_2^{\varphi(\Omega_i)}))/N_1^{\varphi(\Omega_i)}).$$

Так как $N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$ и $\varphi(\Omega_i)$ является формацией, то $(N_1 + D)/D \in \varphi(\Omega_i)$. Аналогично можно показать, что $(N_2 + D)/D \in \varphi(\Omega_i)$. Отсюда и из $\varphi(\Omega_i)$ – класс Фиттинга получим $G/D = (N_1 + D)/D + (N_2 + D)/D \in \varphi(\Omega_i)$. Следовательно, $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq D$. Поскольку $D \in f(\Omega_i)$ и $f(\Omega_i)$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$, и значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_1)$ и $\Omega_i \notin \sigma_\Omega(N_2)$ (случай $\Omega_i \notin \sigma_\Omega(N_1)$ и $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_2)$ рассматривается аналогично). Тогда $N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ и $N_2 \in \mathfrak{C}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$. Так как $G = N_1 + N_2$, то

$$G/N_1^{\varphi(\Omega_i)} = (N_1 + N_2)/N_1^{\varphi(\Omega_i)} = (N_1 + N_1^{\varphi(\Omega_i)})/N_1^{\varphi(\Omega_i)} + (N_2 + N_1^{\varphi(\Omega_i)})/N_1^{\varphi(\Omega_i)} =$$

$$N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)} + (N_2 + N_1^{\varphi(\Omega_i)})/N_1^{\varphi(\Omega_i)} \cong N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)} + N_2/N_2 \cap N_1^{\varphi(\Omega_i)}.$$

Поскольку $N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$, $N_2 \in \varphi(\Omega_i)$ и $\varphi(\Omega_i)$ – формация Фиттинга, то $G/N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$. Поэтому $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq N_1^{\varphi(\Omega_i)}$. Так как $N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ и $f(\Omega_i)$ – класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга. □

Определение 3. *Пусть $f$ и $\varphi$ — некоторые $\sigma_\Omega R$-функция и $\sigma_\Omega FR$-функция соответственно. Класс Фиттинга $T$-групп вида*

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}') \text{ и } G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G))$$

*называется $\sigma_\Omega$-расслоенным классом Фиттинга $T$-групп и обозначается $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$. Функция $f$ называется спутником (иначе, функцией-спутником), а функция $\varphi$ — направлением (иначе, функцией-направлением) $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.*

Приведем некоторые примеры $\sigma_\Omega$-расслоенных классов Фиттинга $T$-групп.

Пример 1. *Пусть $f_1$ – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_1(\sigma_\Omega{}') = (0)$ и $f_1(\Omega_i) = \varnothing$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$; $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Покажем, что $(0) = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$.*

Допустим, что $(0) \neq \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$ и пусть $G \neq \{0\} \in \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$. Тогда $O^\Omega(G) \in f_1(\sigma_\Omega{}') = (0)$. Отсюда $G \in \mathfrak{C}_\Omega$. Поэтому для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$ верно $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_1(\Omega_i) = \varnothing$; противоречие.

Таким образом, $(0) = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$.

Пример 2. *Пусть $f_2$ – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_2(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{C}$ и $f_2(\Omega_i) = \mathfrak{C}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$; $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Покажем, что $\mathfrak{C} = \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$.*

По определению 3 $\sigma_\Omega R(f_2, \varphi) \subseteq \mathfrak{C}$. Пусть $G \in \mathfrak{C}$. Так как $O^\Omega(G) \lhd G$, $G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G$ и $\mathfrak{C}$ — класс Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{C} = f_2(\sigma_\Omega{}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \mathfrak{C} = f_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$ и $\mathfrak{C} \subseteq \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$.

Таким образом, $\mathfrak{C} = \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$.

Пример 3. *Пусть $f_3$ – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_3(\sigma_\Omega{}') = (0)$ и $f_3(\Omega_i) = \mathfrak{C}_\Omega$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$; $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Покажем, что $\mathfrak{C}_\Omega = \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$.*

Пусть $G \in \mathfrak{C}_\Omega$. Тогда $O^\Omega(G) = \{0\} \in (0) = f_3({\sigma_\Omega}')$. Так как $G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G$ и $\mathfrak{C}_\Omega$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \mathfrak{C}_\Omega = f_3(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Следовательно, $G \in \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$ и $\mathfrak{C}_\Omega \subseteq \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$.

Пусть $G \in \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$. Тогда $O^\Omega(G) \in f_3({\sigma_\Omega}') = (0)$. Отсюда $O^\Omega(G) = \{0\}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{C}_\Omega$ и $\sigma_\Omega R(f_3, \varphi) \subseteq \mathfrak{C}_\Omega$.

Таким образом, $\mathfrak{C}_\Omega = \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$.

Пример 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга $T$-групп, такой что $\sigma_\Omega(\mathfrak{F}) = \varnothing$; $f_4$ – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_4({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$, $f_4(\Omega_i) = \varnothing$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Покажем, что $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$.*

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $\sigma_\Omega(G) = \{\Omega_i \in \sigma_\Omega \mid \Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing\} = \varnothing$. Значит, $\mathfrak{K}(G) \cap \Omega = \varnothing$ и $G \in \mathfrak{C}_{\Omega'}$. Поэтому $O^\Omega(G) = G \in \mathfrak{F} = f_4({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \varnothing = f_4(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$ и $\mathfrak{F} \subseteq \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$ и пусть $G$ — $T$-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\sigma_\Omega R(f_4, \varphi) \setminus \mathfrak{F}$. Так как $G \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$, то $O^\Omega(G) \in f_4({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ и $G \neq \{0\}$. Пусть $M_1$ и $M_2$ — идеалы $T$-группы $G$, такие что $G = M_1 + M_2$. Так как $G \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$, $M_1, M_2 \lhd G$ и $\sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$ — класс Фиттинга, то $M_1, M_2 \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$. Но, в силу выбора $G$, имеем $M_1, M_2 \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга, поэтому $G = M_1 + M_2 \in \mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, $G$ — комонолитическая $T$-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Из $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F}$ имеем $O^\Omega(G) \subseteq M$. Отсюда, учитывая, что $\mathfrak{C}_\Omega$ является формацией, следует $G/M \cong G/O^\Omega(G)/M/O^\Omega(G) \in \mathfrak{C}_\Omega$. Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G/M)$. Тогда $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$ и из $G \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$ получим $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_4(\Omega_i) = \varnothing$; противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга $T$-групп, такой что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C}_{\Omega'}$. Тогда для любой $T$-группы $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{C}_{\Omega'} = (G \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{K}(G) \cap \Omega = \varnothing)$ и, значит, $\sigma_\Omega(G) = \varnothing$. Поэтому $\sigma_\Omega(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma_\Omega(G) = \varnothing$. В виду примера 4 $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_4, R(f_4, \varphi)$, где $f_4$ – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_4({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$, $f_4(\Omega_i) = \varnothing$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция.

Пример 5. *Пусть $\Delta$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, такой что $\Omega_i \cap \Delta = \varnothing$ или $\Omega_i \subseteq \Delta$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Тогда $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$, где*

$$f_5({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}, f_5(\Omega_i) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } \Omega_i \cap \Delta = \varnothing, \\ \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}, & \text{если } \Omega_i \subseteq \Delta, \end{cases} \quad \text{для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega$$

*и $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция.*

Сначала покажем, что $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} \subseteq \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$. Пусть $G \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Так как $O^\Omega(G) \lhd G$ и $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$ — класс Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = f_5({\sigma_\Omega}')$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$, т.е. $\Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing$. Так как $G \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = (G \in \mathfrak{C} | \mathfrak{K}(G) \subseteq \Delta \cap \Omega)$, то $\mathfrak{K}(G) \subseteq \Delta$. Поэтому $\Omega_i \cap \Delta \neq \varnothing$. Тогда по условию $\Omega_i \subseteq \Delta$ и, значит, $f_5(\Omega_i) = \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Поскольку $G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G$ и $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = f_5(\Omega_i)$. Следовательно, $G \in \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$ и $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} \subseteq \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$.

Допустим, что $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} \subset \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$ и пусть $G$ — $T$-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\sigma_\Omega R(f_5, \varphi) \setminus \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Тогда, как и в примере 4, можно показать, что $G$ — комонолитическая $T$-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}} \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Так как $G \in \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$, то $O^\Omega(G) \in f_5({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Поэтому $O^\Omega(G) \subseteq M$ и $G/M \cong G/O^\Omega(G)/M/O^\Omega(G) \in \mathfrak{C}_\Omega$. Отсюда $\mathfrak{K}(G/M) \subseteq \Omega = \cup_{i \in I} \Omega_i$. Пусть для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G/M)$ верно $\Omega_i \subseteq \Delta$. Тогда $\mathfrak{K}(G/M) \subseteq \Delta$. Значит $\mathfrak{K}(G/M) \subseteq \Delta \cap \Omega$ и $G \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$; противоречие. Поэтому существует $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G/M)$, такой что $\Omega_j \cap \Delta = \varnothing$. Тогда из $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G)$ и $G \in \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$ имеем $G^{\varphi(\Omega_j)} \in f_5(\Omega_j) = \varnothing$; противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$.

Определение 4. *Класс Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$ называется $\sigma_\Omega$-свободным или, коротко, $\sigma_\Omega Fr$-классом Фиттинга, если $\varphi(\Omega_i) = \mathfrak{C}_{\Omega_i'}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и обозначается*

$$\mathfrak{F} = \sigma_\Omega FrR(f) = (G \in \mathfrak{C} \mid \ O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}') \text{ и } O^{\Omega_i'}(G) \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G)).$$

*Обозначим направление $\sigma_\Omega Fr$-класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}$ через $\varphi_0$.*

Определение 5. *Класс Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$ называется $\sigma_\Omega$-каноническим или, коротко, $\sigma_\Omega K$-классом Фиттинга, если $\varphi(\Omega_i) = \mathfrak{C}_{\Omega_i}\mathfrak{C}_{\Omega_i'}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и обозначается*

$$\mathfrak{F} = \sigma_\Omega KR(f) = (G \in \mathfrak{C} \mid \ O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}') \text{ и } O^{\Omega_i, \Omega_i'}(G) \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G)).$$

*Обозначим направление $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}$ через $\varphi_1$.*

Определение 6. *Направление $\varphi$ $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп назовем $r$-направлением, если $\varphi(\Omega_i) = \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i'}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Нетрудно проверить, что направления $\varphi_0$ $\sigma_\Omega Fr$-класса Фиттинга $T$-групп и $\varphi_1$ $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга $T$-групп являются $r$-направлениями.

Теорема 2. *Если $\varphi$ — $r$-направление $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп, то для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\varphi(\Omega_i)$ является $\sigma_\Omega$-расслоенным классом Фиттинга $T$-групп с направлением $\varphi$.*

Доказательство. Пусть $\varphi$ — $r$-направление $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп, $\Omega_i \in \sigma_\Omega$, $\mathfrak{F} = \varphi(\Omega_i)$, $\mathfrak{H} = \sigma_\Omega R(h, \varphi)$, где $h$ — $\sigma_\Omega R$-функция, имеющая следующее строение:

$$h(X) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } \ X \in \{{\sigma_\Omega}'\}; \\ (0), & \text{если } \ X \in \{\Omega_i\}; \\ \mathfrak{C}, & \text{если } \ X \in \sigma_\Omega \setminus \{\Omega_i\}. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как, согласно определению 2, $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга $T$-групп и $O^\Omega(G) \lhd G$, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h({\sigma_\Omega}')$.

Пусть $Y \in \sigma_\Omega(G)$. Если $Y \in \{\Omega_i\}$, то из $G \in \mathfrak{F} = \varphi(\Omega_i) = \varphi(Y)$ следует, что $G^{\varphi(Y)} = \{0\} \in (0) = h(Y)$. Если $Y \in \sigma_\Omega \setminus \{\Omega_i\}$, то $G^{\varphi(Y)} \in \mathfrak{C} = h(Y)$. Согласно определению 3 получаем $G \in \sigma_\Omega R(h, \varphi) = \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Если $\Omega_i \in \sigma_\Omega(H)$, то по определению 3 $H^{\varphi(\Omega_i)} \in h(\Omega_i) = (0)$ и поэтому $H \in \varphi(\Omega_i) = \mathfrak{F}$. Пусть $\Omega_i \notin \sigma_\Omega(H)$. Так как, согласно условию теоремы, $\varphi$ является $r$-направлением $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп, то $H \in \mathfrak{C}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i'} = \varphi(\Omega_i) = \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ — $\sigma_\Omega$-расслоенный класс Фиттинга $T$-групп с направлением $\varphi$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Тогда для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $T$-групп $\varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_\Omega$ является $\sigma_\Omega$-расслоенным классом Фиттинга с направлением $\varphi$.*

Доказательство. Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega$, $\mathfrak{M} = \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_\Omega$, $\mathfrak{B} = \sigma_\Omega R(b, \varphi)$, где $b$ — $\sigma_\Omega R$-функция такая, что

$$b(X) = \begin{cases} \varphi(\Omega_i), & \text{если } \ X \in \{{\sigma_\Omega}'\}; \\ \mathfrak{M}, & \text{если } \ X \in \sigma_\Omega. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Пусть $M \in \mathfrak{M}$. Из $\mathfrak{M} = \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_\Omega = \varphi(\Omega_i) \circ \mathfrak{C}_\Omega$ следует, что $O^\Omega(M) \in \varphi(\Omega_i) = b({\sigma_\Omega}')$. Так как $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга, то $M^{\varphi(\Omega_j)} \in \mathfrak{M} = b(\Omega_j)$ для любого $\Omega_j \in \sigma_\Omega(M)$. Таким образом, $M \in \sigma_\Omega R(b, \varphi) = \mathfrak{B}$ и поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$.

Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Тогда $O^\Omega(B) \in b(\sigma_\Omega{}') = \varphi(\Omega_i)$. Следовательно, $B \in \varphi(\Omega_i)\circ\mathfrak{C}_\Omega = \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_\Omega = \mathfrak{M}$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$.

Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M}$ — $\sigma_\Omega$-расслоенный класс Фиттинга $T$-групп с направлением $\varphi$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. $\square$

Теоремы 1 и 2 позволяют строить примеры $\sigma_\Omega$-расслоенных классов Фиттинга $T$-групп, в частности, примеры $\sigma_\Omega$-свободных и $\sigma_\Omega$-канонических классов Фиттинга $T$-групп.

Следствие 1. *Для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\mathfrak{C}_{\Omega_i'}$ является $\sigma_\Omega$-свободным классом Фиттинга $T$-групп.*

Следствие 2. *Для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\mathfrak{C}_{\Omega_i}\mathfrak{C}_{\Omega_i'}$ является $\sigma_\Omega$-каноническим классом Фиттинга $T$-групп.*

Следствие 3. *Для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\mathfrak{C}_{\Omega_i'}\mathfrak{C}_\Omega$ является $\sigma_\Omega$-свободным классом Фиттинга $T$-групп.*

Следствие 4. *Для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\mathfrak{C}_{\Omega_i}\mathfrak{C}_{\Omega_i'}\mathfrak{C}_\Omega$ является $\sigma_\Omega$-каноническим классом Фиттинга $T$-групп.*

Замечание 1. *Пусть разбиение класса $\Omega$ имеет вид $\sigma_\Omega = \{(A) \mid A \in \Omega\}$. Тогда $\sigma_\Omega$-расслоенный класс Фиттинга $T$-групп превращается в $\Omega$-расслоенный [7].*

Действительно, пусть $\sigma_\Omega = \{\Omega_i \mid i \in I\}$ — разбиение класса $\Omega$, где $\Omega_i = (A), A \in \Omega$;

$$\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f,\varphi) = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}') \text{ и } G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G))$$

$$\text{и } \mathfrak{H} = \Omega R(h,\psi) = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in h(\Omega') \text{ и } G^{\psi(A)} \in h(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)),$$

где $h$ — такая $\Omega R$-функция, что $h(\Omega') = f(\sigma_\Omega{}')$ и $h(A) = f((A))$ для всех $A \in \Omega$; а $\psi$ — $FR$-функция, для которой $\psi(A) = \varphi((A))$ и $\mathfrak{C}_{A'} \subseteq \psi(A)$ для всех $A \in \Omega$ [7]. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}') = h(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$. Значит, существует $i \in I$, такой что $A \in \Omega_i \cap \mathfrak{K}(G)$. Так как $A \in \Omega_i$, то $(A) = \Omega_i \in \sigma_\Omega$. Кроме того, из $A \in \mathfrak{K}(G)$ имеем $(A) \cap \mathfrak{K}(G) = \Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing$. Поэтому $(A) = \Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Отсюда из $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G^{\psi(A)} = G^{\varphi((A))} = G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) = f((A)) = h(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Заметим, что из определения 2 следует $\mathfrak{C}_{A'} = \mathfrak{C}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i) = \psi(A)$ для любого $A \in \Omega$.

Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^\Omega(G) \in h(\Omega') = f(\sigma_\Omega{}')$. Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$, отсюда $\Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing$. Так как $\Omega_i = (A)$, то $A \in \Omega_i \subseteq \Omega$ и $A \in \mathfrak{K}(G)$, значит, $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$. Из $G \in \mathfrak{H}$ имеем $G^{\varphi(\Omega_i)} = G^{\varphi((A))} = G^{\psi(A)} \in h(A) = f((A)) = f(\Omega_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Заметим также, что из $\mathfrak{C}_{A'} \subseteq \psi(A)$ для всех $A \in \Omega$ следует $\mathfrak{C}_{\Omega_i'} = \mathfrak{C}_{A'} \subseteq \psi(A) = \varphi((A)) = \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

### 3.2. Минимальные спутники $\sigma_\Omega$-расслоенных классов Фиттинга $T$-групп

На множестве всех $\sigma_\Omega R$-функций и $\sigma_\Omega FR$-функций введем отношение частичного порядка $\leq$. Для любых таких функций $\mu_1$ и $\mu_2$ полагаем $\mu_1 \leqslant \mu_2$, если $\mu_1(\sigma_\Omega{}') \subseteq \mu_2(\sigma_\Omega{}')$ и $\mu_1(\Omega_i) \subseteq \mu_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Очевидно, что $\varphi_0 \leq \varphi_1$.

Дадим описание строения минимального элемента частично упорядоченного множества всех $\sigma_\Omega R$-функций.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f,\varphi)$, $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1) $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(g,\varphi)$, где $g(\sigma_\Omega{}') = f(\sigma_\Omega{}') \cap \mathfrak{F}$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i) \cap \mathfrak{F}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;*

*2) $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(h,\varphi)$, где $h(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$ и $h(\Omega_i) = f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(g, \varphi)$, где $g$ – $\sigma_\Omega R$-функция из пункта 1) леммы. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Сначала покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}')$. Так как $O^\Omega(G) \lhd G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F}$. Поэтому $O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}') \cap \mathfrak{F} = g({\sigma_\Omega}')$. Также из $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поскольку $G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \cap \mathfrak{F} = g(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Теперь покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $O^\Omega(G) \in g({\sigma_\Omega}') \subseteq f({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in g(\Omega_i) \subseteq f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть $\mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega R(h, \varphi)$, где $h$ – $\sigma_\Omega R$-функция, описанная в пункте 2) леммы. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(G) \lhd G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h({\sigma_\Omega}')$. Из $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) = h(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_2$ и $G$ – $T$-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_2 \backslash \mathfrak{F}$. Тогда $T$-группа $G$ является комонолитической с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_2$, то $O^\Omega(G) \in h({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$, и значит, $O^\Omega(G) \subseteq M$. Тогда $G/M \cong G/O^\Omega(G)/M/O^\Omega(G) \in \mathfrak{C}_\Omega$ и по [6, лемма 2, п. 5)] $O^\Omega(G) = O^\Omega(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(G) = O^\Omega(M) \in f({\sigma_\Omega}')$. Из $G \in \mathfrak{F}_2$ следует $G^{\varphi(\Omega_i)} \in h(\Omega_i) = f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$. □

Пусть $\{f_j | j \in J\}$ – произвольный набор $\sigma_\Omega R$-функций. Обозначим через $\cap_{j\in J} f_j$ такую $\sigma_\Omega R$-функцию $f$, что $f({\sigma_\Omega}') = \cap_{j\in J} f_j({\sigma_\Omega}')$ и $f(\Omega_i) = \cap_{j\in J} f_j(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.

Лемма 2. *Пусть $\varphi$ – произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция, $\mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, где $\mathfrak{F}_j = \sigma_\Omega R(f_j, \varphi)$, $j \in J$. Тогда $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$, где $f = \cap_{j\in J} f_j$.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{H} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, тогда $G \in \mathfrak{F}_j$ для всех $j \in J$. Значит, для всех $j \in J$ имеем $O^\Omega(G) \in f_j({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_j(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поэтому $O^\Omega(G) \in \cap_{j\in J} f_j({\sigma_\Omega}') =$ $= f({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \cap_{j\in J} f_j(\Omega_i) = f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}') = \cap_{j\in J} f_j({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) = \cap_{j\in J} f_j(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Отсюда для всех $j \in J$ следует, что $O^\Omega(G) \in f_j({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_j(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_j$ для всех $j \in J$, и значит, $G \in \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. □

Определение 7. *Спутник $f$ класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$ называется минимальным спутником, если $f$ является минимальным элементом множества всех спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое можество $T$-групп. Тогда $fit(\mathfrak{X})$ — пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\sigma_\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ пересечение всех $\sigma_\Omega$-расслоенных классов Фиттинга с направлением $\varphi$, содержащих $\mathfrak{X}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс $T$-групп и $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Тогда $\sigma_\Omega$-расслоенный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ обладает единственным минимальным спутником $f$ таким, что*

$$f({\sigma_\Omega}') = fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)} | G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \backslash \sigma_\Omega(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. В виду примера 2 множество $\mathfrak{C}$ является $\sigma_\Omega$-расслоенным классом Фиттинга $T$-групп с направлением $\varphi$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{C}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует, и множество $\mathfrak{L}$ всех его спутников не пусто. Обозначим через $f_1$ пересечение всех элементов из $\mathfrak{L}$. По лемме 2 $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$. Так как $f_1 \leq f_i$ для любого $f_i \in \mathfrak{L}$, то $f_1$ – наименьший элемент частично упорядоченного множества $\mathfrak{L}$ и, значит, единственный минимальный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть $f$ – $\sigma_\Omega R$-функция, указанная в заключении теоремы, и $\mathfrak{H} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $M \in \mathfrak{X}$, тогда в силу строения $f$ получим $O^\Omega(M) \in f({\sigma_\Omega}')$ и из $\sigma_\Omega(M) \subseteq \sigma_\Omega(\mathfrak{X})$ следует, что $M^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(M)$. Тогда $M \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то для любой $T$-группы $G \in \mathfrak{X}$ верно $O^\Omega(G) \in f_1({\sigma_\Omega}')$. Отсюда $f({\sigma_\Omega}') = fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1({\sigma_\Omega}')$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая $T$-группа $H \in \mathfrak{X}$, что $\Omega_i \in \sigma_\Omega(H)$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$, значит $H^{\varphi(\Omega_i)} \in f_1(\Omega_i)$. Поэтому $f_1(\Omega_i) \neq \varnothing$.

Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$ получаем $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_1(\Omega_i)$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X}) \setminus \sigma_\Omega(G)$. Тогда $G \in \mathfrak{C}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ и, значит, $G^{\varphi(\Omega_i)} = \{0\} \in f_1(\Omega_i)$. Так как $f_1(\Omega_i)$ – класс Фиттинга, то $f(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)} | G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega_i)$.

Если $\Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{X})$, то $f(\Omega_i) = \varnothing \subseteq f_1(\Omega_i)$.

Следовательно, $f \leq f_1$. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $S \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^\Omega(S) \in f({\sigma_\Omega}') \subseteq f_1({\sigma_\Omega}')$ и $S^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \subseteq f_1(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(S)$. Значит, $S \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Таким образом, из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Поэтому, $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$, и значит, $f \in \mathfrak{L}$. Так как $f_1$ – единственный минимальный элемент в $\mathfrak{L}$, то из $f \leq f_1$ следует $f = f_1$. □

Следствие 5. *Пусть $f_i$ – минимальный спутник $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}_i$ с направлением $\varphi$, где $\varphi$ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$, $\mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Покажем, что $f_1 \leq f_2$.

Так как $\mathfrak{F}_1 \subseteq \sigma_\Omega R(\mathfrak{F}_1, \varphi)$ и $\mathfrak{F}_2 \subseteq \sigma_\Omega R(\mathfrak{F}_2, \varphi)$, то по теореме 4

$$f_1({\sigma_\Omega}') = fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{F}_2) = f_2({\sigma_\Omega}'),$$

$$f_1(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)} | G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq fit(G^{\varphi(\Omega_i)} | G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\Omega_i) \text{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F}_1) \subseteq \sigma_\Omega(\mathfrak{F}_2),$$

$$f_1(\Omega_i) = \varnothing \subseteq f_2(\Omega_i), \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F}_1).$$

Следовательно, $f_1 \leq f_2$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$, $\mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$ и $f_1 \leq f_2$, т.е. $f_1({\sigma_\Omega}') \subseteq f_2({\sigma_\Omega}')$ и $f_1(\Omega_i) \subseteq f_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$, тогда $O^\Omega(G) \in f_1({\sigma_\Omega}') \subseteq f_2({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_1(\Omega_i) \subseteq f_2(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_2$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. □

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс $T$-групп. Тогда $\sigma_\Omega$-свободный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega FrR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным спутником $f$ таким, что*

$$f({\sigma_\Omega}') = fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = fit(O^{\Omega_i'}(G) | G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{X}).$$

Следствие 7. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс $T$-групп. Тогда $\sigma_\Omega$-канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega KR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным спутником $f$ таким, что*

$$f(\sigma_\Omega{}') = fit(O^\Omega(G)|G \in \mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = fit(O^{\Omega_i,\Omega_i'}(G)|G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \backslash \sigma_\Omega(\mathfrak{X}).$$

### 3.3. Внутренние спутники $\sigma_\Omega$-расслоенных классов Фиттинга $T$-групп

Определение 8. *Спутник $f$ $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}$ называется внутренним, если $f(\sigma_\Omega{}') \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Замечание 2. *Из леммы 1 следует, что каждый $\sigma_\Omega$-расслоенный класс Фиттинга $T$-групп обладает внутренним спутником.*

Дадим описание строения внутренних спутников $\sigma_\Omega$-расслоенных классов Фиттинга $T$-групп для некоторых направлений.

Следуя работе [20] введем следующее определение.

Определение 9. *Направление $\varphi$ $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп назовем:*
*1) $a$-направлением, если $\mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;*
*2) $b_{\Omega_i}$-направлением, если $\mathfrak{C}_{\Omega_i}\varphi(\Omega_i) = \varphi(\Omega_i)$ для некоторого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;*
*3) $b$-направлением, если $\mathfrak{C}_{\Omega_i}\varphi(\Omega_i) = \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;*
*4) $i_1 i_2 \dots i_k$-направлением, если $\varphi$ является $i_j$-направлением для любого $j = 1, 2, \dots, k$.*

Замечание 3. *Очевидно, что всякое $b$-направление является $a$-направлением, а направление $\varphi_1$ $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга есть $b$-направление.*

Лемма 3. *Пусть $f$ — внутренний спутник $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}$ с $ar$-направлением $\varphi$. Тогда $f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Доказательство. Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Так как $f$ — внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $f(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{C}_{\Omega_i}$ — формация, то $f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} = f(\Omega_i) \diamond \mathfrak{C}_{\Omega_i}$ является классом Фиттинга.

Допустим, что $f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} \not\subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G$ — $T$-группа с наименьшей длиной главного ряда из $f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $G$ — комонолитическая $T$-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Причем из $f(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$ по [6, лемма 2, п. 2)] $G_{f(\Omega_i)} \subseteq G_{\mathfrak{F}} = M$.

Поскольку $G \in f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} = f(\Omega_i) \diamond \mathfrak{C}_{\Omega_i}$, то $G/G_{f(\Omega_i)} \in \mathfrak{C}_{\Omega_i}$. Поэтому $G/M \cong G/G_{f(\Omega_i)}/M/G_{f(\Omega_i)} \in \mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{C}_\Omega$. По [6, лемма 2, п. 5)] имеем $O^\Omega(G) = O^\Omega(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(G) = O^\Omega(M) \in f(\sigma_\Omega{}')$.

По условию $\varphi$ является $a$-направлением, значит $\mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \varphi(\Omega_i)$. По [6, лемма 2, п. 1)] $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq G^{\mathfrak{C}_{\Omega_i}} = O^{\Omega_i}(G)$. Так как $G/G_{f(\Omega_i)} \in \mathfrak{C}_{\Omega_i}$, то $O^{\Omega_i}(G) \subseteq G_{f(\Omega_i)}$. Таким образом, $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq O^{\Omega_i}(G) \subseteq G_{f(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$.

Пусть $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G) \setminus \{\Omega_i\}$. Поскольку из $G/O^{\Omega_i}(G) = G/G^{\mathfrak{C}_{\Omega_i}} \in \mathfrak{C}_{\Omega_i}$ следует $\mathfrak{K}(G/O^{\Omega_i}(G)) \subseteq \Omega_i$, то $\Omega_j \in \sigma_\Omega(O^{\Omega_i}(G))$. Так как $\varphi$ — $r$-направление, т.е. $\varphi(\Omega_j)\mathfrak{C}_{\Omega_j'} = \varphi(\Omega_j)$ и $G/O^{\Omega_i}(G) \in \mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{C}_{\Omega_j'}$, то по [6, лемма 2, п. 9)] $G^{\varphi(\Omega_j)} = (O^{\Omega_i}(G))^{\varphi(\Omega_j)}$. Из того, что $O^{\Omega_i}(G) \in f(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $(O^{\Omega_i}(G))^{\varphi(\Omega_j)} \in f(\Omega_j)$. Следовательно, $G^{\varphi(\Omega_j)} \in f(\Omega_j)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Следовательно, $f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. □

Следствие 8. *Пусть $f$ — внутренний спутник $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}$ с $r$-направлением $\varphi$, таким что $\varphi_1 \leq \varphi$. Тогда $f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Доказательство. Пусть $\varphi$ – $r$-направление класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}$, такое что $\varphi_1 \leq \varphi$. Тогда $\varphi_1(\Omega_i) = \mathfrak{C}_{\Omega_i}\mathfrak{C}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Поскольку $\mathfrak{C}_{\Omega_i}$ и $\mathfrak{C}_{\Omega_i'}$ – классы Фиттинга, то $\mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{C}_{\Omega_i} \diamond \mathfrak{C}_{\Omega_i'} = \mathfrak{C}_{\Omega_i}\mathfrak{C}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$, отсюда $\mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Таким образом, $\varphi$ является $ar$-направлением и, по лемме 3, утверждение верно. □

Следствие 9. *Пусть $f$ — внутренний спутник $\sigma_\Omega$-канонического класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}$. Тогда $f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$ с $b_{\Omega_i}$-направлением $\varphi$, $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

*1) $O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) = G^{\varphi(\Omega_i)}$ для любой $T$-группы $G$;*

*2) $\mathfrak{F}$ обладает спутником $g$, таким что $g({\sigma_\Omega}') = f({\sigma_\Omega}')$, $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i}$ и $g(\Omega_j) = f(\Omega_j)$ для любого $\Omega_j \in \sigma_\Omega \setminus \{\Omega_i\}$.*

Доказательство. 1) Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и $O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) = R$. Тогда $R \subseteq G^{\varphi(\Omega_i)}$. Так как $\varphi(\Omega_i)$ — формация Фиттинга, то $G/G^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$. Кроме того, $G^{\varphi(\Omega_i)}/R = G^{\varphi(\Omega_i)}/O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) \in \mathfrak{C}_{\Omega_i}$. Так как $\varphi$ — $b_{\Omega_i}$-направление, то из $G/G^{\varphi(\Omega_i)} \cong G/R/G^{\varphi(\Omega_i)}/R$ имеем $G/R \in \mathfrak{C}_{\Omega_i}\varphi(\Omega_i) = \varphi(\Omega_i)$. Следовательно, $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq R$. Поэтому $R = G^{\varphi(\Omega_i)}$.

2) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(g, \varphi)$, где $g$ — $\sigma_\Omega R$-функция из заключения леммы. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Сначала покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}') = g({\sigma_\Omega}')$, $G^{\varphi(\Omega_j)} \in$ $\in f(\Omega_j) = g(\Omega_j)$ для любого $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G)\setminus\{\Omega_i\}$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} = G^{\mathfrak{C}_{\Omega_i}\varphi(\Omega_i)} = G^{\mathfrak{C}_{\Omega_i}\circ\varphi(\Omega_i)} = (G^{\varphi(\Omega_i)})^{\mathfrak{C}_{\Omega_i}} \in$ $\in f(\Omega_i)$, т.е. $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \circ \mathfrak{C}_{\Omega_i} = f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} = g(\Omega_i)$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и $G$ — $T$-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $G$ — комонолитическая $T$-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(g, \varphi)$, то $O^\Omega(G) \in g({\sigma_\Omega}') = f({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_j)} \in g(\Omega_j)$ для любого $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G)$. Если $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G) \setminus \{\Omega_i\}$, то $G^{\varphi(\Omega_j)} \in g(\Omega_j) = f(\Omega_j)$. В противном случае $G^{\varphi(\Omega_i)} \in g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} = f(\Omega_i) \circ \mathfrak{C}_{\Omega_i}$. Поэтому $(G^{\varphi(\Omega_i)})^{\mathfrak{C}_{\Omega_i}} = O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) \in f(\Omega_i)$. По п. 1) $O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) = G^{\varphi(\Omega_i)}$, значит $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$.

В любом случае $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. □

Следствие 10. *Пусть $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$ с $b$-направлением $\varphi$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

*1) $O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) = G^{\varphi(\Omega_i)}$ для любой $T$-группы $G$ и любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;*

*2) $\mathfrak{F}$ обладает спутником $g$, таким что $g({\sigma_\Omega}') = f({\sigma_\Omega}')$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Следствие 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ – $\sigma_\Omega$-канонический класс Фиттинга $T$-групп со спутником $f$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает спутником $g$, таким что $g({\sigma_\Omega}') = f({\sigma_\Omega}')$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Следствие 12. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\sigma_\Omega$-канонический класс Фиттинга $T$-групп с внутренним спутником $f$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает внутренним спутником $g$, таким что $g({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Доказательство. Пусть $f$ — внутренний спутник $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В силу леммы 1 можем считать, что $f({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$. По следствию 11 $\mathfrak{F}$ обладает спутником $g$, таким что $g({\sigma_\Omega}') = f({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. В виду следствия 9 $g$ — внутренний спутник $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. □

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\sigma_\Omega$-расслоенный класс Фиттинга $T$-групп с $br$-направлением $\varphi$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает внутренним спутником $g$, таким что*

$$g({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F},$$

$$g(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)}|G \in \mathfrak{F})\mathfrak{C}_{\Omega_i} \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F}),$$
$$g(\Omega_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F}).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\sigma_\Omega$-расслоенный класс Фиттинга $T$-групп. По теореме 4 $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным спутником $f$, таким что $f({\sigma_\Omega}') = fit(O^\Omega(G)|G \in \mathfrak{F})$, $f(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)}|G \in \mathfrak{F})$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$ и $f(\Omega_i) = \varnothing$, если $\Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$.

В виду леммы 1 класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi) = \sigma_\Omega R(h, \varphi)$, где $h({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$, $h(\Omega_i) = f(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.

Теперь, учитывая следствие 10, $\mathfrak{F}$ обладает спутником $g$, таким что

$$g({\sigma_\Omega}') = h({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F},$$
$$g(\Omega_i) = h(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} = f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} = fit(G^{\varphi(\Omega_i)}|G \in \mathfrak{F})\mathfrak{C}_{\Omega_i} \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F}),$$
$$g(\Omega_i) = h(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} = f(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i} = \varnothing\mathfrak{C}_{\Omega_i} = \varnothing, \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F}).$$

Так как $f$ — внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то, применяя замечание 3 и лемму 3, заключаем, что $g$ — внутренний спутник $\sigma_\Omega$-расслоенного класс Фиттинга $\mathfrak{F}$. □

Следствие 13. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\sigma_\Omega$-расслоенный класс Фиттинга $T$-групп с ar-направлением $\varphi$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает внутренним спутником $g$, таким что $g({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$, $g(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)}|G \in \mathfrak{F})\mathfrak{C}_{\Omega_i}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$ и $g(\Omega_i) = \varnothing$, если $\Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$.*

Следствие 14. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\sigma_\Omega$-канонический класс Фиттинга $T$-групп. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает внутренним спутником $g$, таким что $g({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$, $g(\Omega_i) = fit(O^{\Omega_i,\Omega_i'}(G)|G \in \mathfrak{F})\mathfrak{C}_{\Omega_i}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$ и $g(\Omega_i) = \varnothing$, если $\Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$.*

Определение 10. *Спутник $f$ $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}$ называется максимальным внутренним спутником, если $f$ является максимальным элементом множества всех внутренних спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.*

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\sigma_\Omega$-свободный класс Фиттинга $T$-групп. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним спутником $h$, таким что*

$$h({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F} \text{ и } h(\Omega_i) = \mathfrak{F} \text{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \sigma_\Omega FrR(h)$, где $h$ — $\sigma_\Omega R$-функция, описанная в заключении теоремы. По следствию 6 $\sigma_\Omega$-свободный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным спутником, обозначим его через $m$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Сначала покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F} = \sigma_\Omega FrR(m)$, тогда по следствию 6 и лемме 1 $O^\Omega(G) \in m({\sigma_\Omega}') \subseteq \mathfrak{F} = h({\sigma_\Omega}')$ и $O^{\Omega_i'}(G) \in m(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F} = h(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поэтому $G \in \mathfrak{H} = \sigma_\Omega FrR(h)$ и, следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и $G$ — $T$-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $G$ — комонолитическая $T$-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{H} = \sigma_\Omega FrR(h)$, то $O^\Omega(G) \in h({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$. Поэтому $O^\Omega(G) \subseteq M$ и $G/M \cong G/O^\Omega(G)/M/O^\Omega(G) \in \mathfrak{C}_\Omega$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G/M) \subseteq \sigma_\Omega(G)$. Тогда из $G \in \mathfrak{H} = \sigma_\Omega FrR(h)$ следует $O^{\Omega_i'}(G) \in h(\Omega_i) = \mathfrak{F}$. Отсюда $O^{\Omega_i'}(G) \subseteq M$ и $G/M \cong G/O^{\Omega_i'}(G)/M/O^{\Omega_i'}(G) \in \mathfrak{C}_{\Omega_i'}$; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Покажем, что $h$ — единственный максимальный внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть $g$ — внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $g({\sigma_\Omega}') \subseteq \mathfrak{F} = h({\sigma_\Omega}')$ и $g(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F} = h(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Поэтому $g \leq h$. Таким образом, $h$ — наибольший элемент частично упорядоченного множества всех внутренних спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, и, значит, $h$ — единственный максимальный внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. □

Следствие 15. *Пусть $h_i$ — максимальный внутренний спутник $\sigma_\Omega$-свободного класса Фиттинга $T$-групп $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $h_1 \leq h_2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega FrR(h_1) \subseteq \mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega FrR(h_2)$, покажем, что $h_1 \leq h_2$. По теореме 6 $h_1({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 = h_2({\sigma_\Omega}')$ и $h_1(\Omega_i) = \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 = h_2(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Следовательно, $h_1 \leq h_2$.

Достаточность. Пусть $h_1 \leq h_2$, т.е. $h_1({\sigma_\Omega}') \subseteq h_2({\sigma_\Omega}')$ и $h_1(\Omega_i) \subseteq h_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega FrR(h_1) \subseteq \mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega FrR(h_2)$. Пусть $G \in \sigma_\Omega FrR(h_1)$, тогда $O^\Omega(G) \in h_1({\sigma_\Omega}') \subseteq h_2({\sigma_\Omega}')$ и $O^{\Omega_i'}(G) \in h_1(\Omega_i) \subseteq h_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega FrR(h_2)$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. □

## 4. Заключение

Понятие $\sigma_\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп обобщает понятие $\Omega$-расслоенного класса Фиттинга $T$-групп. Дальнейшие исследования $\sigma_\Omega$-расслоенных классов Фиттинга $T$-групп могут быть продолжены в направлении изучения их произведений и решеток.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Zeitschr. 1963. Vol. 80. P. 300–305.
2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 19, iss. 3. P. 193–207.
3. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 4. С. 5–8.
4. Ведерников В. А., Сорокина М. М. $\Omega$-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144.
5. Ведерников В. А., Сорокина М. М. $\omega$-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.
6. Ведерников В. А., Демина Е. Н. $\Omega$-расслоенные формации мультиоператорных $T$-групп // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 990–1009.
7. Бажанова Е. Н., Ведерников В. А. $\Omega$-расслоенные классы Фиттинга $T$-групп // Сиб. электр. мат. известия. 2017. Т. 14. С. 629–639.
8. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2018. Vol. 1, № 34. P. 79–82.
9. Камозина О. В. $\Omega\zeta$-расслоенные классы Фиттинга // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 4. С. 424–433.
10. Камозина О. В. $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга // Чебышевский сб. 2020. Т. 21, № 4. С. 107–116.
11. Сорокина М. М., Горепекина А. А. $\overline{\omega}$-веерные формации конечных групп // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, № 3. С. 232–244.
12. Нестеров А. С., Сорокина М. М. Построение $\overline{\Omega}$-расслоенных формаций конечных групп // Ученые записки Брянского гос. ун-та. 2023. Т. 2. С. 7–12.

13. Бажанова Е. Н. Минимальные спутники $\Omega\sigma$-расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных $T$-групп // Материалы II Всероссийской научно-практической конференции «Математика в современном мире», посвященной 160-летию Д.А. Граве. Вологда: ВоГУ, 2023, С. 9–11.

14. Бажанова Е. Н., Сорокина М. М. О $\sigma_\Omega$-расслоенных классах Фиттинга $T$-групп // Материалы Междунар. науч.-практич. конф. «Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике». Брест: БрГУ, 2024, С. 6–9.

15. Higgins P. J. Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol. 6, iss. 3. P. 366–416.

16. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. СПб.: Лань, 2002. 556 с.

17. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.

18. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New Jork: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

19. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Буларуская навука, 1997. 240 с.

20. Ведерников В. А. Максимальные спутники $\Omega$-расслоенные формаций и классов Фиттинга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 55–71.

## REFERENCES

1. Gaschütz, W., 1963. “Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen”, *Math. Zeitschr.*, vol. 80, pp. 300–305.

2. Hartley, B., 1969. “On Fischer’s dualization of formation theory”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 19, iss. 3, pp. 193–207.

3. Skiba, A. N., Shemetkov, L. A., 1999. “Partially composition formations of finite groups”, *Doclady of the national academy of science of Belarus*, vol. 43, no. 4, pp. 5–8.

4. Vedernikov, V. A., Sorokina, M. M., 2001. “$\Omega$-Foliated formations and Fitting classes of finite groups”, *Discrete Math. Appl.*, vol. 11, no. 5, pp. 507–527.

5. Vedernikov, V. A., Sorokina, M. M., 2002. “$\omega$-Fibered Formations and Fitting Classes of Finite Groups”, *Mathematical Notes*, vol. 71, no. 1, pp. 39–55.

6. Vedernikov, V. A., Demina, E. N., 2010. “$\Omega$-Foliated formations of multioperator $T$-groups”, *Siberian Math. Journal*, vol. 51, no. 5, pp. 789–804.

7. Bazhanova, E. N., Vedernikov, V. A., 2017. “$\Omega$-Foliated Fitting classes of $T$-groups”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 14, pp. 629–639.

8. Skiba, A. N., 2018. “On one generalization of the local formations”, *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, vol. 1, no. 34, P. 79–82.

9. Kamozina, O. V., 2020. “$\Omega\zeta$-foliated Fitting classes”, *Izvestiya Saratovskogo universiteta novaya seriya-Matematika Mekhanika Informatika*, vol. 4, iss. 4, pp. 424–433.

10. Kamozina, O. V., 2020. “$\omega\sigma$-fibered Fitting classes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. C. 107–116.

11. Sorokina, M. M., Gorepekina, A. A., 2021. "$\overline{\omega}$-fibered formations of finite groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 232–244.

12. Nesterov, A. S., Sorokina, M. M., 2023. "Construction of $\overline{\Omega}$-foliated formations of finite groups", *Uchenie zapiski Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, vol. 2, pp. 7–12.

13. Bazhanova, E. N., 2023. "Minimal satellites of $\Omega\sigma$-foliated Fitting classes of multioperator $T$-groups", *Materiali II Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferencii «Matematika v sovremennom mire», posvyachennoi 160-letiu D.A. Grave*, Vologda: VoSU, pp. 9–11.

14. Bazhanova, E. N., Sorokina, M. M., 2024. "$\sigma_\Omega$-foliated Fitting Classes of $T$-groups", *Materiali Mezhdynarodnoi nauchno-prakticheskoi konferencii «Matematicheskoe modelirovanie i novie obrazovatelnie tehnologii v matematike»*, Brest: BSU, pp. 6–9.

15. Higgins, P. J., 1956. "Groups with multiple operators", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 6, iss. 3, pp. 366–416.

16. Kurosh, A. G., 2002. *Lectures on general algebra*, Lan, Saint-Petersburg, 556 p.

17. Shemetkov, L. A., Skiba, A. N., 1989. *Formations of algebraic systems*, Nauka, Moscow, 256 p.

18. Doerk, K., Hawkes, T., 1992. *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin, New Jork, 891 p.

19. Skiba, A. N., 1997. *Алгебра формаций*, Belarusskaya Nauka, Minsk, 240 p.

20. Vedernikov, V. A., 2001. "Maximal satellites of $\Omega$-foliated formations and Fitting classes", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 2, pp. 217–233.

Получено: 27.06.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-32-44

# О степенной сопряженности слов в группах с малым сокращением

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя

**Безверхний Владимир Николаевич** — доктор физико-математических наук, Российская таможенная академия (г. Москва).
*e-mail: vnbezv@rambler.ru*
**Безверхняя Наталия Борисовна** — кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
*e-mail: vnbezv@rambler.ru*

**Аннотация**

В статье решена проблема степенной сопряженности слов в классе малосократимых групп.

*Ключевые слова:* малосократимые группы, проблема степенной сопряженности.

*Библиография:* 9 названий.

**Для цитирования:**
Безверхний, Х.Н., Безверхняя, Н.Б. О степенной сопряженности слов в группах с малым сокращением // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 32–44.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-32-44

# On the degree conjugacy of words in groups with small reduction

V. N. Bezverkhnii, N. B. Bezverhnaya

**Bezverkhnii Vladimir Nikolaevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Russian Customs Academy (Moscow).
*e-mail: vnbezv@rambler.ru*
**Bezverhnaya Natalia Borisovna** — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communication and Informatics (Moscow).
*e-mail: vnbezv@rambler.ru*

**Abstract**

This paper solves the problem of degree conjugacy of words in a class of sparsely contractible groups.

*Keywords:* small-sized groups, the problem of degree conjugacy.

*Bibliography:* 9 titles.

**For citation:**
Bezverkhnii, V.N., Bezverhnaya, N.B. 2024, “On the degree conjugacy of words in groups with small reduction” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 32–44.

## 1. Введение

Одним из крупнейших результатов математики является доказательство П.С. Новиковым неразрешимости проблем равенства и сопряженности слов в классе конечноопределенных групп. Естественно, возникает идея о поиске классов групп, в которых эти проблемы алгоритмически разрешимы [1], [2].

М. Д. Гриндлингером был определен метрический класс групп с малым сокращением и решены в нем основные алгоритмические проблемы. [3].

Р. Линдоном был определен класс малосократимых групп [4], а именно, группы с условием $C(4)\&T(4)$, $C(6)\&T(3)$, $C(3)\&T(6)$, которые будут обозначены как группы с условием $C(p)\&T(q)$.

В данном классе групп Линдоном была доказана.

Теорема 1. [4]. В группах с условием $C(p)\&T(q)$ разрешима проблема равенства слов.

П. Шупп, используя метод диаграмм, определенный Р. Линдоном, ввел понятие кольцевых диаграмм и доказал следующую теорему.

Теорема 2. [5]. В группах с условием $C(p)\&T(q)$ разрешима проблема сопряженности слов.

В статье [7] В. Н. Безверхним было введено понятие специального сокращения, определенного для типа групп $C(p)\&T(q)$, что позволило значительно упростить решение проблем равенства и сопряженности слов для этих групп. Данный метод позволил также решить другие алгоритмические проблемы, в частности:

- проблему обобщенной сопряженности слов для групп $C(p)\&T(q)$ [8];
- доказать конечнопорожденность централизатора конечнопорожденной подгруппы $H$, $H < G$, где $G$ есть подгруппа с условием $C(p)\&T(q)$ и определен алгоритм, выписывающий его образующие [8].

Основной целью данной статьи является решение проблемы степенной сопряженности слов в группах с условием $C(4)\&T(4)$.

Определение 1. Будем говорить, что в группе $G$ разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $v, w \in G$ установить, существуют ли числа $n, m \in \mathbb{Z}$, и $z \in G$, такие что $z^{-1}w^n z = v^m$.

Очевидно, что рассматриваемая проблема является обобщением проблемы сопряженности слов.

Пусть группа $G$ имеет копредставление: $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n; r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle$.

Множество определяющих соотношений $\mathscr{R} = \left\{ r_i \mid i = \overline{1,m} \right\}$ является симметризованным множеством, если каждое $r_i \in \mathscr{R}$ циклически несократимо, и из того, что $r_i \in \mathscr{R}$ следует, что $r_i^{-1} \in \mathscr{R}$, и каждая циклическая перестановка $r_i \in \mathscr{R}$ тоже принадлежит $\mathscr{R}$.

Определение 2. Пусть $r_i = r_{i\text{л}} f, r_j = r_{j\text{л}} f$, где $r_i, r_j \in \mathscr{R}$, тогда общее слово $f$ будем называть куском определяющих соотношений $r_i, r_j$.

Определение 3. [6]. Будем говорить, что множество определяющих соотношений $\mathscr{R}$ обладает свойством $C(p)$, $(C(4))$ если любое из соотношений $r_i \in \mathscr{R}$ нельзя представить в виде произведения менее чем $p$ кусков $(p = 4)$.

Определение 4. [6]. Множество $\mathscr{R}$ удовлетворяет условию $T(q), (T(4))$ если для любых $r_1, r_2, \ldots, r_h$, где $3 \leq h < q$, таких, что последовательные элементы $r_i, r_{i+1}, 1 \leq i < h$ не являются взаимно обратными, следует, что в последовательности $r_1 r_2, r_2 r_3, \ldots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$ хотя бы одно из слов приводимо.

Из теоремы ван Кампена [6] следует, что $\forall w \in G$ не равного единице в свободной группе $F$ и равного единице в группе $G$, что существует диаграмма $M$ над $\mathscr{R}$, граничная метка которой есть слово $w$, то есть $\varphi(\partial M) = w$, где $\partial M$ - граничный цикл диаграммы $M, \varphi$ - функция, ставящая каждому ребру $l$ карты $M$ слово $\varphi(l)$ из $F$, и $\varphi(l)$ - кусок соотношения из $\mathscr{R}$.

Обозначим через $d(v)$ - степень вершины $v \in M$, то есть число ребер, инцидентных $v$. Из условия $T(4)$ следует, что степень внутренней вершины $v \in M, d(v) \geq 4$ [6].

Через $d(D)$ обозначим число ребер области $D, D \in M$ и так как группа $G$ удовлетворяет условию $C(4)$, то $d(D) \geq 4, \forall D \in M$.

Через $i(D)$ обозначим число внутренних ребер граничной области $D$, то есть области с $\partial D \cap \partial M \neq \varnothing$. Причем $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть граничного цикла $\partial M$[6, С. 332].

Пусть $\gamma \subset \partial M$, где $\gamma = e_1 \dots e_s$, причем каждое ребро $e_i, i = 1, s$, принадлежит граничному циклу некоторой области $D \subset M$, тогда метка пути $\gamma$, $\varphi(\gamma) = \varphi(e_1) \dots \varphi(e_i) \dots \varphi(e_s)$, где $\varphi(e_i), \quad i = 1, s$, является граничной меткой ребра области $D$, то есть кусок некоторого определяющего отношения $r \in \mathscr{R}$.

Обозначим через $\|\varphi(\gamma)\| = s$ число кусков, на которые граничные области разбивают путь $\gamma$.

Определение 5. Будем говорить, что слово $w = \varphi(\partial M)$ $R$ — сократимо, если существует граничная область $D \subset M$, такая что $\|\varphi(\partial D \cap \partial M)\| > i(D)$.

Определение 6. Граничную область $D$ назовем деновской, если $i(D) \leq 1$.

Определение 7. Пусть $D$ область диаграммы $M$, удовлетворяющая определению 5 или 6 , тогда удаление пути $\partial D \cap \partial M$ назовем $R$-сокращением диаграммы $M$.

Очевидно, что $R$-сокращению диаграммы $M$ соответствует сокращение слова $\varphi(\partial M) = w$, то есть замена слова $w = w_1\varphi(\partial D \cap \partial M)w_2$ равным ему в $G$ словом $w_1\varphi(\partial D \backslash (\partial D \cap \partial M))w_2$, длина которого меньше длины слова:

$$w : \|w_1\varphi(\partial D \cap \partial M)w_2\| > \|w_1\varphi(\partial D \backslash (\partial D \cap \partial M))w_2\|.$$

Определение 8. Пусть $w \in G$, если любая циклическая перестановка слова $w$ не является $R$-сократимым словом, то будем говорить, что слово $w$ циклически $R$-несократимо или $R^{**}$-несократимо.

Определение 9. [7]. Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ диаграммы $M$ над группой с условием $C(4)\&T(4)$ называется специальной полосой, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Множество $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \partial D_j\right) \cap \partial M, 1 \leq j \leq n$, связно и является последовательной частью $\partial M$;
2. $i(D_1) = i(D_n) = 2$;
3. $i(D_j) = 3, 2 \leq j \leq n-1$;
4. $\partial D_j \cap \partial D_{j+1} = e_j -$ ребро, $1 \leq j \leq n-1$;
5. $\partial D_j \cap \partial D_i = \varnothing$, при $|i-j| > 1$.

Лемма 1. [7]. Если связная, односвязная диаграмма $M$ над $\mathscr{R}$, где $\mathscr{R}$ симметризованное множество, удовлетворяющее условию $C(4)\&T(4)$ и не является $R$-сократимой, то она содержит минимум две непересекающиеся полосы.

Пусть $\Pi$ - специальная полоса диаграммы $M$, тогда число кусков в $\partial\Pi \cap \partial M$ равно $\|\varphi(\partial\Pi \cap \partial M)\|$,

Определение 10. Так как $\|\partial\Pi \cap \partial M\| > \|\partial\Pi \backslash (\partial\Pi \cap \partial M)\|$, то замену слова $\varphi(\partial M) = w_1\varphi(\partial\Pi \cap \cap \partial M)w_2$ словом $w_1\varphi(\partial\Pi \backslash (\partial\Pi \cap \partial M))w_2$ назовем $R^*$ сокращением слова $w$.

Для связных односвязных $M$-диаграмм над $\mathscr{R}$ - симметризованным множеством, удовлетворяющее условию $C(4)\&T(4)$, граничные области которого удовлетворяют неравенству [6], [7].

$$\sum_{M}^{*}(3 - i(D)) \geq 4. \tag{1}$$

Пусть слова $w, v \in G$ сопряжены в $G$. Тогда существует кольцевая $\mathscr{R}$ -диаграмма $M$ с граничными циклами $\gamma, \delta$, метки которых есть $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\delta) = v$ и $\alpha-$ минимальный путь, соединяющий вершины $O \in \gamma$ и $O' \in \delta$ такой, что $\varphi(\alpha) = z; z$ сопрягает слова $w, v$, то есть $zwz^{-1} = v$.

Рассмотрим следующий тип преобразований слова $w, w \in G$

Пусть $M$ кольцевая диаграмма с граничными циклами $\gamma, \delta$, и пусть $\varphi(\gamma) = w^n, \varphi(\delta) = v^m$, где $n$, $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $w$ и $v$ циклически $R, R^*$ и $R^{**}$ не сократимы. Пусть, однако, в произведении ...ww... есть $R^*$-сокращения. Следовательно, в диаграмме $M$ есть специальная полоса $\Pi = \bigcup_{j=1}^{k} D_j$, причем $\varphi\left(\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} D_J\right) \cap \partial M\right) = w^*$, где $w^*$ - циклическая перестановка слова $w$ и $\|w\| = \|w^*\|$, иначе слово $w$ будет циклически $R^{**}$ сократимым.

Определение 11. $R_c$-сокращением назовем преобразование диаграммы $M$, состоящее в замене $\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} D_J\right) \cap \partial M$ на $e_0\gamma_1 e_{n-1}$, см. рис. 1.

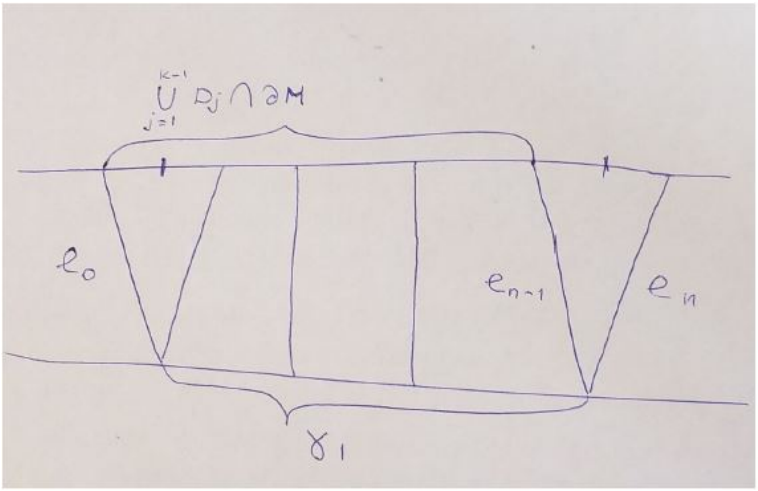



Рис.1

Отметим, что $\varphi(e_0) = \varphi(e_{n-1})^{-1}$, так как $D_1 = D_n$ и:

$$\varphi\left(\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} D_j\right) \cap \partial M\right) = \varphi(e_0)\,\varphi(\gamma_1)\,\varphi(e_0)^{-1}.$$

Следовательно слово $w^n$ заменится на более короткое слово $(\varphi(\gamma_1))^n$.

Лемма 2. [7]. Пусть слова $w, v \in G$ сопряжены в группе $G$ с условием $C(4)\&T(4)$ и $M$-кольцевая диаграмма сопряженности слов $w, v$ с граничными циклами $\gamma$ и $\delta$, метки которых есть $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$, тогда

$$\sum_{M}^{*}(3 - i(D)) = \sum_{\gamma}^{*}(3 - i(D)) + \sum_{\delta}^{*}(3 - i(D)) \geq 0 \tag{2}$$

где суммирование проводится по всем граничным областям диаграммы $M$.

Лемма 3. Пусть слова $w, v \in G$ сопряжены в группе $G$ с условием $C(4)\&T(4)$ и $M$ - кольцевая диаграмма сопряженности слов $w, v$ с граничными циклами $\gamma$ и $\delta$, метки которых есть $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$. Тогда если слова $w, v$ являются $R, R^*, R^{**}$ и $R_c$-несократимыми, то

$$\sum_{\gamma}^{*}(3 - i(D)) = \sum_{\delta}^{*}(3 - i(D)) = 0 \tag{3}$$

Доказательство. Докажем, что $\sum^*_\gamma(3-i(D))=0$. Равенство $\sum^*_\delta(3-i(D))=0$ доказывается аналогично.

Отметим, положительный вклад в сумму $\sum^*_\gamma(3-i(D))$ дают только области с $i(D)=2$. По условию слова $w,v$ являются $R,R^*,\quad R^{**}$ и $R_c$ -несократимыми, следовательно, областей с $i(D)=1$ или $i(D)=0$ быть не может.

Теперь, если в диаграмме $M$ имеется область с $i(D)>4$, граничащая с $\gamma$, (или с $\delta$) и если $\sum^*_\gamma(3-i(D))<0$, тогда по соотношению (2), $\sum^*_\delta(3-i(D))>0$. Отсюда следует, что в диаграмме $M$ число областей, граничащих с $\delta$ и имеющих внутреннюю степень $i(D)=2$, по меньшей мере на одну больше чем, число областей, дающих отрицательный вклад в $\sum^*_\delta(3-i(D))$. Но тогда в диаграмме $M$ существует полоса - противоречие с тем, что $v$ является $R^*$-несократимым.

Пусть число областей, граничащих в диаграмме $M$ с $\gamma$ и имеющих $i(D)=4$ равно $m_1$, а число областей имеющих $i(D)=2$ равно $k_1$. Аналогично, число областей граничащих в диаграмме $M$ с $\delta$ и имеющих внутреннюю степень $i(D)=4$ равно $m_2$, а число областей имеющих $i(D)=2$ равно $k_2$. Тогда

$$\sum_\gamma^*(3-i(D))=k_1-m_1,\quad \sum_\delta^*(3-i(D))=k_2-m_2 \tag{4}$$

Если $k_1-m_1\geq 1$, то $k_1\geq m_1+1$, однако в этом случае слово $\varphi(\gamma)=w$ является $R^*$ сократимым, так как в этом случае в диаграмме $M$ имеется полоса, граничная с $\gamma$.

Если же $m_1-k_1\geq 1$, то согласно неравенству (2) $k_2-m_2\geq 1$, и в диаграмме $M$ имеется полоса, граничная уже с $\delta$, что приводит к противоречию с тем, что слово $v$ является $R^*$-несократимым. Поэтому $m_1=k_1u\quad k_2=m_2$.

□

Определение 12. Диаграмма $M$ называется однослойной, если $\forall D,D\in M$, с граничными циклами $\gamma$ и $\delta$, $\quad\partial D\cap\gamma\neq\varnothing,\quad \partial D\cap\delta\neq\varnothing$ и любые две соседние области пересекаются по ребру, то есть $D_i\cap D_{i+1}=e_i$.

Лемма 4. Пусть слова $w,\ v\in G$ сопряжены в группе $G$ с условием $C(4)\&T(4)$ и $M$-однослойная кольцевая диаграмма сопряженности слов $w,\ v$ с граничннми циклами $\gamma$ и $\delta$, причем $\varphi(\gamma)=w$ и $\varphi(\delta)=v$. Слова $w,v$ являются $R,R^*,R^{**}$ и $R_c$-несократимыми. Тогда число областей с $i(D)=2$ в диаграмме $M$ вдоль границ $\gamma$ и $\delta$ одинаково, число областей с $i(D)=4$ одинаково и $\|w\|=\|v\|$.

Доказательство. Пусть слова $w,v$ удовлетворяют условиям леммы. Пусть $M$-однослойная кольцевая диаграмма сопряженности слов $w,v$ с граничными циклами $\gamma$ и $\delta$, где $\varphi(\gamma)=w$ и $\quad\varphi(\delta)=v$. Из доказательства леммы 3 следует, что число областей в диаграмме $M$ вдоль границы $\gamma$ с $i(D)=2$ и с $i(D)=4$ - одинаково, и пусть их будет $k_1,m_1$, соответственно, тогда $k_1=m_1$. Аналогично, число областей с $i(D)=2$ и с $i(D)=4$ вдоль границы $\delta$ соответственно равно $k_2,m_2,k_2=m_2$.

Покажем, что в кольцевых однослойных диаграммах $k_1=m_1=k_2=m_2$. Выделим вдоль границы $\gamma$ все области с $i(D)=2$. Очевидно, что вдоль границы $\delta$ каждая такая область имеет $i(D)=4$. С другой стороны, вдоль границы $\delta$ выделим все области с $i(D)=2$. Очевидно, что вдоль границы $\gamma$ каждая такая область имеет $i(D)=4$. Отсюда следует, что сумма слагаемых $3-i(D)$ по этим областям равна нулю. Если допустить, что существует область $D_0$, имеющая вдоль одной из границ $i\,(D_0)\geq 4$, то так как диаграмма $M$ вдоль этой границы не имеет областей с $i(D)=2$, кроме выделенных, то $D_0$ будет иметь $i\,(D_0)\geq 3$ вдоль другой границы диаграммы $M$. Тогда сумма $\sum^*_M(3-i(D))$ будет отрицательной. Поэтому, всякая область $D_0$ кроме выделенных, вдоль каждой из границ $\gamma$ и $\delta$ будет иметь $i\,(D_0)=3$. Тогда. Получаем, что $k_1=m_2,m_1=k_2$. Из леммы 3 следует, что $k_1=m_1=k_2=m_2$ и $\|w\|=\|v\|$.

□

Лемма 5. Пусть слова $w,v\in G$ с условием $C(4)\&T(4)$, являются $R,R^*,R^{**}$ и $R_c$-несократимыми. Пусть существуют число $n\in\mathbb{Z}$ и $z\in G$, такие что $z^{-1}w^nz=v^n$ и диаграмма степенной

сопряженности слов $w^n, v^n$-однослойная, тогда $\|w\| = \|v\|$.

*Доказательство.* Обозначим $a = w^n$, $b = v^m$. Очевидно, что слова $a$ и $b$ являются $R, R^*, R^{**}$ и $R_c$-несократимыми. Следовательно, по лемме 4 имеем $\|a\| = \|b\|$. Пусть $\gamma$ и $\delta$ граничные циклы диаграммы сопряженности слов $a$ и $b$, $\varphi(\gamma) = a$ и $\varphi(\delta) = b$. Тогда $\|a\| = n\|w\| = \|b\| = n\|v\|$. Отсюда следует, что $\|w\| = \|v\|$.

Определение 13. [7]. Кольцевая диаграмма $M$ с граничными циклами $\gamma$ и $\delta$ называется $n$ - слойной, если она образована однослойными кольцевыми диаграммами $K_i, 0 \le i \le n$, где $\gamma_i, \gamma_{i+1}$ - граничные циклы $K_i$ и $\gamma_i \cap \gamma_{i+1} = \varnothing$; $K_i, K_{i+1}$ имеют общий граничный цикл $\gamma_{i+1}$ причем $\gamma_0 = \gamma, \delta_0 = \delta$.

Определение 14. [7]. Кольцевая диаграмма $M$ с граничными метками $\gamma$ и $\delta$ называется $c-n-$ слойной, если при удалении всех однослойных циклических диаграмм $K_j, 0 \le j \le n$, получаем кольцевую диаграмму $\mathcal{E}$ состоящую из односвязных диаграмм $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p$, такую что любые две последовательные диаграммы $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}$ соединены простым путем, возможно равным нулю.

Лемма 6. Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$, являются $R, R^*, R^{**}$-несократимыми, и $M$ - диаграмма равенства слов $w, v$ над $G$. Пусть $\partial M = \gamma\delta$, где $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$, тогда любая внутренняя область имеет $d(D) = 4$.

Доказательство. Пусть $M$ связная и односвязная диаграмма с $M = \gamma\delta$, где $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$. Пусть $A$ и $B$, соответственно начальная и конечная вершина путей $\gamma$ и $\delta$, см. рис. 2.

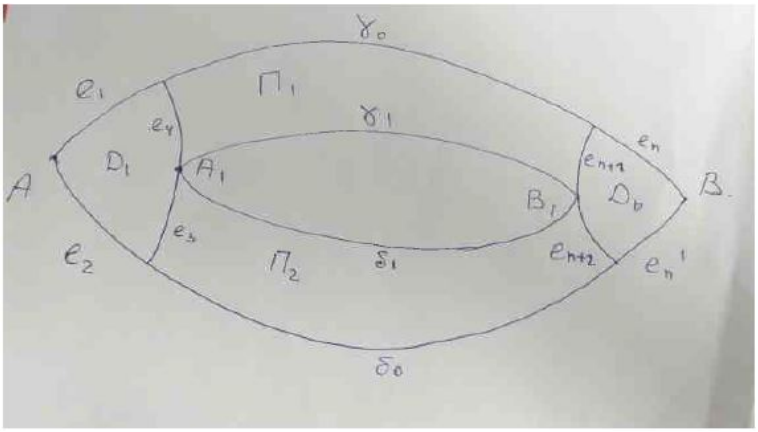



Рис.2

Пусть область $D_1, D_1 \in M$ содержит вершину $A$, а область $D_n$, $D_n \in M$ содержит вершину $B$; где $\partial D_1 \cap \gamma = e_1$, $\partial D_1 \cap \delta = e_2$, $\partial D_1 = e_1e_2e_3e_4$; $\partial D_n \cap \gamma = e_n$, $\partial D_n \cap \delta = e'_n$, $\partial D_n = e'_ne_ne_{n+1}e_{n+2}$; причем $\|e_3e_4\| = \|e_{n+1}e_{n+2}\| = 2$. [7]. Отметим, что $\gamma = e_1\gamma_0e_n$ и $\delta = e_2\delta_0e'_n$.

Пусть $A_1 = e_3 \cap e_4, B_1 = e_{n+1} \cap e_{n+2}$ и $\gamma_1$ есть путь, соединяющий $A_1$ с $B_1$. Выделим поддиаграмму $\Pi_1 = e_4\gamma_1e_{n+1}\gamma_0$ диаграммы $M$, которая содержит области, пересекающиеся как с $\gamma_0$ так и с $\gamma_1$. Аналогично, рассматриваем путь $\delta_1 \subset M$, соединяющий $A_1$ с $B_1$ и поддиаграмму $\Pi_2 = e_3\delta_0e_{n+2}\delta_1$, которая является однослойной. Если удалить из диаграммы $M$ поддиаграммы $\Pi_1$ и $\Pi_2$ получим поддиаграмму $M'$ с граничными путями $\gamma_1, \delta_1; \partial M' = \gamma_1\delta_1$ с выделенными областями $D'_1, D'_n$, где $D'_1$ содержит вершину $A_1, D_n{}'$ содержит вершину $B_1$. Рассмотрим структуру граничного слоя диаграммы $M'$. Из неравенства (1) следует, что $\sum^*_{M'}(3-i(D)) \ge 4$, причем области $D'_1, D_n{}'$ дают вклад в эту сумму каждая по единице. Если граничный слой диаграммы $M'$ содержит область с $i(D) \ge 5$, то тогда граничный слой $\gamma$ содержит не менее трех областей с $i(D) = 2$, минимум две из которых разделены только областями с $i(D) = 3$, то есть выделяется полоса, чего не может быть. Таким образом, граничный слой диаграммы $M'$ содержит кроме областей с $i(D) = 3$, только области с $i(D) = 2$, и, возможно, области

с $i(D) = 4$, причем последних должно быть на одну меньше, чем областей с $i(D) = 2$. Так как слова $w, v - R, R^*, R^{**}$ несократимы, то области с $i(D) = 2$ и области с $i(D) = 4$ должны чередоваться, следовательно, вдоль граничного цикла $\gamma_1$ число областей с $i(D) = 2$ на одну больше числа областей с $i(D) = 4$. Аналогично вдоль граничичного цикла $\delta_1$ число областей с $i(D) = 2$ на одну больше числа областей с $i(D) = 4$.

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по числу слоев в диаграмме $M'$. Предположим, что существует $D_0$ внутренняя область диаграммы $M$, с $d(D_0) \geq 5$, тогда $D_0 \in M'$. Пусть диаграмма $M'$ однослойна, тогда легко убедиться, что-либо $\varphi(\gamma)$, либо $\varphi(\delta)$ будут $R^*$-сократимыми, что противоречит условию.

Допустим, что у любой поддиаграммы диаграммы $M$ с числом слоев $k < n$, любая область имеет $d(D) = 4$. Пусть диаграмма $M'$ имеет $n$ слоев. По индуктивному предположению область $D_0$ может быть только граничной областью диаграммы $M'$ и допустим, что $\partial D_0 \cap \gamma_1 \neq \varnothing$. Причем $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| \in \{0, 1, 2\}$. Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| = 2$ тогда $i(D_0) \geq 3$, и пусть $D', \partial D' \cap \gamma_1 \neq \varnothing$, некоторая область с $i(D') = 2$, причем между областями $D'$ и $D_0$ содержатся только области $D$ с $i(D) = 3$ и $\|\partial D \cap \gamma_1\|$ – ребро. Тогда областям $D'$ и $D_0$ вдоль граничного цикла $\gamma$ диаграммы $M$ соответствуют области $\bar{D}'$ и $\bar{D}_0$ см. рис. 3, которые ограничивают полосу. Получили противоречие.

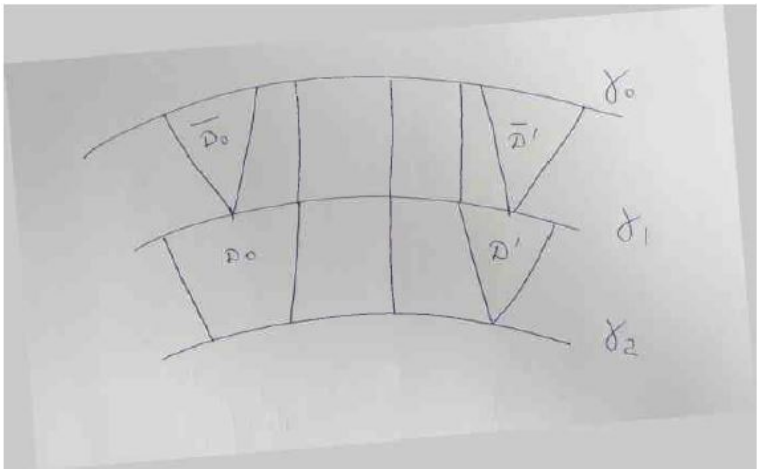



Рис.3

2) Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| = 1$ тогда $i(D_0) \geq 4$. Тогда в диаграмме $M'$ существуют две области $D', \partial D' \cap \gamma_1 \neq \varnothing$ и $D'', \partial D'' \cap \gamma_1 \neq \varnothing$, с $i(D') = i(D'') = 2$, разделенные кроме области $D_0$, только областями $D$ с $i(D) = 3$. И так как областям $D$ с $i(D) = 3$ в диаграмме $M'$ соответствуют только области с $i(D) = 3$ диаграммы $M$, то областям $D'$ и $D''$ в диаграмме $M$ соответствуют области $\bar{D}'$ и $\bar{D}''$ такие же, как и в случае 1).

3) Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma\| = 0$, то есть $\partial D_0 \cap \gamma$ есть некоторая вершина, тогда $i(D_0) \geq 5$, что невозможно, так как вдоль границы $\gamma$ в $M$ выделяется полоса.

□

Лемма 7. Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$ и являются $R, R^*, R^{**}$ и $R_c$-несократимыми. Пусть диаграмма $M$ - кольцевая диаграмма сопряженности слов $w, v$, с граничными циклами $\gamma$ и $\delta$, где $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$, тогда любая внутренняя область диаграммы $M$ имеет $d(D) = 4$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что число областей в диаграмме $M$ вдоль границ $\gamma$ и $\delta$ с $i(D) = 2$ и с $i(D) = 4$ - одинаково.

Пусть диаграмма $M$ является $n$-слойной диаграммой сопряженности, и пусть область $D_0, D_0 \in M$ является ее внутренней областью с $i(D_0) = 5$.

Пусть $K_i, 0 \leq i \leq n$ однослойная циклическая диаграмма. Пусть $K_0$ имеет граничныее циклы $\gamma_0 = \gamma$ и $\gamma_1$; причем $\varphi(\gamma_0)$ сопряжено с $\varphi(\gamma_1)$, то есть $\varphi(\gamma_0) \sim \varphi(\gamma_1)$ и $\|\varphi(\gamma_0)\| = \|\varphi(\gamma_1)\|$ (лемма 4). Аналогично, кольцевой слой $K_1$ имеет граничные циклы $\gamma_1$ и $\gamma_2$; $\varphi(\gamma_1) \sim \varphi(\gamma_2)$ и $\|\varphi(\gamma_2)\| = \|\varphi(\gamma_1)\|$. Допустим, что $D_0 \in K_1$, причем $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| \in \{0, 1, 2\}$. Как было показано выше, случай $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| = 0$ невозможен.

Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| \in \{1, 2\}$, тогда удалив из диаграммы $M$ кольцевой слой $K_0$, получим диаграмму $M'$, у которой число областей с $i(D) = 2$ равно числу областей с $i(D) = 4$. Но тогда в $K_0$ число областей $D$ с $i(D) = 2$ на одну больше числа областей с $i(D) = 4$. Поэтому $\varphi(\gamma_0)$ будет $R^*$-сократимым, что невозможно.

Пусть кольцевая диаграмма сопряжённости слов $w, v$ является $c - n-$ слойной. Выделим в ней $n$-слойные поддиаграммы сопряженности $M_0$ и $N_0$, ограничивающие кольцевую диаграмму $\mathcal{E}$ состоящую из односвязных диаграмм $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p$, соединенных последовательно простыми путями. Пусть $\gamma_l$ есть граничный цикл $M_0$ с $\mathcal{E}$, то есть $\gamma_l = M_0 \cap \mathcal{E}$ и $\delta_s$ есть граничный цикл $N_0$ с $\mathcal{E}$, то есть $\delta_s = N_0 \cap \mathcal{E}$.

Пусть $\gamma_l \neq \gamma$ и $\delta_s \neq \delta$, и пусть область $D_0, D_0 \in M$ имеет $d(D_0) > 4$. Чтобы убедится в том, что $d(D_0) = 4$ рассмотрим случай, когда $D_0$ граничит с $\gamma_l$. Пусть $D_0$ содержится в $K_l$ слое соответственно и граничит с одной из связных односвязных поддиаграмм $\mathcal{E}_i$ диаграммы $\mathcal{E}$.

Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_l\| = 1$ тогда $\|\partial D_0 \setminus (\partial D_0 \cap \gamma_l)\| \geq 4$. В этом случае в $K_l$ содержатся области $D'$ и $D''$ вдоль $\gamma_l$ с $i(D') = i(D'') = 2$. Области $D_0$, $D'$ и $D_0$, $D''$ разделены с $D_0$ только областями $D$с $i(D) = 3$. Тогда областям $D'$ и $D''$ в $\mathcal{E}_i$ соответствуют области $\bar{D}'$ и $\bar{D}''$ в $K_l$ с $i\left(\bar{D}''\right) = i\left(\bar{D}'\right) = 4$ и так как между областями $\bar{D}'$ и $\bar{D}''$ не может содержаться область с $i(D) = 2$, то данный случай невозможен.

Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_l\| \geq 2$ и $\|\partial D_0 \setminus (\partial D_0 \cap \gamma_\partial)\| \geq 3$. Области $D_0$ соответствует область $D_0', D_0' \subset \mathcal{E}_i, i(D_0') = 4$, которая является граничной областью $\mathcal{E}_i$ и так как $\mathcal{E}_i$ вдоль границы $\gamma_l$ имеет число областей $D$ с $i(D) = 2$ на одну больше числа областей с $i(D) = 4$, то с обеих сторон области $D_0'$ будут граничные области $D'$ и $D''$ с $i(D') = i(D'') = 2$. Поэтому, областям $D'$ и $D''$ в кольцевой однослойной диаграмме $K_l$ будут соответствовать области с $i(D) = 4$, причем эти области будут разделены только областями $D$ с $i(D) = 3$ вдоль границы $\gamma_l$, и так как $i(D_0) \geq 3$ получим противоречие с леммой 4.

Случай, когда $D_0 \in \mathcal{E}_i$ доказывается аналогично.

Рассмотрим теперь случай, когда область $D_0, D_0 \in M$ с $d(D_0) > 4$ будет граничить с подпутем $\bar{\gamma}_l$, граничного цикла $\gamma_l$, соединяющим поддиаграммы $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}$. Пусть $A, B$ - соответственно начальная и конечная точка пути $\bar{\gamma}_l$. Пусть для области $D_n \in \mathcal{E}_i, A \in \partial D_n$; аналогично область $D_1 \in \mathcal{E}_{i+1}$ и $B \in \partial D_1$. Пусть области $\bar{D}_n \in K_l$ и $\bar{D}_1 \in K_l$ таковы, что $D_1 \cap \bar{D}_1 = e_1 = BB_1, D_n \cap \bar{D}_n = e_n = AA_1$ и $\bar{e}_n$ - ребро области $\bar{D}_n$, соединяющее вершину $A_1$ с граничным циклом $\gamma_{l-1}$. Аналогично, $\bar{e}_1$ - ребро области $\bar{D}_1$, соединяющее вершину $B_1$ с граничным циклом $\gamma_{l-1}$. Обозначим $\bar{\gamma}_{l-1}$ подпуть граничного цикла $\gamma_{l-1}$, соединяющий конец $\bar{e}_n$ ребра с началом ребра $\bar{e}_1$. См. рис. 4.

Тогда так как слова $\varphi(\bar{e}_n)\varphi(\bar{\gamma}_{l-1})\varphi(\bar{e}_1)$ и $\varphi(e_n)\varphi(\bar{\gamma}_l)\varphi(e_1)$ являются, $R^*, R^{**}$ -несократимыми, то по лемме 6 , область $D_0$ не может иметь $d(D_0) > 4$. Остальные возможные случаи доказываются аналогично.

□

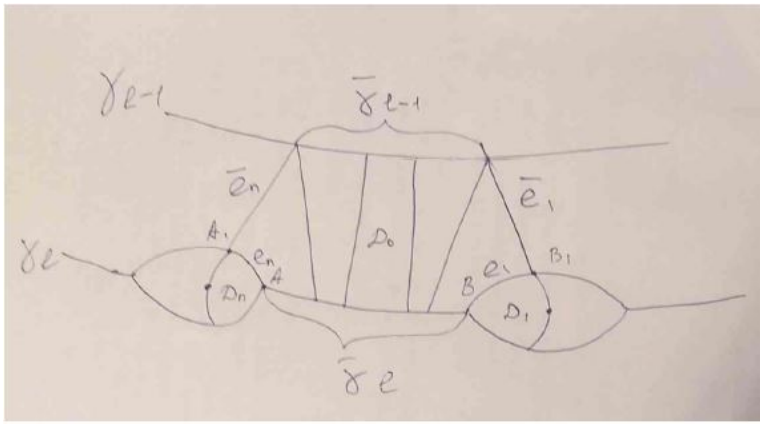



Рис.4

Лемма 8. Пусть слова $w^n, v^m$ сопряжены в группе $G$ с условием $C(4)\&T(4)$ и слова $w, v$ являются $R, R^*, \quad R^{**}$ и $R_c$-несократимыми. Пусть $M$ — диаграмма степенной сопряженности с граничными циклами $\gamma$ и $\delta$, где $\varphi(\gamma) = w^n$ и $\varphi(\delta) = \nu^m$, тогда метка граничного цикла $\gamma_i$ каждой кольцевой однослойной диаграммы $K_i, 0 \leq i \leq l$ будет $R_c$-несократимой.

Доказательство. Предположим противное.

Рассмотрим кольцевую однослойную диаграмму $K_1, \gamma = \gamma_1, \gamma_2$ - ее граничные циклы. Пусть $\gamma_2$ граничный цикл кольцевой однослойной диаграммы $K_2$ и $\varphi(\gamma_2)$ является $R_c$-сократимой, тогда в диаграмме $K_2$ имеются две области $D_1$ и $D_2$ с $i(D) = 2$, разделенные только областями с $i(D) = 3$, которым соответствуют области $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ в $K_1$ тоже с $i(D) = 2$. Но тогда либо $\varphi(\gamma) = w$ $R_c$-сократимо, либо $R, R^*$ или $R^{**}$ сократимо, что противоречит условию, либо области $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ в $K_1$ разделены областью с $i(D) = 4$, что противоречит предположению.

Пусть $\gamma_2$ граничный цикл, ограничивающий кольцевую диаграмму $\mathcal{E}$ состоящую из односвязных диаграмм $\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_2, \ldots, \quad \mathcal{E}_p$, соединенных последовательно простыми путями. Невозможность предположения о $R_c$ -сократимости слова $\varphi(\gamma_2)$ доказывается аналогично.

□

Лемма 9. Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$ и являются $R$, $R^*$, $R^{**}$ и $R_c$- несократимыми и $\|w\| = \|v\|$. Пусть существуют целые числа $n, m \in \mathbb{Z}$, и $z \in G$, такие что $z^{-1}w^n z = v^m$, тогда $n = m$.

Доказательство. Пусть $M$ - диаграмма сопряженности слов $w^n, v^m$ является $n-$ слойной диаграммой. Тогда из лемм 5-8 следует, что $n = m$.

Пусть $M$ есть $c - n$ - слойная диаграмма сопряженности слов $w^n, v^m$. Выделим в ней поддиаграммы $M_0, N_0, \mathcal{E}$, где $M_0$ и $N_0$, являются $n$ слойными диаграммами сопряженности с граничными циклами $\gamma = \gamma_0, \gamma_{l+1}$ для $M_0$ и $\delta = \delta_0, \delta_{k+1}$ для $N_0$. Тогда $\gamma_{l+1}, \delta_{k+1}$ граничные циклы диаграммы $\mathcal{E}, \boldsymbol{\varphi}(\gamma_{l+1}) = w_{l+1}^m, \boldsymbol{\varphi}(\delta_{k+1}) = v_{k+1}^n$. Слова $w_{l+1}^m, v_{k+1}^n$ являются $R, R^*, R^{**}$ и $R_c$-несократимыми, $\left\|w_{l+1}^m\right\| = m\|w\|, \left\|v_{k+1}^n\right\| = n\|v\|$ и каждая область $D$ диаграммы $\mathcal{E}$ имеет $d(D) = 4$.

Покажем, что в этом случае из структуры диаграммы сопряженности слов $w^n, v^m$ следует, что $n = m$. Доказательство проведем методом математической индукции по числу слоев диаграмме $M$. Рассмотрим случай, когда связная односвязная диаграмма, соответствующая равенству слов $\bar{w}, \bar{v}$ является однослойной. Пусть слова $\bar{w} = \bar{v}$ и $\bar{w}, \bar{v}$ являются $R, R^*, R^{**}$ и $R_c$ -несократимыми. Пусть области $D_0, D_1, \ldots, D_r$ образуют диаграмму $\mathcal{E}$, $\partial\mathcal{E} = \gamma\delta$ где $\varphi(\gamma) = \bar{w}$ и $\varphi(\delta) = \bar{v}, \forall i, 1 \leq i \leq r, \partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i, e_i-$ ребро, $e_i \in \mathcal{E}$ и $\partial D_i \cap \gamma \neq \varnothing, \partial D_i \cap \delta \neq \varnothing, 0 \leq i \leq r;$ кроме того $\forall i, 1 \leq i \leq r, d(D_i) = 4$. Пусть $\gamma = \gamma_1\gamma_c\gamma_2, \delta = \delta_1\delta_c\delta_2$, где $\gamma_1 = \gamma \cap D_0, \gamma_2 = \gamma \cap D_r, \delta_1 = \delta \cap D_0, \delta_2 = \delta \cap D_r$. При этом возможны случаи:

1. $\|\gamma_1\| = \|\gamma_2\| = 2, \|\delta_1\| = \|\delta_2\| = 1;$

2. $\|\gamma_1\| = 2, \quad \|\gamma_2\| = 1, \quad \|\delta_1\| = 1, \quad \|\delta_2\| = 2.$

В случае 1) существует область $D_i, 1 < i < r$, такая что $\|\partial D_i \cap \delta_c\| = 2$, иначе слова $\bar{w}, \bar{v}$ будут $R, R^*$ - сократимыми, что противоречит условию, следовательно $\|w\| = \|v\|$.
Для случая 2) равенство $\|w\| = \|v\|$ очевидно.
Пусть $\mathcal{E}_{ij}$ - произвольная поддиаграмма диаграммы $\mathcal{E}_i$ с числом слоев меньше, чем $n$ и $\partial\mathcal{E}_{ij} = \gamma_{i+1,i}\delta_{i+1,i}$, причем слова $\varphi(\gamma_{i+1,i}), \varphi(\delta_{i+1,i})$ являются $R, R^*, R^{**}$ и $R_c-$ несократимыми. Предположим, что $\|\gamma_{i+1,i}\| = \|\delta_{i+1,i}\|$.
Пусть диаграмма $\mathcal{E}_i$ состоит из $n$ слов и имеет следующий вид: см. рис. 5.

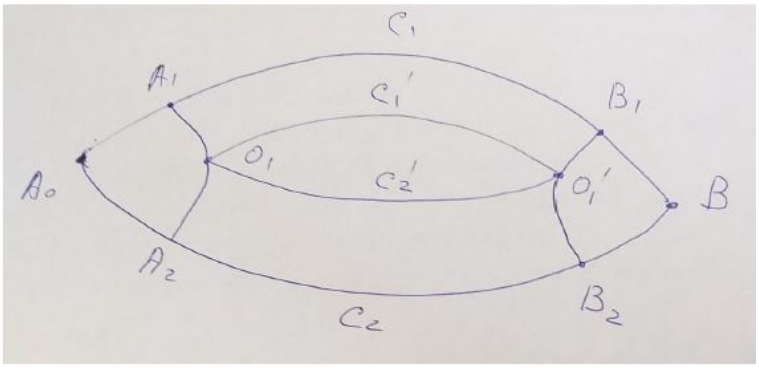



Рис.5

Рассмотрим поддиаграмму $O_1C_1'O_1'C_2'$. Она содержит меньше чем $n$ слоев, слова:

$$\varphi\left(O_1C_1'O_1'\right), \varphi\left(O_1C_2'O_1'\right),$$

которые являются $R, R^*, R^{**}$ и $R_c$ - несократимыми, в противном случае слова $\gamma_{l+1,i}, \delta_{k+1,i}$ были бы $R$, либо $R^*$, либо $R^{**}$, либо $R_c$ сократимыми. Тогда по индуктивному предположению имеем: $\|O_1C_1'O_1'\| = \|(O_1C_2'O_1')\|$.
Рассмотрим поддиаграмму $\Delta_1$ диаграммы $\mathcal{E}_i$ : $\Delta_1 = A_0A_2O_1C_1'O_1'B_2BB_1C_1A_1A_0$. Данная диаграмма является однослойной, и, как показано выше,

$$\left\|A_0A_2O_1C_1'O_1'B_2B\right\| = \|A_0A_1C_1B_1B\|.$$

Так как $\|A_0A_1\| = \|B_1B\| = \|A_1O_1\| = \|B_1O_1'\| = 1, \|A_0A_2O_1\| = \|BB_2O_1'\| = 2$, то $\|A_1C_1B_1\| = \|A_1O_1C_1'O_1'B_1\|$. Аналогично, из однослойной поддиаграммы $\Delta_2$, $\Delta_2 = A_0A_1O_1C_2'O_1'B_1BB_2C_2A_2A_0$ получаем, что $\|A_2C_2B_2\| = \|A_2O_1C_1'O_1'B_2\|$. Учитывая, что $\|A_2O_1\| = \|B_2O_1'\| = 1$, $\|A_1O_1\| = \|O_1'B_1\| = 1$ и $\|O_1C_1'O_1'\| = \|O_1C_2'O_1'\|$, получаем, что $\|A_1C_1B_1\| = \|A_2C_2B_2\|$. Из последнего равенства следует, что

$$\|A_0A_1C_1B_1B\| = \|A_0A_2C_2B_2B\|,$$

то есть $\|\gamma_{i+1,i}\| = \|\delta_{k+1,i}\|$. Остается рассмотреть слоговую длину пути $\overline{\delta}$, соединяющего, например, связные односвязные поддиаграммы $\mathcal{E}_j$, $\mathcal{E}_{j+1}$ диаграммы $\mathcal{E}$.
Пусть $\gamma_{l+1,i}^{j,j+1}$ часть границы $\gamma_{l+1,i}$ совпадающей с $\overline{\delta}$ и $\delta_{k+1,i}^{j,j+1}$ часть границы $\delta_{k+1,i}$ совпадающей с $\delta$ Очевидно, $\gamma_{l+1,i}^{j,j+1} \equiv \delta_{k+1,i}^{j,j+1}$ и $\left\|\gamma_{l+1,i}^{j,j+1}\right\| = \left\|\delta_{k+1,i}^{j,j+1}\right\|$, в противном случае в диаграмме $M$ будет находится хотя бы одна вершина $v$ с $d(v) = 3$, с чего не может быть.
Таким образом, получено, что $\|\gamma_{l+1}\| = \|\delta_{k+1}\|$. В силу лемм 4 и 5 имеем $\|\gamma\| = \|\gamma_{l+1}\|, \|\delta\| = \|\delta_{k+1}\|$, и так как $\|\gamma\| = m\|w\|$ и $\|\delta\| = n\|v\|$, то $n = m$.
□

Следовательно, при решении проблемы степенной сопряженности необходимо решить уравнение следующего вида $z^{-1}w^n z = v^n$, где $n \in \mathbb{N}$, и $z \in G$.

Теорема 3 (Основная). Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T$ (4) и являются $R, R^*, R^{**}$ и $R_c$-несократимыми и $\|w\| = \|v\|$. Тогда существует алгоритм, позволяющий определить, существуют ли $n \in \mathbb{N}$, и $z \in G$, такие что $z^{-1}w^n z = v^n$.

Доказательство. Пусть $M$ - диаграмма сопряженности с граничными циклами $\gamma$ и $\delta$, где $\varphi(\gamma) = w^n$ и $\varphi(\delta) = v^n$,

Обозначим через C множество всех кусков симметризованного множества определяющих соотношений $\mathscr{R} = \{r_i \mid i = 1, p\}$ группы $G$ с условием $C(4)\&T(4)$; через $|C|$ - мощность данного множества, через T обозначим множество всех циклически $R, R^*$, $R^{**}$ и $R_c$-несократимых слов слоговой длины $\|w\|$. Отметим, что слогами слов являются куски определяющих соотношений $\{r_i \mid i = 1, p\}$, то есть $T = \{w_i \mid \|w_i\| = \|w\|\}, |T| < |C|^{\|w_i\|}$.

Пусть $K_0, K_1, \ldots, K_t,$ где $t < |T|$ последовательность однослойных кольцевых поддиаграмм диаграммы $M$. Обозначим через $\gamma_i, \gamma_{i+1}$ граничные циклы диаграммы $K_i, \gamma_0 = \gamma, \varphi(\gamma_0) = w^n$ и $\varphi(\delta) = v^n$. Пусть $\alpha = e_1 e_2 \ldots e_t, \alpha \in M$ - минимальный путь, соединяющий вершину $O \in \gamma_0$ с вершиной $O' \in \delta, \varphi(\alpha) = \varphi(e_1)\varphi(e_2)\ldots\varphi(e_t)$ где $\varphi(e_i), 1 \le i \le t,$ кусок определяющего отношения группы $G, \varphi(\alpha) = z, z$ удовлетворяет соотношению $z^{-1}w^n z = v^n$.

Введем обозначения $\forall i, 1 \le i \le t, e_i \in \alpha, e_i \cap \gamma_{i-1} = O_{i-1}, \quad e_i \cap \gamma_i = O_i$.

Рассмотрим случай, когда $n \ge |C|$, тогда существует поддиаграмма $\Pi_0 \subset K_0$, граничные циклы которой $\partial\Pi_0 = e_1\gamma_{00}e_{01}\gamma_{01}$, где $e_{01} \in K_0$, соединяет $\gamma_0$ с $\gamma_1$, и $\varphi(e_{01}) = \varphi(e_1)^{-1}$ причем $\varphi(\gamma_{00}) = w^{n_1}, \varphi(\gamma_{01}) = w_1^{n_1}, w_1 \in T,$ где $\gamma_{00}-$ подпуть граничного цикла $\gamma_0, \gamma_{01}$ подпуть граничного цикла $\gamma_1$ и $n_1 \le |C|$.

Аналогично в кольцевой диаграмме $K_1$ выделим поддиаграмму $\Pi_1$ с граничным циклом $\partial\Pi_1 = e_2\gamma_{11}e_{12}\gamma_{12}$, где $e_2 \in \alpha, e_{12} \in K_1$ и $\varphi(e_{12}) = \varphi(e_2)^{-1}$. Причем $\gamma_{11} = \partial\Pi_1 \cap \gamma_1, \gamma_{12} = \partial\Pi_1 \cap \gamma_2$ $\varphi(\gamma_{11}) = w_1{}^{n_1 n_2}, \varphi(\gamma_{01}) = w_2{}^{n_1 n_2}$, где $w_1, w_2 \in T, n_2 \le |C|, n_1 n_2 \le |C|^2$.

Сдвинув поддиаграмму $\Pi_0$ в кольцевой диаграмме $K_0 n_2$ раза, получаем поддиаграмму $\Pi_{01}$ с граничным циклом $\partial\Pi_{01} = e_2 e_1 \gamma_{00}{}^{n_2} e'_{01} e_{12}\gamma_{12}$, где

$$e_2, e_1 \in \alpha,\ \varphi\left(e'_{01}e_{12}\right) = \varphi(e_2 e_1)^{-1} \text{ и } \varphi(\gamma_{00}{}^{n_2}) = \varphi(\gamma_{00})^{n_2},\ \varphi(\gamma_{12}) = w_2^{n_1 n_2}.$$

Выполняя указанные построения на i-шаге, построим поддиаграмму $\Pi_{0i}$.

Рассмотрим однослойную кольцевую диаграмму $K_i, K_i \subset M, i \le t$.

Выделим в ней поддиаграмму $\Pi_i$ где $\partial\Pi_i = e_{i+1}\gamma_{ii}e_{i,i+1}\gamma_{i,i+1}$ где

$$e_{i+1} \in \alpha, e_{i,i+1} \in K_i, \varphi(e_{i,i+1}) = \varphi(e_{i+1})^{-1}.$$

Причем $\gamma_{ii} = \partial\Pi_i \cap \gamma_i, \quad \gamma_{i,i+1} = \partial\Pi_i \cap \gamma_{i+1}, \varphi(\gamma_{ii}) = w_i^{n_1 n_2 \ldots n_i}, \varphi(\gamma_{i,i+1}) = w_{i+1}{}^{n_1 n_2 \ldots n_i}$, где $w_i, w_{i+1} \in T$, и для любого $j, 1 \le j \le i, n_j \le |C|$. Таким образом $n_1 n_2 \ldots n_i \le |C|^i$.

Построим поддиаграмму $\Pi_{0i}$ диаграммы $M$. Запишем ее граничный цикл:

$$\partial\Pi_{0i} = \alpha_i \gamma(\beta_i)\bar{\alpha}_i\gamma_{i,i+1},$$

где $\alpha_i = e_1 e_2 \ldots e_i, \bar{\alpha}_i = e_{01}e_{02}\ldots e_{i,i-1}e_{i,i+1}$ и $\varphi(\bar{\alpha}_i) = \varphi(\alpha_i)^{-1}, \beta_i = n_2 n_3 \ldots n_i, \gamma(\beta_i) = \gamma_{00}\beta_i$, $\varphi(\gamma(\beta_i)) = w^{n_1\beta_i}, \varphi(\gamma_{i,i+1}) = w_i^{n_1\beta_i}$, где $w_{i+1} \in T$. Получим, что $n_1\beta_i \le |C|^i$.

Из вида поддиаграммы $\Pi_{0i}$ следует, что $\varphi(\alpha_i) w^{n_1\beta_i} \varphi(\alpha_i)^{-1} = w_{i+1}^{n_1\beta_i}$.

В результате получаем, что показатель $n$ удовлетворяет соотношению $z^{-1}w^n z = v^n$ и не превосходит $|C|^{|T|}$, при этом следует заметить, что число слоев в диаграмме $M$ не превосходит $|T|$. В противном случае диаграмма $M$ содержала бы слои $K_i, K_j, j \ne i$, граничные циклы $\gamma_i, \gamma_j$ которых имели бы тождественно равные метки, записанные в кусках определяющих соотношений группы $G$. Но тогда поддиаграмму диаграммы $M$ заключенную между $\gamma_i, \gamma_j$ можно

удалить, а границы $\gamma_i, \gamma_j$ отождествить. Отсюда следует, что проблема степенной сопряженности слов в группе $G$ с условием $C(4)\&T(4)$ алгоритмически разрешима.

□

Таким образом, получаем теорему.

Теорема 4. Существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$ установить, существуют ли $n \in \mathbb{N}$, и $z \in G$, такие что $z^{-1}w^n z = v^m$.

Доказательство. Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$ являются $R$, $R^*$, $R^{**}$ и $R_c$-несократимыми и $|w| = |v|$, тогда если они удовлетворяют для некоторых $n, m \in \mathbb{Z}$, и $z \in G$ равенству $z^{-1}w^n z = v^n$, то из леммы 9 следует, что $n = m = n_0$. Из теоремы 3 , следует, что показатель $n$ ограничен и не превосходит $|C|^{|T|}$. Поэтому, чтобы установить, имеет ли место равенство $z^{-1}w^n z = v^n$ проверяем для $n_0$ где $1 \leq n_0 < |C|^{|T|}$, сопряжены ли слова $w^{n_0}$, $v^{n_0}$ в группе $G$.

Если $||w|| \neq ||v||$, то соотношение $z^{-1}w^n z = v^m$ возведем в степень $||w||||v||$, получим $z^{-1}(w^{||v||})^{n||w||}z = (v^{||w||})^{m||v||}$, и так как $||w||^{||v||} = ||v||^{||w||}$, то $n||w|| = m||v||$, и получаем выше описанный случай.

□

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Новиков, П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85. С. 709–719.

2. Новиков, П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в теории групп // Труды МИАН СССР. 1954. Т.44. С. 3–143.

3. Гриндлингер, М.Д. К проблемам тождества слов и сопряженности // Изв. АН СССР, сер. матем. 29 (1965). 245–268. [65:12, 228] (Д. 15. 4).

4. Lindon, R. On Dehns algorithm // Math. Ann. 166. 1966. Pp. 208–228.

5. Schupp, P. On Dehns algorithm and conjugacy problem // Math. Ann. 1968. 178. Pp. 119–130.

6. Линдон, Шупп, Р.П. Комбинаторная теория групп // М. Мир. 1980.

7. Безверхний, В.Н. О нормализаторах элементов в $C(p)\&T(q)$-группах // Алгоритмич. проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вузов. сб. науч. тр. Тула. 1994. С. 4–58.

8. Безверхний, В.Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов $C(p)\&T(q)$-группах // Известия Тульского гос. университета, серия «Математика». Т. 4. Тула. изд. ТулГу. 1998. С. 5–15.

9. Безверхний, В.Н., Безверхняя, Н.Б. Решение проблемы степенной сопряженности слов и проблемы степени в группах с малым сокращением // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XXII межд. конф. Тула. 26-29 мая 2023 г. С. 29–34.


## REFERENCES


1. Novikov, P.S. 1952, “On the algorithmic undecidability of the identity problem”, *Doklady AN SSSR*, Vol. 85, pp. 709–719.

2. Novikov, P.S. 1954, “On the algorithmic undecidability of the identity problem in group theory”, *Trudy MIAN SSSR*, Vol. 44, pp. 3–143.

3. Grinblinger, M.D. 1965, “On the problems of word identity and conjugacy”, *Izvestiya AN SSSR, ser. matem.*, Vol. 29, pp. 245–268.

4. Lindon, R. 1966, “On Dehn’s algorithm”, *Math. Ann.*, Vol. 166, pp. 208–228.

5. Schupp, P. 1968, “On Dehn’s algorithm and the conjugacy problem”, *Math. Ann.*, Vol. 178, pp. 119–130.

6. Lindon, R. and Schupp, P. 1980, “Combinatorial group theory”, *Moscow, Mir*.

7. Bezverkhnii, V.N. 1994, “On the normalizers of elements in $C(p)\&T(q)$-groups”, *Algorithmic problems in group theory and semigroups: International collection of scientific papers*, Tula, pp. 4–58.

8. Bezverkhnii, V.N. 1998, “Solution of the generalized conjugacy problem for words in $C(p)\&T(q)$-groups”, *Izvestiya Tula State University, Series "Mathematics"*, Vol. 4, Tula, Tula State University, pp. 5–15.

9. Bezverkhnii, V.N., Bezverkhnyaya, N.B. 2023, “Solution of the power conjugacy problem for words and the degree problem in groups with small cancellation”, *Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modeling: modern problems, applications and historical issues. Proceedings of the XXII International Conference*, Tula, May 26-29, pp. 29–34.

Получено: 12.08.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-45-56

# О свойстве антинормальности двупорожденных подгрупп свободной группы

Н. Б. Безверхняя

**Безверхняя Наталия Борисовна** — кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
*e-mail: vnbezv@rambler.ru*

**Аннотация**

Вопрос об изучении свойства антинормальности подгрупп является важным, так как это свойство используется при изучении различных свойств групп (например, гиперболичности групп) и различных алгоритмических проблем в группах.

В предлагаемой статье дано полное описание всех антинормальных двупорожденных подгрупп со определенным условием, налагаемым на образующие данной подгруппы, содержащиеся в свободной группе ранга больше единицы.

*Ключевые слова:* свободные группы, антинормальность подгрупп, алгоритмические проблемы.

*Библиография:* 7 названий.

**Для цитирования:**
Безверхняя, Н.Б. О свойстве антинормальности двупорожденных подгрупп свободной группы // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 45–45.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-45-56

# On the property of antinormality of two-born subgroups of a free group

N. B. Bezverhnaya

**Bezverhnaya Natalia Borisovna** — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communication and Informatics (Moscow).
*e-mail: vnbezv@rambler.ru*

**Abstract**

The question of studying the property of antinormality of subgroups is important, since this property is used in the study of various properties of groups (for example, hyperbolicity of groups) and various algorithmic problems in groups.

The proposed article gives a complete description of all antinormal two-generated subgroups with a certain condition imposed on the generators of this subgroup contained in a free group of rank greater than one.

*Keywords:* free groups, antinormality of subgroups, algorithmic problems.

*Bibliography:* 7 titles.

**For citation:**
Bezverhnaya, N.B. 2024, “On the property of antinormality of two-born subgroups of a free group” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 45–45.

## 1. Введение.

Определение 1. [1]. Подгруппа $H$ группы $G$ антинормальна в $G$, если для любого $z \in G \backslash H, z^{-1}Hz \cap H = E$, $E$ – единичная подгруппа.

Вопрос об определении антинормальных подгрупп в группах является весьма существенным. Свойство антинормальности играет важную роль в изучении свободных произведении с объединением. Отметим, что впервые это свойство было исследовано Б. Ньюманом [1] для групп с одним определяющим соотношением с кручением. Им было показано, что всякая магнусова подгруппа данного класса групп обладает свойством антинормальности. Изучением этого свойства для подгрупп ранга два свободных групп занимались Б. Файн, А. Мясников, Г. Розенберг [2], которые нашли необходимое и достаточное условие антинормальности этих групп:

Определение 2. [2]. Подгруппа $H$ группы $G$ называется антинормальной на образующих, если выполняются следующие условия:

Пусть $H = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ и $g \in G$, тогда если $gv_1g^{-1}, gv_2g^{-1}, \ldots, gv_ng^{-1}$, то $g \in H$.

Определение 3. Подгруппа $H$ называется изолированной в группе $G$, если $\forall w \in G$ существует $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такое, что из того, что $w^n \in H$, $(w^n \neq 1)$, следует, что $w \in H$.

Будем говорить, что подгруппа H изолирована на образующих, если $w^n \in H$, то существует образующий $v_i = w^n$, принадлежащий некоторой минимальной системе образующих подгруппы $H$ и $w \in H$. [2]

Теорема. [2]. Пусть свободная $F$ группа и пусть $H$ ее подгруппа ранга два, тогда $H$ антинормальна в $F$ тогда и только тогда, когда $H$ изолирована на образующих и антинормальна на образующих.

В данной статье автором выделен класс подгрупп ранга 2, с определенными условиями, налагаемыми на образующие, такой, что по виду образующих рассматриваемой подгруппы можно определить, является ли она антинормальной или нет.

Г. Баумслаг, А. Мясников и В. Ремесленников [3] указали алгоритм, позволяющий для свободной группы определить, является ли антинормальной ее любая конечнопорожденная подгруппа ранга больше двух.

Пусть $f$ – слово в свободной группе $F$, обозначим $f^*$ его произвольную циклическую перестановку.

В. Н. Безверхним при решении проблемы сопряженности и степенной сопряжённости слов в группах с одним определяющим соотношением Гуревича была получена и использована следующая

Лемма 1. [4]. Пусть $F = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ – свободная группа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – ее свободные образующие, $H = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \rangle$ - собственная подгруппа группы $F$, такая, что $k < n$, $f^* \notin \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ тогда, если элемент с минимален в $HcH, HcH \neq HH$ и $cHc^{-1} \cap H \neq E$, то $cHc^{-1} \cap H$ - циклическая группа.

Следствие. [4] Пусть $H = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \rangle$, $k < n$ подгруппа группы $F = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ и $f^* \notin \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$. Если для $h$ минимального в $HhH$, $HhH \neq HH$ и $hHh^{-1} \cap H$ - циклическая группа, то либо $f = w^p$ для некоторого $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и имеет место равенство.

$$hw^ph^{-1} = w^p$$

либо существует $v \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ такое, что $fv = w^p$ для некоторого $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и имеет

место равенство

$$hfvh^{-1} = vf$$

Кроме того, данная лемма использовалась при описании класса гиперболических групп в группах Гуревича [5] и групп вида

$$G = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = f(a,b)\rangle [6]$$

Отметим, что результат об алгоритмической разрешимости антинормальности подгрупп свободной группы, полученный Г. Баумслагом, А. Мясниковым и В. Ремесленниковым непосредственно следует из результата В. Н. Безверхнего [7].

## 2. Доказательство основного результата.

Пусть $F = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ свободная группа $n > 1$, $H = \langle v, w\rangle$ ее подгруппа, порожденная образующими $v$, $w$, где $v = v(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $w = w(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Пусть слова $v$, $w$ удовлетворяют условию:

$v$, $w$ - циклически несократимы и

в произведениях $v^{\varepsilon}w^{\delta}$, $w^{\delta}v^{\varepsilon}$, $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$ нет сокращений. (*)

Пусть элемент $z \cap F \setminus H$ и удовлетворяет условию:

$z$ минимален в $HzH$ и $HzH \neq HH$ (**)

Если $z$ не удовлетворяет условию (**), то используя понятие нильсеновского множества [1], всегда свободно несократимое слово $z$ можно привести к указанному виду.

Рассмотрим пересечение $zHz^{-1} \cap H$. Если $zHz^{-1} \cap H$ не является единичной подгруппой, то существует элемент $h \in H$, произвольной длины в образующих группы $H$, такой что $zhz^{-1} \in H$, то есть элемент $zhz^{-1}$ переписывается в образующих $v$, $w$.

Утверждение 1. Пусть образующие подгруппы $H = \langle v, w\rangle$, $v, w$ удовлетворяют условию (*) и $h$ некоторый элемент из подгруппы $H$, если $zxhyz^{-1} \in H$ причем $x$ и $y$ некоторые подслова образующих $v^{\pm 1}$, $w^{\pm 1}$, возможно, равные единице, и в произведениях $zx$ и $yz^{-1}$ сокращений нет, то $zxhyz^{-1} = uh_1u^{-1}$, где $u$ это образующий $v^{\pm 1}$, либо $w^{\pm 1}$.

Доказательство. Так как $zxhyz^{-1} \in H$, то $zxhyz^{-1} = uh_1\bar{u}$, где $u$ и $\bar{u}$ это образующие $v^{\pm 1}$, либо $w^{\pm 1}$. Предположим, что $\bar{u} \neq u^{-1}$, тогда так как $u = zu_{\text{п}}$ и $\bar{u} = u_{\text{л}}z^{-1}$, то в произведении $\bar{u}u$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

Следствие. Пусть в произведении $zh$ нет сокращений. Тогда если в произведении $hz^{-1}$ есть сокращения, то элемент $z^{-1}$ сокращается полностью.

Утверждение 2. Пусть $v$, $w$ – образующие подгруппы $H = \langle v, w\rangle$, $v$, $w$ удовлетворяют условию (*) и не являются словами вида

1). $v = u^k$, или $w = \bar{u}^p$

2). $v = xy$, $w = yv^px$,

3). $v = (xy)^k$, $w = (yx)^p$.

тогда если $\tilde{x}$ некоторое начальное подслово образующих $v^{\pm 1}$, $w^{\pm l}$, то $\tilde{x}v^{\pm l}\tilde{x}^{-1} \notin H$ и $\tilde{x}w^{\pm l}\tilde{x}^{-1} \notin H$.

Доказательство.

1). Рассмотрим случай $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1}$, остальные аналогичны.

а) пусть $\tilde{x}$ – начальное подслово образующего $v$, то есть $\tilde{x} = v_{\text{л}}$ и $v = v_{\text{л}}v_{\text{п}} = \overline{v}\,\overline{\overline{v}}$, где $v_{\text{п}} = \overline{v}$, тогда $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} = v_{\text{л}}v^lv_{\text{л}}^{-1} = v_{\text{л}}(\overline{v}\,\overline{\overline{v}})^lv_{\text{л}}^{-1} = v(\overline{\overline{v}}\,\overline{v})^{l-1}\overline{\overline{v}}v_{\text{л}}^{-1}$. Так как сокращений в $\overline{\overline{v}}v_{\text{л}}^{-1}$ нет (иначе $v$ циклически сократимо, либо $v$ является степенью, что противоречит условию), то по утверждению 1, $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1}$ должен заканчиваться на $v^{-1}$. Тогда $\overline{\overline{v}}v_{\text{л}}^{-1} = v_{\text{п}}^{-1}v_{\text{л}}^{-1}$, тогда $\overline{\overline{v}} = v_{\text{п}}^{-1}$ чего не может быть.

б) пусть $\tilde{x}$ – начальное подслово образующего $w$, то есть $\tilde{x} = w_л$ и $w = w_л w_п$, и если $v = \overline{v}\,\overline{\overline{v}}$, где $w_п = \overline{v}$, то тогда $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} = w_л v^l w_л^{-1} = w_л(\overline{v}\,\overline{\overline{v}})^l w_л^{-1} = w(\overline{\overline{v}}\,\overline{v})^{l-1}\overline{\overline{v}}w_л^{-1}$ По следствию утверждения 1, в произведении $\overline{\overline{v}}w_л^{-1}$ либо нет сокращений, либо $w_л^{-1}$ сокращается полностью.

Тогда если в произведении $\overline{\overline{v}}w_л^{-1}$ нет сокращений, то по утверждению 1 элемент $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1}$ должен заканчиваться на $v^{-1}$, следовательно $\ldots\overline{\overline{v}}w_л^{-1} = \ldots w^{-1} = \ldots w_п^{-1}w_л^{-1}$ и слова $\overline{\overline{v}}$ и $w_п^{-1}$ имеют общий конец, но тогда в произведении vw есть сокращения, что противоречит условию (*).

Пусть $w_л^{-1}$ сокращается полностью, тогда $w_л = v_п v^{l_1}$, где $v = v_л v_п$ и $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} = w_л(\overline{v}\,\overline{\overline{v}})^l w_л^{-1}$ $= w(\overline{\overline{v}}\,\overline{v})^{l-1}\overline{\overline{v}}w_л^{-1} = w\overline{\overline{v}}v^{l-1}w_л^{-1} = w\overline{\overline{v}}v^{l-2-l_1}v_л$. Отметим, что в произведении $w\overline{\overline{v}}v^{l-2-l_1}v_л$ сокращений нет, поэтому так как длина $|w\overline{\overline{v}}v^{l-2-l_1}v_л| = |w| + (l-2-l_l)|v| + |\overline{\overline{v}}| + |v_л|$, то если $w\overline{\overline{v}}v^{l-2-l_1}v_л \in H$, должно выполняться равенство $|\overline{\overline{v}}| + |v_л| = |v|$, либо $|\overline{\overline{v}}| + |v_л| = |w|$.

Если $|\overline{\overline{v}}| + |v_л| = |v|$, то $|\overline{\overline{v}}| = |v_п|$, следовательно, $v_п = \overline{\overline{v}}$, тогда обозначив $v_л = x$, и $v_п = y$ получим, что $v = xy$, а $w = v_п v^{l_1} w_п = y(xy)^{l_1}x = (yx)^{l_1+1}$, что противоречит условию.

Если $|\overline{\overline{v}}| + |v_л| = |w|$, то тогда $w = v_п w_п = w_л w_п$, следовательно, $v_п = w_л$ и $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} = w_л v^l w_л^{-1} = v_п(v_л v_п)^l v_п^{-1} = (v_п v_л)^l$ и $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} \in H$ только если $v = xy$, $w = yv^p x$, или $v = (xy)^k$, $w = (yx)^p$, что противоречит условию.

□

Лемма 1. Пусть образующие подгруппы $H = \langle v, w\rangle, v, w$ удовлетворяют условию (*), а элемент $z$ – условию (**), тогда если и произведении $zh$ и в произведении $hz^{-1}$ есть сокращения, то $zhz^{-1} \notin H$, ($h$ некоторый элемент из подгруппы $H$) кроме случая, когда $v = xy, w = yx$, где $x = x(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y = y(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ слова в образующих $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $zhz^{-1} \in H$, то есть элемент $zhz^{-1}$ переписывается в образующих $v, w$. Принимая во внимание условие (*) можно считать, что $h = vh_1v^{-1}$ (остальные случаи аналогичны). Тогда $zhz^{-1} = z_л v_л^{-1}v_л v_п h_1 v_п^{-1}v_л^{-1}v_л z_л^{-1} =$ $= z_л v_п h_1 v_п^{-1} z_л^{-1}$ и $h_1 \neq e$.

Утверждение 3. Элемент $h_1$ начинается на некоторый образующий $u$ из $\{v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in$ $\in \{\pm 1\}\}$, а заканчивается на $u^{-1}$.

Доказательство. Пусть $h_1 = uh_2\bar{u}$, где $u$ и $\bar{u}$ это образующие $v^{\pm 1}$, либо $w^{\pm 1}$. Предположим, что $\bar{u} \neq u^{-1}$, тогда если $|h_1| > 1$, то $z_л v_п h_1 v_п^{-1} z_л^{-1} = z_л v_п u_л u_п h_2 \bar{u}_л \bar{u}_п v_п^{-1} z_л^{-1}$ начинается на некоторый образующий из $\{\ v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\ \pm 1\}\ \}$, равный $z_л v_п u_л$ и так как в произведениях $z_л v_п$ и $v_п^{-1}z_л^{-1}$ сокращений нет, то по утверждению 1 $z_л v_п h_1 v_п^{-1} z_л^{-1}$ заканчивается на тот же образующий, только в степени -1. То есть $\bar{u}_п^{-1} = u_л$, но тогда в произведении $\bar{u}u$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

Если $|h_1| = 1$, то $z_л v_п h_1 v_п^{-1} z_л^{-1} = z_л v_п u_л u_п v_п^{-1} z_л^{-1}$, и так как в произведениях $z_л v_п u_л$ и $u_п v_п^{-1} z_л^{-1}$ нет сокращений, то по утверждению 1, $z_л v_п u_л u_п v_п^{-1} z_л^{-1}$ начинается на некоторый образующий и заканчивается на тот же образующий, только в степени -1, что невозможно.

□

*Вернемся к доказательству леммы.*

Рассмотрим элемент $zhz^{-1} = z_л v_п h_1 v_п^{-1} z_л^{-1}$, тогда по утверждению 1 элемент $z_л v_п h_1 v_п^{-1} z_л^{-1}$ начинается на образующий $u_1, u_1 \in \{v^\varepsilon, w^\delta\}, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$ и заканчивается на образующий $u_1^{-1}$. То есть $z_л v_п h_1 v_п^{-1} z_л^{-1} = u_1 x_1 h_3 x_1^{-1} u_1^{-1}$ причем $|\ h_3\ | < |\ h_1\ |$ и по утверждению 3, $x_1$ - подслово одного и того образующего из образующих $v^\varepsilon, w^\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$. Для элемента $x_1 h_3 x_1^{-1}$ справедливы утверждения 1, 3.

Тогда $zhz^{-1} = u_1 x_1 h_3 x_1^{-1} u_1^{-1} = u_1 u_2 x_2 h_4 x_2^{-1} u_2^{-1} u_1^{-1}$, где $x_2$ подслово одного из образующих $v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$, причем $h_4 \neq e$ и $|\ h_4\ | < |\ h_3\ |$.

Рассуждая аналогичным образом, получим что $zhz^{-1} = u_1 u_2 \ldots u_k x u^l x^{-1} u_k^{-1} \ldots u_2^{-1} u_1^{-1}$, где $u_1, u_2, \cdots, u_k, u \in \{v^\varepsilon, w^\delta\}, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$, $x$-подслово одного из образующих $v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$.

Если $zhz^{-1} \in H$, то так как $u_1 u_2 \cdots u_k \in H$, то элемент $xu^l x^{-1}$ тоже должен принадлежать подгруппе $H$. Но так как по утверждению 2 $xu^l x^{-1} \notin H$ следовательно, и $zhz^{-1} \notin H$.

Лемма 2. Пусть $v, w$ - образующие подгруппы $H = \langle v, w\rangle, v, w$ удовлетворяют условию (*), а элемент $z$ – условию (**), тогда если выполняются следующие условия, то $zHz^{-1} \cap H$ – циклическая подгруппа.

1). $v = u^k, w = w(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - произвольное слово от образующих $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ удовлетворяющее условию (*), $z = u^l, 2l \leqslant k$;

2). $v = (xy)^k x, w = (yx)^p y, p \in \{0, 1, 2, \ldots.\}, z = (xy)^l, 2l \leqslant k$;

3). $v = (xy)^k x, w = (yx)^l v^p (xy)^l, z = (xy)^l, 2l \leqslant k, p \in \{0, 1, 2, \ldots.\}$;

4). $v = xy, w = yv^p x, z = x$;

5). $v = (xy)^k, w = (yx)^p, z = x, p \geqslant 1, k \geqslant 1$;

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи.

**1).** Пусть $v = u^k, w = w(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - произвольное слово от образующих $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ удовлетворяющее условию (*).

Пусть $z = u^l, 2l \leqslant k$, тогда $u^l v^p u^{-l} = v^p$.

Рассмотрим произвольный элемент $h \in H$. Покажем, что если $h$ содержит образующий $w$, то $zhz^{-1} \notin H$. Пусть $h = wh_1$, тогда так как элемент $zhz^{-1} = u^l w h_1 u^{-l}$ начинается на $v$, получаем, что $v = u^k = u^l w_л$, следовательно, $w_л = u^{k-l}$ и $w = u^{k-l} w_п$, но тогда в произведении $w^{-1}v$ есть сокращения, что противоречит условию (*). Поэтому $zhz^{-1} = u^l w h_1 u^{-l} \notin H$. Если $h = v^p w h_1$, то $zhz^{-1} = zv^p z^{-1} z w h_1 z^{-1} = v^p z w h_1 z^{-1}$ и так как $u^l w h_1 u^{-l} \notin H$, то и $zhz^{-1} \notin H$, следовательно $zHz^{-1} \cap H$ – циклическая подгруппа.

Замечание. (справедливо для случаев 2)-3). Если элемент $zhz^{-1}$ принадлежит подгруппе $H$, то очевидно, что $h \neq v^{-1} h_1$.

**2).** $v = (xy)^k x, w = (yx)^p y, z = (xy)^l, 2l \leqslant k$.

Рассмотрим принадлежит ли элемент $zhz^{-1}$ подгруппе $H$.

Пусть $h = wh_1$, тогда $zhz^{-1} = zwh_1 z^{-1} = (xy)^l (yx)^p y h_1 (xy)^{-l}$ начинается на образующий $v$ и имеем $xy = yx$, что невозможно, так как противоречит условию (*).

Пусть $h = vh_1$. Тогда $zvh_1 z^{-1} = (xy)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = v(yx)^l h_1 (xy)^{-l}$.

Элемент $(yx)^l h_1 (xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий $w$, иначе, если $(yx)^l h_1 (xy)^{-l}$ начинается на $v$, то $xy = yx$, если $(yx)^l h_1 (xy)^{-l}$ начинается на $w^{-1}$, то $y = y^{-1}$, что тоже невозможно.

Пусть $h_1 = e$, тогда $(yx)^l h_1 (xy)^{-l} = (yx)^l (xy)^{-l} = (yx)^p y h_2$. Тогда, если $l \leqslant p$, то $y = y^{-1}$, что невозможно. Если же $l > p$, то тогда $h_2 = x(yx)^{l-p-1}(xy)^{-l}$, причем элемент $x(yx)^{l-p-1}(xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий $v$, что невозможно, так как $\mid x(yx)^{l-p-1}(xy)^{-l} \mid = \mid x \mid + (\mid x \mid + \mid y \mid)(2l - p - 1) < \mid v \mid = \mid x \mid + (\mid x \mid + \mid y \mid)k, 2l \leqslant k$.

Пусть $h_1 = w$, тогда $(yx)^l h_1 (xy)^l = (yx)^l (yx)^p y (xy)^{-l} = y(xy)^{l+p}(xy)^{-l} = (yx)^p y = w$ и $zvwz^{-1} = vw$, следовательно, $z(vw)^s z^{-1} = (vw)^s$.

Пусть $h = v^2 h_1$. Тогда $zv^2 h_1 z^{-1} = (xy)^l (xy)^k x (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = v(yx)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l}$. Если элемент $(yx)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l}$ начинается на образующий $w$, то $(yx)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = (yx)^p y h_2$ и если $p \geqslant l$, то либо $x = y$, либо $x = y\bar{x}$, либо $y = x\bar{y}$, что противоречит условию (*). Если $p < l$, то из $(yx)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = (yx)^p y h_2$ следует, что $(yx)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = w(xy)^{l-p-1} x (yx)^k x h_1 (xy)^{-l}$, но тогда элемент $(xy)^{l-p-1} x (yx)^k x h_1 (xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий $v$, тогда $x = y\bar{x}$, либо $y = x\bar{y}$, что противоречит условию (*).

Пусть $h = vw^{-1} h_1$.

Тогда $zvw^{-1} h_1 z^{-1} = (xy)^l (xy)^k xy^{-1} (x^{-1} y^{-1})^p h_1 (xy)^{-l} = v(yx)^l y^{-1} (x^{-1} y^{-1})^p h_1 (xy)^{-l}$, и элемент $(yx)^l y^{-1} (x^{-1} y^{-1})^p h_1 (xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий $w$, поэтому получаем, что $y^{-1} = y$, что невозможно.

Если $h = vw^2 h_1$, то $zhz^{-1} \notin H$, так как $zvw^2 h_1 z^{-1} = zvwz^{-1} zwh_1 z^{-1} = vwzwh_1 z^{-1}$ и $zwh_1 z^{-1} \notin H$.

Пусть $h = w^{-1} h_1$, тогда $zhz^{-1} = (xy)^l (y^{-1} x^{-1})^p y^{-1} h_1 (xy)^{-l}$, и в произведении $zh$ есть сокращения. Рассмотрим следующие случаи:

Если $h_1 = h_2 w$, то тогда $zhz^{-1} = (xy)^l(y^{-1}x^{-1})^p y^{-1} h_2 (yx)^p y (xy)^{-l}$ и в произведении $hz^{-1}$ тоже есть сокращения, тогда по лемме 1 $zhz^{-1} \notin H$.

Если $h_1 = h_2 w^{-1}$, то $zhz^{-1} = (xy)^l(y^{-1}x^{-1})^p y^{-1} h_2 (y^{-1}x^{-1})^p y^{-1} (xy)^{-l}$, в произведении $hz^{-1}$ нет сокращений. Получаем, что элемент $zhz^{-1}$ должен заканчиваться на образующий $v^{-1}$, тогда $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, следовательно, $xy = yx$ что невозможно, так как противоречит условию (*).

Если $h_1 = h_2 v^{\pm 1}$, то рассмотрим элемент $(zhz^{-1})^{-1} = zh^{-1}z^{-1}$, где $h^{-1}$ начинается на образующий $v^{\mp 1}$, и для которого справедливо все вышесказанное.

Таким образом, получаем, что $zhz^{-1} \in H \Leftrightarrow h = (vw)^s$.

**3).** $v = (xy)^k x, w = (yx)^l v^p (xy)^l, z = (xy)^l, 2l \leqslant k$;

Рассмотрим следующие случаи. $v^p = 1$

Пусть $h = v^2 w$.

Тогда $zhz^{-1} = zv^2 wz^{-1} = (xy)^l (xy)^k x (xy)^k x (yx)^l (xy)^l (xy)^{-l} = v(yx)^l (xy)^k x (yx)^l =$
$= v(yx)^l (xy)^l (xy)^{k-l} (xy)^l x = vw(xy)^k x = vwv$. Таким образом, $z(v^2 w)^s z^{-1} = (vwv)^s$.

Пусть $h = vwh_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zvwh_1 z^{-1} = (xy)^l (xy)^k x (yx)^l (xy)^l h_1 (xy)^{-l} = v(yx)^l (yx)^l (xy)^l h_1 (xy)^{-l}$. Элемент $(yx)^l (yx)^l (xy)^l h_1 (xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий $w$, иначе или $xy = yx$, что противоречит условию (*), или $yx = (yx)^{-1}$, что невозможно. Но тогда $(yx)^l (yx)^l = (yx)^l (xy)^l$, следовательно, $xy = yx$, что противоречит условию (*).

Пусть $h = wh_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zwh_1 z^{-1} = (xy)^l (yx)^l (xy)^l h_1 (xy)^{-l}$ , причем этот элемент должен начинаться на образующий $v$, тогда $(xy)^l (yx)^l (xy)^l h_1 (xy)^{-l} = (xy)^k x h_2 = (xy)^l (xy)^{k-1} x h_2$, следовательно, $xy = yx$, что противоречит условию (*).

Пусть $h = v^3 h_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zv^3 h_1 z^{-1} = (xy)^l (xy)^k x (xy)^k x (xy)^k x h_1 z^{-1} = v(yx)^l (xy)^k x (xy)^k x h_1 z^{-1} =$
$= v(yx)^l (xy)^l (xy)^{k-l} x (xy)^k x h_1 z^{-1} = vw(xy)^{k-l} x (xy)^k x h_1 z^{-1}$.

Элемент $(xy)^{k-l} x (xy)^k x h_1 z^{-1}$ должен начинаться на $v$. Тогда, так как $(xy)^{k-l} xxy \ldots =$
$= (xy)^{k-l} xyx \ldots$, $2l \leqslant k$ то получим, что $xy = yx$, что противоречит условию (*).

Таким образом, элемент $h$ начинаться на $v^p$, где $p > 2$, или $p = 1$, не может, равно как и на $w^{\pm 1}$ и на $vw$.

Пусть $h = v^2 w^2 h_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zv^2 w^2 h_1 z^{-1} = zv^2 wz^{-1} zwh_1 z^{-1} = vwvz(yx)^l (xy)^l h_1 z^{-1} = vwvzwh_1 z^{-1}$, но $zwh_1 z^{-1} \notin H$, следовательно, и $vwvzwh_1 z^{-1} \notin H$.

Пусть $h = v^2 w^{-1} h_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zv^2 w^{-1} h_1 z^{-1} = (xy)^l (xy)^k x (xy)^k x (y^{-1}x^{-1})^l (x^{-1}y^{-1})^l h_1 z^{-1} =$
$= v(yx)^l (xy)^l (xy)^{k-l} x (y^{-1}x^{-1})^l (x^{-1}y^{-1})^l h_1 z^{-1} = vw(xy)^{k-l} x (y^{-1}x^{-1})^l (x^{-1}y^{-1})^l h_1 z^{-1}$.

Рассмотрим элемент $(xy)^{k-l} x (y^{-1}x^{-1})^l (x^{-1}y^{-1})^l h_1 z^{-1}$. Он должен начинаться на $v$, тогда $(xy)^{k-l} xy^{-1}x^{-1} \cdots = (xy)^{k-l} xy \cdots$, из чего следует, что $y^{-1} = y$, чего не может быть.

Из всего вышесказанного получаем, что элемент $h$ может начинаться только на $v^2 w$, тогда $zhz^{-1} = zv^2 wh_1 z^{-1} = vwvzh_1 z^{-1} = vwv(xy)^l h_1 (xy)^{-l}$. Таким образом, либо $zv^2 wh_1 z^{-1} \notin H$, либо $z(v^2 w)^s z^{-1} = (vwv)^s$, тогда $zHz^{-1} \cap H$ – циклическая подгруппа.

Пусть $v^p \neq 1$. Рассмотрим элемент $h = v^2 w$.

Тогда $zhz^{-1} = (xy)^l (xy)^k x (xy)^k x (yx)^l v^p (xy)^l (xy)^{-l} = v(yx)^l (xy)^l (xy)^{k-l} x (yx)^l v^p = vwv^{p+1}$. Таким образом, $z(v^2 w)^s z^{-1} = (vwv^{p+1})^s$. Остальная часть доказательства аналогична предыдущему случаю.

**4).** $v = xy, w = yv^p x, z = x$. Рассмотрим элемент $h = w^s$.

Тогда $zhz^{-1} = zw^s z^{-1} = x(yv^p x)^s x^{-1} = (xyv^p)^s = (v^{p+1})^s$. Таким образом, $z(w)^s z^{-1} =$
$= (v^{p+1})^s$.

Пусть $h = vh_1$.

Тогда элемент $zhz^{-1} = xxyh_1x^{-1}$ должен начинаться на $v$. Тогда $xxyh_1x^{-1} = v\bar{h} = xy\bar{h}$, где $\bar{h} \in H$. Отсюда либо $x = y$, что невозможно, либо $x = y\bar{x}$, либо $y = x\bar{y}$. Если $x = y\bar{x}$, то $v = y\bar{x}y$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*). Если $y = x\bar{y}$, то $w = x\bar{y}v^px$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения. Таким образом, если $zhz^{-1} \in H$, то элемент $h$ не может начинаться на $v$.

Пусть $h = v^{-1}h_1$.

Тогда элемент $zhz^{-1} = xy^{-1}x^{-1}h_1x^{-1}$ должен начинаться на $v$. Но тогда $y^{-1} = y$, чего не может быть. Таким образом, если $zhz^{-1} \in H$, то элемент $h$ не может начинаться на $v^{-1}$.

Пусть $h = w^sh_1$.

Тогда элемент $zhz^{-1} = xw^sh_1x^{-1}$ должен начинаться на $v$. Тогда $xw^sh_1x^{-1} =$
$= x(yv^px)^sh_1x^{-1} = (v^{p+1})^sxh_1x^{-1}$. Если элемент $zhz^{-1} \in H$, то и элемент $xh_1x^{-1} \in H$. Тогда так как элемент $h_1$ не может начинаться на $v^{\pm1}$, то $h_1 = 1$ и $z(w)^sz^{-1} = (v^{p+1})^s$ и $zHz^{-1} \in H$ – циклическая подгруппа.

**5).** $v = (xy)^k, w = (yx)^p, z = x$.

Рассмотрим элемент $h = w^k$.

Тогда $zhz^{-1} = zw^kz^{-1} = x(yx)^{pk}x^{-1} = (xy)^{pk} = v^p$. Таким образом, $z(w)^kz^{-1} = v^p$ и $zHz^{-1} \in H$ – циклическая подгруппа.

Остальная часть доказательства аналогична предыдущему случаю 4.

□

Следствие. Пусть $v, w$ - образующие подгруппы $H = \langle v, w\rangle$, $v, w$ удовлетворяют условию леммы 2, тогда $zHz^{-1} \bigcap H$ – циклическая подгруппа, а именно, если

1). $v = u^k$, $w = w(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – произвольное слово от образующих $a, b$ удовлетворяющее условию (*), $z = u^l$, $2l \leqslant k$, то $u^l\langle v^p\rangle u^{-l} = \langle v^p\rangle$.

2). $v = (xy)^kx$, $w = (yx)^py$, $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $z = (xy)^l$, $2l \leqslant k$, то $z\langle(vw)^s\rangle z^{-1} = \langle(vw)^s\rangle$.

3). $v = (xy)^kx$, $w = (yx)^lv^p(xy)^l$, $z = (xy)^l$, $2l \leqslant k$, $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, то $z\langle(v^2w)^s\rangle z^{-1} =$
$= \langle(vwv^{p+1})^s\rangle$.

4). $v = xy$, $w = yv^px$, $z = x$, то $z\langle(w)^s\rangle z^{-1} = \langle(v^{p+1})^s\rangle$.

5). $v = (xy)^k$, $w = (yx)^p$, $z = x$, $p \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, то $z\langle(w)^k\rangle z^{-1} = \langle v^p\rangle$.

Лемма 3. Пусть $v, w$ - образующие подгруппы $H = \langle v, w\rangle$, $v, w$ удовлетворяют условию (*), а элемент z – условию (**), и слова $v$ и $w$ не имеют вид 1) – 5). тогда $zHz^{-1} \bigcap H = \mathrm{E}$.

Доказательство.

Пусть слова $v$ и $w$ не имеют вид 1) – 5). Покажем, что тогда $zHz^{-1} \bigcap H = \mathrm{E}$, то есть $zHz^{-1} \notin H$. Другими словами, элемент $zHz^{-1}$ не переписывается в образующих $v$ и $w$. Пусть $z$ есть начальное подслово образующего $v$, то есть $z = v_л$, где $v = v_лv_п$ и $\mid v_л \mid \leqslant \mid v_л \mid$. Случай, когда $z$ есть начальное подслово образующего $w$ – аналогичен. Элемент $h$ может начинаться на $v$ или $w$. Отметим, что на $v^{-1}$ он начинаться не может, так как тогда получим, что $v_лv_п = v_лv_п^{-1}$, следовательно, $v_п = v_п^{-1}$,чего не может быть.

Так как по условию $v \neq xy$ и $w \neq yx$ одновременно, то если произведениях $zh$ и $hz^{-1}$ есть сокращения, то по лемме 1 $zhz^{-1} \notin H$, поэтому будем считать, что в произведении $zh$ сокращений нет. (Второй случай аналогичен).

Рассмотрим следующие случаи:

I. Элемент $h$ начинается на $v$, то есть $h = vh_1$.

Пусть тогда элемент $zhz^{-1} = v_лv_лv_пh_1v_л^{-1} = h^* \in H$. Так как $h^* \in H$, то $h^*$ должен начинаться на образующий $v$. Если же он начинается на образующий $w^\delta, \delta = \pm1$, то тогда получаем, что $v = v_лv_п$, $w^\delta = v_лw_п$, следовательно, в произведении $v^{-1}w^\delta$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

Таким образом, $v_лv_лv_пh_1v_л^{-1} = v_лv_п\bar{h}_1$ и $\mid v_л \mid \leqslant \mid v_п \mid$. Теперь, если $\mid v_л \mid = \mid v_п \mid$, то $v_л = v_п$ и $v = v_л^2$, $z = v_л$ и мы имеем уже рассмотренный случай 1).

Пусть $|v_л| < |v_п|$. Тогда $zhz^{-1} = v_л v_л v_п h_1 v_л^{-1} = v_л v_п \bar{h}_1$, следовательно, $v_п = v_л v_{пп}$, если $|v_{пп}| > |v_л|$, то в общем случае имеем $v = v_л^k \bar{v}_{пп}$, где $|\bar{v}_{пп}| < |v_л|$.

Тогда $v_л \underbrace{v_л \dots v_л}_{k \text{ раз}} \bar{v}_{пп} \dots = \underbrace{v_л \dots v_л}_{k \text{ раз}} \bar{v}_{пп} \dots$, следовательно, $v_л = \bar{v}_{пп} v_c$. Тогда $v = (\bar{v}_{пп} v_c)^k \bar{v}_{пп}$, обозначив $\bar{v}_{пп} = x$, $v_c = y$, получим, что $v = (xy)^k x$, $z = (xy)^l, 2l \leqslant k$. Таким образом, если элемент $h$ начинается на $v$, и $v$ не является истинной степенью, то $zhz^{-1}$ переписывается в образующих $v$ и $w$, тогда и только тогда, когда $v = (xy)^k x$, $z = (xy)^l, 2l \leqslant k$.

$$zhz^{-1} = (xy)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = (xy)^k x (yx)^l h_1 (xy)^{-l} = v(yx)^l h_1 (xy)^{-l}.$$

Рассмотрим элемент $\tilde{h} = (yx)^l h_1 (xy)^{-l}$. Он может начинаться только на образующий $w$. Иначе, имеем либо $v$ является истинной степенью, либо $y^{-1} = y$, чего не может быть. Тогда $w = (yx)^l w_п$.

Если $h_1 = 1$, тогда $\tilde{h} = (yx)^l (xy)^{-l} = w$, что противоречит условию (*).

Пусть $h_1 \neq 1$.

А) пусть в произведении $h_1 (xy)^{-l}$ нет сокращений, тогда по утверждению 1 $zhz^{-1}$ заканчивается на $v^{-1}$. Тогда $zhz^{-1} = v(yx)^l h_1 (xy)^{-l} = v(yx)^l h_2 (yx)^{-l} v^{-1}$, (утверждение 3). Если $zhz^{-1} \in H$, то и $(yx)^l h_2 (yx)^{-l} \in H$.

Рассмотрим элемент $(yx)^l h_2 (yx)^{-l}$, который должен начинаться на образующий $w$. Так как в произведениях $(yx)^l h_2 (yx)^{-l}$ нет сокращений, то по утверждению 1 он заканчивается на $w^{-1}$.

Тогда $zhz^{-1} = vwx_1 h_2 x_1^{-1} w^{-1} v^{-1}$, где $x_1$ – есть подслово образующих $v$ или $w$. Очевидно, что $h_2 \neq 1$. Отметим, что $|h| > |h_1| > |h_2|$.

Рассуждая аналогичным образом, получим что $zhz^{-1} = u_1 u_2 \dots u_k \tilde{x} u^l \tilde{x}^{-1} u_k^{-1} \dots u_2^{-1} u_1^{-1}$, где $u_1, u_2, \dots, u_k, u \in \{v^\varepsilon, w^\delta\}, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$, $\tilde{x}$ подслово одного из образующих $v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$.

Если $zhz^{-1} \in H$, то так как $u_1 u_2 \dots u_k \in H$, то элемент $\tilde{x} u^l \tilde{x}^{-1}$ тоже должен принадлежать подгруппе $H$. Но тогда по утверждению 2 $\tilde{x} u^l \tilde{x}^{-1} \notin H$, следовательно, и $zhz^{-1} \notin H$.

Б) пусть в произведении $h_1 (xy)^{-l}$ есть сокращения, тогда по следствию утверждения 1 элемент $(xy)^{-l}$ сокращается полностью. Тогда $zhz^{-1} = v(yx)^l h_1 (xy)^{-l} = v(yx)^l h_2 u (xy)^l (xy)^{-l} = v(yx)^l h_2 u$, где $u$ - начальное подслово образующего из $\{v^{\pm 1}, w^{\pm 1}\}$.

Если $zhz^{-1} \in H$, то и $(yx)^l h_2 u \in H$. Очевидно, что элемент $(yx)^l h_2 u$ начинается на образующий $w$ и $w = (yx)^l w_п$.

Покажем, что $u$ - начальное подслово образующего $w$. Действительно, если $u$ – есть подслово образующего $v$, то $v$ циклически сократимо, если $u$ – есть подслово образующего $v^{-1}$, то $(xy)^{-1} = xy$, чего не может быть если $u$ – есть подслово образующего $w^{-1}$, то $w = v_л^{-1} w_п$ и в произведении $vw$ есть сокращения, что противоречит условию (*). Таким образом, $u = (yx)^l w_c$, причем $w_c$ может равняться единице, тогда $w = (yx)^l (xy)^l$ и имеем случай 3) при $p = 0$.

Пусть $w = (yx)^l w_c (xy)^l$ и $w_c \neq 1$.

Пусть $h_2 = 1$, тогда $(yx)^l u = (yx)^l (yx)^l w_c = (yx)^l w_c (xy)^l$, следовательно, $(yx)^l w_c = w_c (xy)^l$ и $w_c = (yx)^m y$, [1] тогда $w = (yx)^l (yx)^m y (xy)^l = (yx)^{2l+m} y$ – это уже рассмотренный случай 2).

Пусть $h_2 \neq 1$, тогда $(yx)^l h_2 u = (yx)^l h_2 (yx)^l w_c = \bar{h} \in H$, причем элемент $\bar{h}$ должен начинаться на образующий $w$. Нетрудно показать, что $h_2$ должен начинаться на образующий $v$. Действительно, на $v^{-1}$ и $w^{-1}$ элемент $h_2$ начинаться не может. Пусть $h_2$ начинается на $w = (yx)^l w_c (xy)^l$. Тогда $(yx)^l h_2 (yx)^l w_c = (yx)^l (yx)^l w_c (xy)^l h_3 (yx)^l w_c = (yx)^l w_c (xy)^l \dots$, следовательно $(yx)^l w_c = w_c (xy)^l \Rightarrow w_c = (yx)^s y$ и мы имеем случай 2).

Аналогичным образом можно доказать, что элемент $\bar{h}$ должен заканчиваться на образующий $v$.

Тогда должны выполняться следующие соотношения

$$\bar{h} = (yx)^l w_c (xy)^l \dots = (yx)^l (xy)^k x \dots \Rightarrow w_c (xy)^l \dots = (xy)^k x \dots \qquad (1)$$

$$\bar{h} = \cdots (yx)^l w_c = \cdots (xy)^k x \tag{2}$$

Если $w_c = v^p$, то имеем случай 3), если $w_c = v^p \bar{w}_c$ причем $p$ может равняться нулю. Тогда для слова $\bar{w}_c$ имеем следующие возможности: $\bar{w}_c \in \{x_л, x, xy_л, (xy)^s, (xy)^s x_л\}$. Рассмотрим эти возможности:

**1.** $\bar{w}_c = x_л$, из соотношения (2) имеем $\bar{w}_c = x_п$.

а) пусть $|x_л| < \frac{|x|}{2}$, тогда $\bar{w}_c = x_л = x_п$, следовательно, $x = x_л x_с x_л$, теперь из (1) получим $x_л x_л x_с x_л y = x_л x_с x_л y x_л$, и так как $|x_л x_л x_c| = |x_л x_c x_л|$, то $x_л x_л x_c = x_л x_c x_л$ и $x_л y = y x_л$ следовательно, $y = x_л y_п$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

б) пусть $|x_л| = \frac{|x|}{2}$, то есть $x = x_л^2$, тогда из (1) получим $x_л x_л x_л y = x_л x_л y x_л$, следовательно, $y = x_л y_п$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

в) пусть $|x_л| > \frac{|x|}{2}$, тогда $x_л = \bar{x}\bar{\bar{x}}$, $x_п = \bar{\bar{x}}\tilde{x}$, тогда $x = \bar{x}\bar{\bar{x}}\tilde{x}$ и из соотношения (1) получим что $\bar{x}\bar{\bar{x}}\bar{x}\bar{\bar{x}}\tilde{x}y = \bar{x}\bar{\bar{x}}\tilde{x}y\bar{x}\bar{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x}\bar{\bar{x}}\tilde{x}y = \tilde{x}y\bar{x}\bar{\bar{x}}$ и так как $|\bar{x}| = |\tilde{x}|$, то $\bar{x} = \tilde{x}$ и $\bar{x}\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}\bar{x}$, но тогда $\bar{x} = c^\alpha$, $\bar{\bar{x}} = c^\beta$, $x = c^{2\alpha+\beta}$, $v = (c^{2\alpha+\beta}y)^k c^{2\alpha+\beta}$. [1] Кроме того $y = c^\alpha y_п$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*). Таким образом получаем, что случай $w_c = x_л$ невозможен.

**2.** $\bar{w}_c = x$. Из (1) получим $xxy = xyx \Rightarrow xy = yx$, тогда образующий $v$ является истинной степенью, и мы имеем случай 1).

**3.** $\bar{w}_c = xy_л$. Из соотношения (2) получаем, что $\bar{w}_c = y_п x$, причем $xy_л = y_п x$ и $|y_л| = |y_п|$. Из (1) получим $xy_л xy = xyxy_л \Rightarrow xy_л y_п = y_п xy_л$ и так как $xy_л = y_п x$, получаем, что $xy_л y_п = y_п xy_л \Rightarrow y_п xy_п = y_п xy_л \Rightarrow y_п = y_л$, но тогда так как элемент $x$ имеет общее начало с элементом $y_п = y_л$, получим, что образующие $v$ и $w$ имеют общее начало и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

**4.** $\bar{w}_c = (xy)^s, s \leqslant k$. Из соотношения (2) получаем, что $\bar{w}_c = (yx)^s \Rightarrow xy = yx$ чего не может быть.

**5.** $\bar{w}_c = (xy)^s x_л$. Из соотношения (2) получаем, что $\bar{w}_c = x_л(yx)^s$, тогда имеем $\bar{w}_c = x_л x_п y \ldots x_л x_п y x_л = x_п y x_л \ldots x_л x_п y x_л x_п$, следовательно $x_л x_п y = x_п y x_л$ (начало) и $x_п y x_л = y x_л x_п$ (конец), но тогда $x_л x_п y = y x_л x_п \Rightarrow xy = yx$ чего не может быть.

Таким образом, для слова $w_c$ есть только три возможности: $w_c = 1$ или $w_c = v^p$, и имеем случай 3), и $w_c = (yx)^m y$ – это случай 2). Все они исключены условием леммы, поэтому здесь $zHz^{-1} \cap H = \mathrm{E}$.

II. Элемент $h$ начинается на $w$, то есть $h = wh_1$.

Тогда элемент $zhz^{-1} = v_л w h_1 v_л^{-1} = h^* \in H$. Так как $h^* \in H$, то $h^*$ должен начинаться на образующий $v$, иначе получим противоречие условию (*).

Тогда $zhz^{-1} = v_л w h_1 v_л^{-1} = v_л v_п \ldots$, обозначим $v_л = x, v_п = y$ , тогда $v = xy, w = yw_п$.

Тогда $zhz^{-1} = xyw_п h_1 x^{-1}$.

Покажем, что $h_1 \neq 1$. Действительно, если $h_1 = 1$, то $zhz^{-1} = xyw_п x^{-1} = vw_п x^{-1}$, причем $w_п x^{-1} \in H$. Если в произведении $w_п x^{-1}$ нет сокращений, либо слова и $w_л$ и $x^{-1}$ сокращаются не полностью, то тогда по утверждению 1 $w_п x^{-1}$ заканчивается на образующий $v^{-1}$ и чего не может быть.

Если в произведении $w_п x^{-1}$ одно из слов $w_п$ и $x^{-1}$ сократилось полностью, то тогда если $w_п x^{-1} = \bar{x}^{-1}$, то $\bar{x}^{-1} \in H \Leftrightarrow \bar{x}^{-1} = w$, но тогда $x^{-1} = w_п^{-1} w$, следовательно $x = w_п^{-1} y^{-1} w_п$ и в произведении $wv$ будут сокращения;

если $w_п x^{-1} = \bar{w}_п$, то $\bar{w}_п \in H \Leftrightarrow \bar{w}_п = v^p$ и $v = xy, w = yv^p x$, имеем рассмотренный случай 4).

если $w_п x^{-1} = 1$, то $v = xy, w = yx$, имеем рассмотренный случай 5).

Таким образом, $h_1 \neq 1$ и $zhz^{-1} = xyw_п h_1 x^{-1} = vw_п h_1 x^{-1} = h^* \in H$.

А). Пусть в произведении $h_1 x^{-1}$ нет сокращений, тогда по утверждению 1 элемент $h^*$ заканчивается на образующий $v^{-1}$, то есть $vw_п h_1 x^{-1} = vw_п h_2 u v^{-1}$, где $u$ – есть подслово

образующих $v^{\pm 1}$ или $w^{\pm 1}$. Рассмотрим элемент $w_{\text{п}}h_2u$. Если $zhz^{-1} \in H$, то и $w_{\text{п}}h_2u \in H$.

Покажем, что $u = w_{\text{п}}^{-1}$. Элемент $h_1$ может заканчиваться на образующие $v^{\pm 1}$, $w^{\pm 1}$. Рассмотрим эти варианты.

Пусть $h_1 = h_2v$, тогда $w_{\text{п}}h_2uv^{-1} = w_{\text{п}}h_2xyx^{-1} = w_{\text{п}}\dots y^{-1}x^{-1}$, следовательно, $y^{-1} = y$, чего не может быть.

Пусть $h_1 = h_2v^{-1}$, тогда $w_{\text{п}}h_2uv^{-1} = w_{\text{п}}h_2y^{-1}x^{-1}x^{-1} = \cdots y^{-1}x^{-1}$, отсюда $y^{-1} = \bar{y}^{-1}x^{-1}$, так как $|y| \geqslant |x|$. Получаем, что $y = x\bar{y}$, следовательно, $v = xy = x^2\bar{y}, w = x\bar{y}w_{\text{п}}$, но тогда в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

Пусть $h_1 = h_2w$, тогда $w_{\text{п}}h_2uv^{-1} = w_{\text{п}}h_2yw_{\text{п}}x^{-1} = \cdots y^{-1}x^{-1}$, отсюда следует, что $w$ циклически сократимо, что противоречит условию (*). Таким образом $h_1 = h_2w^{-1}$, $u = w_{\text{п}}^{-1}$ и $w_{\text{п}}h_2u = w_{\text{п}}h_2w_{\text{п}}^{-1}$. Очевидно, что $h_2 \neq 1$.

Рассмотрим элемент $zhz^{-1} = xyw_{\text{п}}h_1x^{-1} = vw_{\text{п}}h_1x^{-1} = vw_{\text{п}}h_2uv^{-1} = vw_{\text{п}}h_2w_{\text{п}}^{-1}v^{-1} \in H$, тогда $w_{\text{п}}h_2w_{\text{п}}^{-1} \in H$, причем $|h| > |h_1| > |h_2|$, и в произведениях $w_{\text{п}}h_2$ и $h_2w_{\text{п}}^{-1}$ нет сокращений, тогда рассуждая аналогичным образом, получим что $zhz^{-1} = u_1u_2\dots u_k\tilde{x}u^l\tilde{x}^{-1}u_k^{-1}\dots u_2^{-1}u_1^{-1}$, где $u_1, u_2, \dots, u_k, u \in \{v^{\varepsilon}, w^{\delta}\}, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}, \tilde{x}$ подслово одного из образующих $v^{\varepsilon}, w^{\delta}, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$.

Если $zhz^{-1} \in H$, то так как $u_1u_2\dots u_k \in H$, то элемент $\tilde{x}u^l\tilde{x}^{-1}$ тоже должен принадлежать подгруппе $H$. Но тогда по утверждению 2 $\tilde{x}u^l\tilde{x}^{-1} \notin H$, следовательно, и $zhz^{-1} \notin H$.

Б) пусть в произведении $h_1x^{-1}$ есть сокращения, тогда по следствию утверждения 1 элемент $x^{-1}$ сокращается полностью. Тогда $vw_{\text{п}}h_1x^{-1} = vw_{\text{п}}h_2u$, где $u$ – есть подслово образующих $v^{\pm 1}$ или $w^{\pm 1}$. Нетрудно показать, что $u$ – есть начальное подслово образующего $w$, то есть $u = yw_c$, тогда $w = yw_cx$. Если $w_c = 1$, или $w_c = v^p$, то имеем случай 5) или 4) соответственно.

Пусть $w_c \neq 1$, тогда $w_{\text{п}}h_2u = w_{\text{п}}h_2yw_c = w_cxh_2yw_c$ и $w_cxh_2yw_c$ должно принадлежать подгруппе $H$.

Пусть $w_cxh_2yw_c = \tilde{h} \in H$. Тогда $|\tilde{h}| = |h_2| + 2|w_c| + |x| + |y|$. Возможны следующие случаи: $|\tilde{h}| = |h_2| + |w| + |w_c|$ или $|\tilde{h}| = |h_2| + |v| + 2|w_c|$.

Так как $\tilde{h} \in H$, то тогда $\tilde{h} = v^{\alpha_1{}'}w^{\beta_1{}'}\dots v^{\alpha_{\text{к}}{}'}w^{\beta_{\text{к}}{}'}s$, причем $v^{\alpha_1{}'}$ и $w^{\beta_{\text{к}}{}'}$ могут быть равными и единице, и $v^{\alpha_1{}'}w^{\beta_1{}'}\dots v^{\alpha_{\text{к}}{}'}w^{\beta_{\text{к}}{}'} \in H$, кроме того выполняется условие $|s| = |w_c|$ или $|s| = 2|w_c|$. Так как $\tilde{h} \in H$, то элемент $s$ должен переписываться в образующих $v^{\varepsilon}$, $w^{\delta}$. Причем, если $|s| = |w_c|$, $s = w_c$.

Рассмотрим эти случаи.

$s = w_c$, тогда $s \in H$ тогда и только тогда, когда $s = v^p$, $p \geqslant 1$, а это случай 4).

Пусть $|s| = 2|w_c|$.

Тогда, либо $s = v^p$, либо $s = w$, либо $s = v^pw$, либо $s = wv^p$.

Пусть $s = v^p$. $2|w_c| = (|x| + |y|)^p, p \geqslant 1$.

Пусть $p = 1$, тогда $2|w_c| = |x| + |y|$ и так как по условию (**) $|x| \leqslant |y|$, то $|x| \leqslant |w_c| \leqslant |y|$, следовательно, $s = y_{\text{п}}w_c$, $y = y_{\text{л}}y_{\text{п}}$ и $|w_c| = |y_{\text{п}}|$. Очевидно, что $s = y_{\text{п}}w_c = v = xy$. Отсюда получаем, что $y_{\text{п}}w_c = xy_{\text{л}}y_{\text{п}}$, следовательно, $w_c = y_{\text{п}}$ и $xy_{\text{л}} = y_{\text{п}}$ и имеем, что $w_c = xy_{\text{л}}$, тогда $w = yw_cx = (y_{\text{л}}x)^3, v = (xy_{\text{л}})^2$, то есть имеет место случай 5).

Пусть $p > 1$ , если $p = 2q$, то $2|w_c| = 2q(|x| + |y|) \Rightarrow |w_c| = q(|x| + |y|)$, тогда $w_c = v^q$, что сводится к случаю 4).

Пусть $p = 2q + 1$, тогда $s = uw_c = (xy)^{2q+1}$, причем $|u| = |w_c|$. Тогда $w_c = y(xy)^q$, либо $w_c = y_{\text{п}}(xy)^q$. Если $w_c = y(xy)^q$, то $|x| = |y|$, и так как $\tilde{h} = w_cxh_2yw_c$, то $x = y$, чего не может быть. Пусть $|x| < |y|$, тогда $w_c = y_{\text{п}}(xy)^q$, причем $|y_{\text{п}}| = |xy_{\text{л}}|$, тогда $s = \bar{u}yy_{\text{п}}(xy)^q = \bar{u}yy_{\text{п}}v^q$, где $u = \bar{u}y$, и рассмотрим элемент $s_1 = \bar{u}yy_{\text{п}}$. Очевидно, что он не может заканчиваться на $v^{-1}$ и $w^{-1}$. На $w$ он тоже заканчиваться не может, так как тогда слова $v$ и $w$ имели бы общий конец $y_{\text{п}}$, что противоречит условию (*). Пусть $s_1$ заканчивается на $v$, тогда так как $|y_{\text{п}}| = |xy_{\text{л}}|$, то имеем $y_{\text{п}} = xy_{\text{л}} \Rightarrow y = y_{\text{л}}xy_{\text{л}}$, $w_c = xy_{\text{л}}(xy_{\text{л}}xy_{\text{л}})^q$ и $w = y_{\text{л}}xy_{\text{л}}xy_{\text{л}}(xy_{\text{л}}xy_{\text{л}})^qx = (y_{\text{л}}x)^{q_1}$, $v = (xy_{\text{л}})^2$ и опять имеем случай 4).

Пусть $\tilde{h} = w_cxh_2yw_c = v^{\alpha_1{}'}w^{\beta_1{}'}\dots v^{\alpha_{\text{к}}{}'}w^{\beta_{\text{к}}{}'}s$ и $s = w$. Тогда либо $s = xyw_c = yw_cx = w$, либо $s = y_{\text{п}}yw_c = yw_cx = w$.

Пусть $s = xyw_c = yw_cx$, следовательно, $x = c^\alpha$, $yw_c = c^\beta$ [1] образующие $v$ и $w$ имеют общее начало, что противоречит условию (*).

Пусть $s = y_\text{п}yw_c = yw_cx$, тогда $y_\text{п}yw_c = yw_cx \Rightarrow y_\text{п}y_\text{л}y_\text{п}w_c = y_\text{л}y_\text{п}w_cx$, причем $|y_\text{п}| = |x|$. Тогда, так как $y_\text{п}y_\text{л} = y_\text{л}y_\text{п}$, то $y_\text{л} = c^\alpha$, $y_\text{п} = c^\beta$ и $y = c^{\alpha+\beta}$. [1]

Тогда $c^{\alpha+\beta}c^\beta w_c = c^{\alpha+\beta}w_cx \Rightarrow c^\beta w_c = w_cx$, но тогда $c^\beta = (rd)^\gamma$, $x = (dr)^\gamma$, $w_c = (rd)^\delta s$ и $w = (rd)^\mu s$, $v = (ds)^\gamma(sd)^\gamma$, [1] а есть случай 3) с точностью до перестановки образующих. Следовательно, не только $s \neq w$, но и элемент $s$ оканчиваться на образующий $w$ не может, таким образом, случай $s = v^pw$ тоже невозможен.

Пусть $s = wv^p$, тогда $s = uw_c = w(xy)^p = yw_cx(xy)^p = \cdots yw_c$, причём $|uw_c| = 2|w_c|$, следовательно, $|yw_cx(xy)^p| = 2|w_c| \Rightarrow |(xy)^{p+1}| = |w_c|$. Тогда, так как $yw_cx(xy)^p = \cdots yw_c$, то $w_c = \bar{w_c}x(xy)^p$, причем $|\bar{w_c}| = |y|$. Следовательно, $yw_cx(xy)^p = y\bar{w_c}x(xy)^px(xy)^p = \cdots y\bar{w_c}x(xy)^p$, и так как $|\bar{w_c}| = |y|$, то $y = \bar{w_c}$, тогда $y\bar{w_c}x(xy)^{p-1}x = \cdots y$, таким образом, $y_\text{п} = x$, и образующие $v$ и $w$ имеют общий конец, что противоречит условию (*).

Таким образом, кроме случаев, исключенных условием, $zHz^{-1} \cap H = \text{E}$.

□

Из доказательства лемм 2-3 следует.

Теорема. Пусть $F = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ свободная группа, $H = \langle v, w\rangle$ ее подгруппа, порожденная образующими $v$, $w$, где $v = v(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $w = w(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Пусть $v$, $w$ - образующие подгруппы $H = \langle v, w\rangle$ свободной группы удовлетворяют условию (*), а элемент $z$ – условию (**), то подгруппа $H$ не является антинормальной в $F$ тогда и только тогда, когда

1). $v = u^k, w = w(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - произвольное слово от образующих $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ удовлетворяющее условию (*), $z = u^l, 2l \leqslant k$;

2). $v = (xy)^kx, w = (yx)^py$, то есть $vw = (xy)^{k+p+1} = u^s$, $z = (xy)^l$, $2l \leqslant k$;

3). $v = (xy)^kx$, $w = (yx)^lv^p(xy)^l$, $z = (xy)^l$, $2l \leqslant k$;

4). $v = xy$, $w = yv^px$, $z = x$;

5). $v = (xy)^k$, $w = (yx)^p$, $z = x$, $p \geqslant 1$, $k \geqslant 1$;

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Линдон, Р., Шупп, П. Комбинаторная теория групп // М.: Мир. 1980.

2. Fine, B., Myasnikov, A., Rosenberger, G. Malnormal subgroups of free groups // Communication in Algebra. 2002. Vol. 30. No. 9. P. 4155-4164.

3. Безверхний, В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в одном классе групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1991. С. 4-38.

4. Безверхний, В.Н., Безверхняя, Н.Б. О гиперболичности некоторых групп с одним определяющим соотношением // Чебышевский сборник. Труды IV межд. конф. Совр. проблемы теории чисел и ее приложения. 2001. Т. 2. С. 5-13.

5. Bezverkhnii, V.N., Bezverkhnaya, N.B. Generalization of one theorem of Newman // International conference “Process management and scientific development”. Birmingham, United Kingdom, 2020. С. 199-209.

6. Baumslag, G., Myasnikov, A., Remeslennikov, V. Malnormality is decidable in free groups // International Journal of Algebra and Computation. 1999. Vol. 09. No. 06.

7. Безверхний, В.Н. О пересечении конечно-порожденных подгрупп свободной группы // Сборник научных трудов кафедры высшей математики. 1974. Вып. 2. С. 51-56.

## REFERENCES

1. Lyndon, R., Shupp, P. 1980, "Combinatorial theory of groups", *Moscow: Mir*.

2. Fine, B., Myasnikov, A., Rosenberger, G. 2002, "Malnormal subgroups of free groups", *Communication in Algebra*, vol. 30, no. 9, pp. 4155-4164.

3. Bezverkhny, V.N. 1991, "Solving the problem of conjugacy of words in one class of groups", *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups*, pp. 4-38.

4. Bezverkhny, V.N., Bezverkhnyaya, N.B. 2001, "On the hyperbolicity of some groups with one defining relation", *Chebyshev collection. Proceedings of the IV International Conference. Modern problems of number theory and its applications*, vol. 2, pp. 5-13.

5. Bezverkhnij, V.N., Bezverkhniaia, N.B. 2020, "Generalization of one theorem of Newman", *International conference «Process management and scientific development»*, Birmingham, United Kingdom, pp. 199-209.

6. Baumslag, G., Myasnikov, A., Remeslennikov, V. 1999, "Malnormality is decidable in free groups", *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 09, no. 06.

7. Bezverkhny, V.N. 1974, "On the intersection of finitely generated subgroups of a free group", *Collection of scientific papers of the Department of Higher Mathematics*, issue 2, pp. 51-56.

Получено: 23.08.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-57-73

# О нулях периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя[1]

Вит. В. Волчков, Г. В. Краснощёких

**Волчков Виталий Владимирович** — доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет» (г. Донецк).
*e-mail: volna936@gmail.com*
**Краснощёких Глеб Витальевич** — аспирант, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет» (г. Донецк).
*e-mail: wolverimred@mail.ru*

**Аннотация**

В статье изучаются множества единственности для решений уравнения свертки Бесселя $f \overset{\alpha}{\star} g = 0$, $\alpha \in (-1/2, +\infty)$. Показано, в частности, что если $g = \chi_r$ – индикатор отрезка $[-r, r]$, а чётная функция $f \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет уравнению $f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0$ и равна нулю на $(r-\varepsilon, r)$ или $(r, r+\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$. При этом интервал нулей $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, вообще говоря, расширить нельзя. Установлено, что подобное явление имеет место и для решений уравнения $f \overset{\alpha}{\star} \delta_r = 0$, где $\delta_r$ – чётная мера, сопоставляющая чётной непрерывной функции $\varphi$ на $\mathbb{R}$ число $\varphi(r)$. Найдены приложения этих результатов к теоремам единственности для сходящихся последовательностей линейных комбинаций функций Бесселя, теоремам о нулевых множествах для решений задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и теоремам о замыкании обобщенных сдвигов.

*Ключевые слова:* обобщенная свертка, сферическое преобразование, множества единственности, теоремы о замыкании сдвигов, лакунарные ряды.

*Библиография:* 34 названия.

**Для цитирования:**
Вит. В. Волчков, Г. В. Краснощёких. О нулях периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 57–73.

[1]Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124012400352-6).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-57-73

# On the zeros of mean-periodic functions with respect to the Bessel convolution

Vit. V. Volchkov, G. V. Krasnoschekikh

**Volchkov Vitaly Vladimirovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Donetsk National University (Donetsk).
*e-mail: volna936@gmail.com*
**Krasnoschekikh Gleb Vitalyevich** — postgraduate student, Donetsk National University (Donetsk).
*e-mail: wolverimred@mail.ru*

**Abstract**

In paper, we study uniqueness sets for solutions to the Bessel convolution equation $f \overset{\alpha}{\star} g = 0$, $\alpha \in (-1/2, +\infty)$. It is shown, in particular, that if $g = \chi_r$ is an indicator function of the segment $[-r, r]$, and an even function $f \in C(\mathbb{R})$ satisfies the equation $f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0$ and is zero on $(r-\varepsilon, r)$ or $(r, r+\varepsilon)$ for some $\varepsilon > 0$, then $f = 0$ on $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$. In this case, the interval of zeros $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, cannot generally be extended. It has been established that a similar phenomenon occurs for solutions of the equation $f \overset{\alpha}{\star} \delta_r = 0$, where $\delta_r$ is an even measure that maps an even continuous function $\varphi$ on $\mathbb{R}$ to a number $\varphi(r)$. Applications of these results to uniqueness theorems for convergent sequences of linear combinations of Bessel functions, the zero set theorem for solutions of the Cauchy problem of the generalized Euler-Poisson-Darboux equation and the closure theorem of generalized shifts are found.

*Keywords:* generalized convolution, spherical transformation, uniqueness sets, shift closure theorems, lacunar series.

*Bibliography:* 34 titles.

**For citation:**
Krasnoschekikh, G.V., Volchkov, Vit.V. 2024, "On the zeros of mean-periodic functions with respect to the Bessel convolution" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 57–73.

## 1. Введение

Первоначально понятие периодической в среднем функции (псф) было введено Ж. Дельсартом [1]. В дальнейшем оно варьировалось в работах разных авторов [2], [3], [4, § 11, п. 3], [5, § 2].

Пусть $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ – пространство распределений на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ называется периодической в среднем относительно ненулевого распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, если $f$ является решением уравнения свёртки

$$f * T = 0.$$

Некоторые свойства псф похожи на соответствующие свойства обычных периодических функций на вещественной оси. Так, скажем, ненулевые псф не стремятся к нулю на бесконечности и

не принадлежат пространству $L^p(\mathbb{R})$ при $1 \le p < \infty$ [2, § 8, § 18]. Кроме того, отсутствие у непостоянной непрерывной функции двух несоизмеримых периодов имеет следующую аналогию для псф: если функция $f$ периодична в среднем относительно распределений $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ и преобразования Фурье $\widehat{T}_1, \widehat{T}_2$ не имеют общих нулей на $\mathbb{C}$, то $f = 0$. Это утверждение широко известно под названием теоремы Л. Шварца о спектральном анализе [5, § 2].

Ряд авторов изучали множества единственности для различных классов псф и их обобщений. К указанному направлению исследований относятся теорема Титчмарша о свёртке [6, гл. XI, § 11.11], различные теоремы об однозначном определении псф по своим значениям вблизи выпуклой оболочки носителя $T$ [7, гл. VI], [8], [9, теорема 8], [10, § 3], [11, гл. 5], [12, § 6], [13, часть 3, §§ 1.3, 2.3], [14, часть III], [15]–[17], теорема Э. Т. Квинто о множествах единственности ядра обобщенного преобразования Помпейю с аналитическим весом [18], проблема Ж. П. Кахана о возможной длине "люка" (интервала нулей) у ненулевых функций из заданного подпространства, инвариантного относительно сдвигов [4, § 11, п. 3], проблема Ю. И. Любича о существовании для псф множеств единственности специального вида [19], [20], [14, теорема 8.7], проблема о структуре спектра псф, удовлетворяющих условиям единственности типа Ф. Йона [13, часть 2, гл. 4, проблема 4.3], [14, §§ 14.2, 15.3, 16.2], [21], [22]. В этой связи также отметим теоремы об однозначном определении некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними по своим значениям на тощих множествах [13, часть 2, § 1.5, следствие 1.4], [23, часть II, гл. 3, теорема 3.5], [24, теорема 3], изучение множеств единственности ядра преобразования Радона на сферах [13, часть 5, § 1.3], [23, часть II, § 7.5], [25, теорема 4], описание различных классов псф, равных нулю в некотором шаре [14, теоремы 14.10, 15.8, 16.5, 17.7], [21], теоремы о кольцевых областях единственности псф [14, следствия 14.2, 15.3], [26], и теорему единственности Д. А. Зарайского [27] для одномерных уравнений свёртки специального вида, в которой множеством единственности является объединение произвольно малых окрестностей двух точек, находящихся на расстоянии, равном длине носителя свёртывателя. Полученные результаты оказались важными ввиду их многочисленных применений в экстремальных задачах интегральной геометрии, в теории лакунарных рядов, в теории дифференциальных уравнений с частными производными, а также при изучении различных классов псф и их обобщений [7], [10], [13], [14], [23], [27].

В работе [28] исследовались структурные свойства псф, связанных с операторами обобщенного сдвига. В частности, был установлен локальный аналог известной теоремы Л. Зальцмана о двух радиусах на гипергруппе Бесселя-Кингмана. Доказательство более сильного варианта теоремы о двух радиусах, полученного авторами в [29], существенно опиралось на теорему единственности для решений уравнения свёртки Бесселя

$$f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0, \tag{1}$$

где $\alpha \in (-1/2, +\infty)$, $\chi_r$ – индикатор отрезка $[-r, r]$ (см. теорему 2 и лемму 14 в [29]).

Здесь мы продолжаем изучение нулевых множеств для решений уравнения (1), а также уравнения

$$f \overset{\alpha}{\star} \delta_r = 0, \tag{2}$$

где $\delta_r$ – чётная мера, сопоставляющая чётной непрерывной функции $\varphi$ на $\mathbb{R}$ число $\varphi(r)$. Показано, в частности, что если чётная функция $f \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет (1) и равна нулю на $(r-\varepsilon, r)$ или $(r, r+\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$. При этом интервал нулей $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, вообще говоря, расширить нельзя. Установлено, что подобное явление имеет место и для решений уравнения (2). Найдены приложения этих результатов к теоремам единственности для сходящихся последовательностей линейных комбинаций функций Бесселя, теоремам о нулевых множествах для решений задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и теоремам о замыкании обобщенных сдвигов.

## 2. Формулировки основных результатов

Всюду в дальнейшем считаем, что $\alpha$ – фиксированное число из промежутка $(-1/2, +\infty)$. Пусть $L_{\natural,\alpha}(I_R)$ и $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ – классы чётных комплекснозначных функций на промежутке $I_R = (-R, R)$, соответственно суммируемых и локально суммируемых по мере

$$d\mu_\alpha(x) = |x|^{2\alpha+1}dx,$$

$C^k_\natural(I_R)$ – множество всех чётных $k$ раз непрерывно дифференцируемых функций на $I_R$, $\mathcal{D}_\natural(I_R)$ – совокупность всех функций класса $C^\infty_\natural(I_R)$ с компактным носителем. Множество $\mathcal{D}_\natural(I_R)$ является топологическим векторным пространством с обычной топологией. Обозначим через $\mathcal{D}'_\natural(I_R)$ пространство всех чётных распределений на $I_R$, т.е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}_\natural(I_R)$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'_\natural(I_R)$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}_\natural(I_R)$ будем записывать $\langle f, \varphi\rangle$. Пространство $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ вкладывается в $\mathcal{D}'_\natural(I_R)$, если для $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ и $\varphi \in \mathcal{D}_\natural(I_R)$ положить

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_0^R f(x)\varphi(x)d\mu_\alpha(x).$$

Пусть $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R})$ – множество всех распределений класса $\mathcal{D}'_\natural(\mathbb{R})$ с компактным носителем. Для $g \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R})$ положим

$$r(g) = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} g \subset \overline{I}_r\}$$

($\operatorname{supp} g$ – носитель распределения $g$, $\overline{I}_r = [-r, r]$). Если $f \in \mathcal{D}'_\natural(I_R)$ и $R > r(g)$, то свёртка Бесселя $f \overset{\alpha}{\star} g$ определяется как распределение из $\mathcal{D}'_\natural(I_{R-r(g)})$, действующее по правилу

$$\langle f \overset{\alpha}{\star} g, \varphi\rangle = \Big\langle f(x), \big\langle g(y), T^\alpha_x\varphi(y)\big\rangle\Big\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_\natural(I_{R-r(g)}),$$

где

$$T^\alpha_x\varphi(y) = c_\alpha \int_0^\pi \varphi\big(\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\theta}\big)(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta, \tag{3}$$

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(\alpha+\frac{1}{2}\big)} \quad (\Gamma \text{ — гамма-функция}).$$

Основные свойства этой свёртки содержатся в [28, §§ 2, 3].

В случае, когда $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$ и $g$ – чётная комплексная мера Радона на $\mathbb{R}$ с носителем в $\overline{I}_{r(g)} \subset I_R$, имеем $f \overset{\alpha}{\star} g \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_{R-r(g)})$ и

$$(f \overset{\alpha}{\star} g)(y) = \int_0^{r(g)} \big(T^\alpha_y f\big)(x)dg(x), \quad y \in I_{R-r(g)}. \tag{4}$$

При этом, если $g \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(\mathbb{R})$ и $r(g) < R$, то

$$(f \overset{\alpha}{\star} g)(y) = \int_0^{r(g)} \big(T^\alpha_y f\big)(x)g(x)d\mu_\alpha(x), \quad y \in I_{R-r(g)}. \tag{5}$$

Отметим также, что оператор $f \to f \overset{\alpha}{\star} g$ коммутирует с дифференциальным оператором Бесселя

$$L_\alpha = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x}\frac{d}{dx}, \tag{6}$$

т.е.

$$L_\alpha(f \overset{\alpha}{\star} g) = (L_\alpha f) \overset{\alpha}{\star} g = f \overset{\alpha}{\star} (L_\alpha g) \quad \text{на} \quad I_{R-r(g)}. \tag{7}$$

Для $0 < r < R$ определим классы $V_r(I_R)$ и $U_r(I_R)$ равенствами

$$V_r(I_R) = \{f \in L^{1,\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R) : f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0 \ \text{ на } \ I_{R-r}\},$$

$$U_r(I_R) = \{f \in L^{1,\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R) : f \overset{\alpha}{\star} \delta_r = 0 \ \text{ на } \ I_{R-r}\}.$$

Положим

$$V_r^\infty(I_R) = V_r(I_R) \cap C^\infty(I_R), \quad U_r^\infty(I_R) = U_r(I_R) \cap C^\infty(I_R).$$

В [29, § 5] было установлено, что

$$\text{если} \quad f \in V_r(I_R) \quad \text{и} \quad f = 0 \quad \text{на} \quad I_r, \quad \text{то} \quad f = 0 \quad \text{на} \quad I_R. \tag{8}$$

Следующий результат является уточнением этого свойства класса $V_r(I_R)$.

Теорема 1. *(i) Пусть $f \in V_r(I_R)$, $\varepsilon \in (0, R-r)$. Тогда если $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r)$ или $(r, r+\varepsilon)$, то $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$.*

*(ii) Для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует функция $f \in V_r^\infty(\mathbb{R})$, такая что $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ и $r \pm \varepsilon \in \operatorname{supp} f$.*

Второе утверждение теоремы 1 показывает, что интервал нулей $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ в утверждении (i), вообще говоря, расширить нельзя.

Аналогичный результат имеет место и для класса $U_r(I_R)$.

Теорема 2. *(i) Пусть $f \in U_r(I_R)$, $\varepsilon \in (0, R-r)$. Тогда если $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r)$ или $(r, r+\varepsilon)$, то $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$.*

*(ii) Для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует функция $f \in U_r^\infty(\mathbb{R})$, такая что $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ и $r \pm \varepsilon \in \operatorname{supp} f$.*

Отметим, что несмотря на схожесть формулировок теорем 1 и 2, рассуждения для классов $V_r(I_R)$ и $U_r(I_R)$ несколько отличаются (см. § 4 ниже).

Теоремы 1 и 2 позволяют получить соответствующие результаты о замыкании обобщенных сдвигов. Приведем одно такое утверждение, демонстрирующее применение теоремы 1.

Пусть $\operatorname{cl}_X M$ – замыкание множества $M$ в топологическом векторном пространстве $X$, $\mathcal{L}in\, M$ – линейная оболочка $M$.

Теорема 3. *Пусть $f \in V_r(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$,*

$$E_{a,b} = \operatorname{cl}_{C(\mathbb{R})} \mathcal{L}in\big\{T_x^\alpha f : x \in (a,b)\big\}, \quad a < b.$$

*Тогда*

$$E_{r,r+\varepsilon} = E_{r-\varepsilon,r} = E_{r-\varepsilon,r+\varepsilon}, \qquad \text{если} \quad 0 < \varepsilon < r,$$

*и*

$$E_{r,r+\varepsilon} = E_{r-\varepsilon,r} = E_{0,+\infty}, \qquad \text{если} \quad \varepsilon \geq r.$$

Насколько нам известно, результаты такого типа для обычных сдвигов впервые встречаются у Ж. П. Кахана, изучавшему задачу о возможной длине интервала нулей у ненулевых функций из заданного подпространства, инвариантного относительно сдвигов (см., например, [4, § 11, п. 3]).

Свойство (8) можно распространить на решения уравнения свертки Бесселя более общего вида (см. лемму 3 ниже). Это дает возможность получить новую теорему единственности для

сходящихся последовательностей линейных комбинаций функций Бесселя, а также теорему единственности для решений задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Приведем точные формулировки указанных результатов.

Пусть $d > 0$. Последовательность $\{r_q\}_{q=1}^{\infty}$ положительных чисел будем называть $d$-последовательностью (см. [13, часть 5, гл. 3], [30]), если существует возрастающая функция $\psi : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$, удовлетворяющая условиям:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q\psi(q)} < +\infty \quad \text{и} \quad \max_{1\le m\le q} \left| r_m - \frac{\pi m}{d} \right| \le \gamma \frac{q}{\psi^2(q)},$$

где постоянная $\gamma > 0$ не зависит от $q$.

Положим

$$\mathbf{I}_\alpha(z) = J_\alpha(z) z^{-\alpha}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $J_\alpha$ – функция Бесселя первого рода порядка $\alpha$.

Следующий результат относится к так называемым "gap"-теоремам, восходящим к Н. Винеру [31, гл. 7], Н. Левинсону [32, гл. 1, 2] и др.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > -1/2$,

$$f_n(x) = \sum_{q=1}^{n} \gamma_{q,n} \mathbf{I}_\alpha(r_q x), \quad \gamma_{q,n} \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}),$$

*где* $\{r_q\}_{q=1}^{\infty}$ *– $d$-последовательность. Предположим, что* $R > d$ *и* $f_n$ *сходится в* $L_{\natural,\alpha}(I_R)$ *к функции* $f \in L_{\natural,\alpha}(I_R)$. *Тогда если* $f = 0$ *на* $I_{d+\varepsilon}$ *при некотором* $\varepsilon \in (0, R-d)$, *то* $f = 0$ *на* $I_R$.

Некоторые аналоги теоремы 3 для целых и полуцелых значений $\alpha$ были установлены в [30]. Относительно теорем единственности для негармонических рядов Фурье и их обобщений см. также [4, § 11, п. 3], [13, часть 5, гл. 3], [14, часть 3, комментарии] и имеющиеся там ссылки.

Наш заключительный результат основан на упомянутом выше обобщении свойства (8) и известной связи между решением задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и операторами (3) (см. [33, гл. 4, §§ 4.4, 4.5]).

Теорема 5. *Пусть* $\beta \ge \alpha > -1/2$, $f \in C^2_{\natural}(\mathbb{R})$, $U$ *– классическое решение задачи Коши*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{(2\beta+1)}{t}\frac{\partial U}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0 \tag{9}$$

$$U(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \ge 0. \tag{10}$$

*Предположим, что* $r > 0$, $\varepsilon > 0$,

$$U(x,r) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in (0,\varepsilon) \quad \textit{и} \quad U(x,0) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in (0,r).$$

*Тогда* $U = 0$ *на треугольнике* $T = \{0 < x < r + \varepsilon, 0 < t < r + \varepsilon - x\}$.

Справедливость теорем 1–5 будет установлена в § 4 ниже. В § 3 приводятся вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов.

## 3. Вспомогательные утверждения

Пусть

$$\varphi_\lambda(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\mathbf{I}_\alpha(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция $\varphi_\lambda$ является собственной функцией оператора $L_\alpha$, причем

$$L_\alpha \varphi_\lambda = -\lambda^2 \varphi_\lambda. \tag{11}$$

Кроме того, при $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$)

$$\left| \left( \frac{d}{dx} \right)^n \varphi_\lambda(x) \right| \le \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\big((n+1)/2\big)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+n/2+1)} \lambda^n \tag{12}$$

(см., например, [29, лемма 6]).

Сферическое преобразование (преобразование Бесселя) распределения $f \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\widetilde{f}(\lambda) = \langle f, \varphi_\lambda \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Лемма 1 ([28]). *Чётная целая функция $w$ является сферическим преобразованием финитной функции класса $C^\infty_\natural(\mathbb{R})$ с носителем на $\overline{I}_r$ тогда и только тогда, когда для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существует константа $C_N > 0$, такая что*

$$|w(z)| \le C_N \frac{e^{r|\operatorname{Im} z|}}{(1+|z|)^N}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 2 ([29]). *Пусть $f \in \mathcal{D}'_\natural(I_R)$ и $L_\alpha f = -\lambda^2 f$ на $I_R$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Предположим, что $g \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R})$ и $r(g) < R$. Тогда*

$$f \overset{\alpha}{\star} g = \widetilde{g}(\lambda) f \quad \text{на} \quad I_{R-r(g)}.$$

*В частности,*

$$\varphi_\lambda \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) r^{2\alpha+2} \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r) \varphi_\lambda. \tag{13}$$

Лемма 3. *Пусть $g$ – ненулевая функция с компактным носителем класса $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(\mathbb{R})$ и $R \in (r(g), +\infty]$. Предположим, что $f \in L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(I_R)$, $f \overset{\alpha}{\star} g = 0$ на $I_{R-r(g)}$ и $f = 0$ на $I_{r(g)}$. Тогда $f = 0$ на $I_R$.*

Доказательство. Если функция $g$ является индикатором промежутка $I_r$, утверждение леммы получено в [29]. В общем случае доказательство проводится аналогично. □

Положим

$$\mathcal{N}_{r,\alpha} = \{\lambda > 0 : J_\alpha(\lambda r) = 0\}.$$

Детальная информация о нулях функций Бесселя содержится в [34, гл. 7, п. 7.9]. В частности, из асимптотики нулей бесселевой функции следует, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha}} \frac{1}{\lambda^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0.$$

Лемма 4. *Пусть $\lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha}$,*

$$G_\lambda(x) = A_{\alpha,\lambda,r} \varphi_\lambda(x) \chi_r(x), \quad \text{где} \quad A_{\alpha,\lambda,r} = \frac{r^{-2\alpha-2}\lambda^{-2}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)}.$$

*Тогда*

$$\big(L_\alpha + \lambda^2\big)(G_\lambda) = \delta_r \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'_\natural(\mathbb{R}). \tag{14}$$

Доказательство. Для произвольной функции $\psi \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R})$ имеем

$$\Big\langle \big(L_\alpha + \lambda^2\big)(G_\lambda), \psi \Big\rangle = \big\langle G_\lambda, (L_\alpha + \lambda^2)\psi \big\rangle =$$

$$= \frac{r^{-2\alpha-2}\lambda^{-2}}{\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)} \int\limits_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x)(L_\alpha + \lambda^2)\psi(x) d\mu_\alpha(x). \tag{15}$$

Преобразуем этот интеграл с помощью повторного интегрирования по частям и равенств

$$\mathbf{I}_\alpha(\lambda r) = 0, \quad \big(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\big)' = -\lambda^2 x \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda x),$$

$$L_\alpha = \frac{1}{x^{2\alpha+1}} \frac{d}{dx}\left(x^{2\alpha+1}\frac{d}{dx}\right), \quad L_\alpha \varphi_\lambda = -\lambda^2 \varphi_\lambda$$

(см. (6), (11)). Находим

$$\int\limits_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x) L_\alpha \psi(x) d\mu_\alpha(x) = \int\limits_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x) d\big(x^{2\alpha+1}\psi'(x)\big) = -\int\limits_0^r x^{2\alpha+1}\big(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\big)' d\psi(x) =$$

$$= \lambda^2 r^{2\alpha+2}\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\psi(r) + \int\limits_0^r \psi(x)\Big(x^{2\alpha+1}\big(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\big)'\Big)' dx =$$

$$= \lambda^2 r^{2\alpha+2}\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\psi(r) + \int\limits_0^r \psi(x) L_\alpha\big(\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)\big) d\mu_\alpha(x) =$$

$$= \lambda^2 r^{2\alpha+2}\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)\psi(r) - \lambda^2 \int\limits_0^r \psi(x)\mathbf{I}_\alpha(\lambda x) d\mu_\alpha(x).$$

Отсюда и из (15) получаем

$$\Big\langle \big(L_\alpha + \lambda^2\big)(G_\lambda), \psi \Big\rangle = \langle \delta_r, \psi \rangle,$$

что и требовалось. □

Лемма 5. *Если $f \in U_r(I_R)$ и $f = 0$ на $I_r$, то $f = 0$ на $I_R$.*

Доказательство. Фиксируем $\lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha}$ и представим $\delta_r$ в виде (14). Тогда из условия и (7) следует, что

$$\big(L_\alpha + \lambda^2\big)(f \overset{\alpha}{\star} G_\lambda) = 0 \quad \text{на} \quad I_{R-r}.$$

Отсюда (см. [29, лемма 9])

$$f \overset{\alpha}{\star} G_\lambda = a_\lambda \varphi_\lambda \quad \text{на} \quad I_{R-r},$$

где $a_\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку $\varphi_\lambda(0) = 1$ и $f = 0$ на $(0, r)$, то

$$a_\lambda = \big(f \overset{\alpha}{\star} G_\lambda\big)(0) = \int\limits_0^r G_\lambda(x) f(x) d\mu_\alpha(x) = 0.$$

Таким образом, $f \overset{\alpha}{\star} G_\lambda = 0$ на $I_{R-r}$. Теперь используя лемму 3, получаем требуемое. □

Для $f \in L_{\natural,\alpha}(I_r)$ положим

$$c_\lambda(f,r) = \frac{2^{1-2\alpha} r^{-2\alpha-2}}{\Gamma^2(\alpha+1)\mathbf{I}_\alpha^2(\lambda r)} \int_0^r f(x)\varphi_\lambda(x)d\mu_\alpha(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha+1},$$

$$d_\lambda(f,r) = \frac{2^{1-2\alpha} r^{-2\alpha-4}\lambda^{-2}}{\Gamma^2(\alpha+1)\mathbf{I}_{\alpha+1}^2(\lambda r)} \int_0^r f(x)\varphi_\lambda(x)d\mu_\alpha(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha}.$$

Лемма 6. *(i) Для того чтобы $f \in V_r^\infty(I_R)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha+1}} c_\lambda(f,r)\varphi_\lambda(x), \quad x \in I_R,$$

*где ряд сходится в $C^\infty(I_R)$ и $c_\lambda(f,r) = O\big(\lambda^{-N}\big)$ при $\lambda \to +\infty$ для любого $N > 0$.*

*(ii) Для того чтобы $f \in U_r^\infty(I_R)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha}} d_\lambda(f,r)\varphi_\lambda(x), \quad x \in I_R,$$

*где ряд сходится в $C^\infty(I_R)$ и $d_\lambda(f,r) = O\big(\lambda^{-N}\big)$ при $\lambda \to +\infty$ для любого $N > 0$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы является частным случаем теоремы 3 в [29]. Утверждение (ii) доказывается подобными рассуждениями с использованием леммы 5. □

Лемма 7. *Пусть $\{r_q\}_{q=1}^\infty$ – d-последовательность. Тогда для любого $\delta > 0$ найдётся ненулевая функция $h \in \mathcal{D}_\natural(I_{d+\delta})$, такая что $\widetilde{h}(r_q) = 0$, $q \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В лемме 3.1 из [13, часть 5, гл. 3] (см. также [30, лемма 1]) построена ненулевая функция $g \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R})$ с носителем в $I_{d+\delta}$, для которой

$$\widehat{g}(r_q) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ir_q x}dx = 0, \quad q \in \mathbb{N}.$$

При этом для любого $N$ существует константа $b_N > 0$, такая что

$$\big|\widehat{g}(z)\big| \le b_N \frac{e^{r(g)|\operatorname{Im} z|}}{\big(1+|z|\big)^N}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда и из леммы 1 получаем, что $\widehat{g}(z) = \widetilde{h}(z)$ для некоторой функции $h \in \mathcal{D}_\natural(I_{d+\delta})$. Поэтому $\widetilde{h}(r_q) = 0$, $q \in \mathbb{N}$. □

## 4. Доказательство теорем 1–5

Доказательство. [Доказательство теоремы 1] (i) Сначала рассмотрим случай, когда $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r)$. В силу леммы 3 можно считать, что $\varepsilon < r$. Положим

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in I_r \\ 0, & \text{если } r \le |x| < r+\varepsilon. \end{cases}$$

Покажем, что $F \in V_r(I_{r+\varepsilon})$. Преобразуем $F \overset{\alpha}{\star} \chi_r$, используя (5) и формулу

$$\gamma_\alpha (xy)^{2\alpha} T_x^\alpha F(y) = \int\limits_{|x-y|}^{x+y} t f(t) k_\alpha(t,x,y)\,dt,$$

где $\gamma_\alpha = 2^{2\alpha-1}/c_\alpha$,

$$k_\alpha(t,x,y) = \big(y^2-(t-x)^2\big)^{\alpha-\frac{1}{2}}\big((t+x)^2-y^2\big)^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

(см. (3)). При $0 < x < \varepsilon$ имеем

$$\gamma_\alpha x^{2\alpha}\big(F \overset{\alpha}{\star} \chi_r\big)(x) = \int\limits_0^r \int\limits_{|x-y|}^{x+y} ytF(t)k_\alpha(t,x,y)\,dt\,dy.$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая, что $F = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, находим

$$\gamma_\alpha x^{2\alpha}\big(F \overset{\alpha}{\star} \chi_r\big)(x) = \int\limits_0^{r+x} tF(t) \int\limits_{|x-t|}^{\min\{r,x+t\}} yk_\alpha(t,x,y)\,dy\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{r-x} tF(t) \int\limits_{|x-t|}^{x+t} yk_\alpha(t,x,y)\,dy\,dt.$$

Внутренний интеграл вычисляется с помощью формул

$$\int\limits_a^b y\big((y^2-a^2)(b^2-y^2)\big)^{\alpha-\frac{1}{2}}dy = \frac{\Gamma^2\big(\alpha+\frac{1}{2}\big)}{2\Gamma(2\alpha+1)}(b^2-a^2)^{2\alpha},$$

$$2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha+1)$$

(см. [34, гл. 1, § 1.5.1, формула (13); § 1.2, формула (15)]). Тогда

$$\big(F \overset{\alpha}{\star} \chi_r\big)(x) = \int\limits_0^{r-x} F(t)\,d\mu_\alpha(t) = \int\limits_0^r f(t)\,d\mu_\alpha(t) = \big(f \overset{\alpha}{\star} \chi_r\big)(0) = 0.$$

Тем самым $F \in V_r(I_{r+\varepsilon})$. Теперь учитывая, что $f \in V_r(I_{r+\varepsilon})$, $F - f = 0$ на $I_r$ и применяя лемму 3, получаем $f = F$ на $I_{r+\varepsilon}$. В частности, $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, что и требовалось.

Пусть теперь $f = 0$ на $(r, r+\varepsilon)$. Как и выше, можно считать, что $\varepsilon < r$. Положим

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in I_{r+\varepsilon} \\ 0, & \text{если } |x| \geq r+\varepsilon. \end{cases} \tag{16}$$

Тогда

$$\Phi \overset{\alpha}{\star} \chi_r = f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0 \quad \text{на} \quad I_\varepsilon. \tag{17}$$

Далее, для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\big(\Phi \overset{\alpha}{\star} 1\big)(x) = \int\limits_0^\infty \big(T_x^\alpha 1\big)(y)\Phi(y)\,d\mu_\alpha(y) = \int\limits_0^r \Phi(y)\,d\mu_\alpha(y) =$$

$$= \int_0^r f(y)d\mu_\alpha(y) = \big(f \overset{\alpha}{\star} \chi_r\big)(0) = 0.$$

Поэтому

$$(1-\chi_r) \overset{\alpha}{\star} \Phi = -\Phi \overset{\alpha}{\star} \chi_r \quad \text{на} \quad \mathbb{R}$$

и, в частности, $(1-\chi_r) \overset{\alpha}{\star} \Phi = 0$ на $I_\varepsilon$ (см. (17)). Поскольку $1-\chi_r = 0$ на $I_r \supset I_{r(\Phi)}$, это соотношение и лемма 3 показывают, что $r(\Phi) \le r-\varepsilon$. Значит, $\Phi = 0$ на $(r-\varepsilon, +\infty)$, откуда следует, что $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$.

(ii) Пусть функция $\Psi \in C^\infty_\natural(I_{r+\varepsilon})$ удовлетворяет следующим условиям: $\Psi = 0$ на промежутке $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, $r-\varepsilon \in \operatorname{supp}\Psi$,

$$\int_0^r \Psi(x)d\mu_\alpha(x) = 0.$$

Повторяя рассуждения из доказательства утверждения (i), получаем $\Psi \in V_r^\infty(I_{r+\varepsilon})$. В силу (12), (13) и леммы 6 (i) функцию $\Psi$ можно продолжить на $\mathbb{R}$ до функции $f$ класса $V_r^\infty(\mathbb{R})$. Это продолжение обладает требуемыми свойствами (см. утверждение (i)). □

Доказательство. [Доказательство теоремы 2] Используя рассуждения из первого утверждения теоремы 1 и лемму 5, получаем (i) в случае, когда $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r)$. Докажем (i) при условии, что $f = 0$ на $(r, r+\varepsilon)$. В силу леммы 5 можно считать, что $\varepsilon < r$. Определим функцию $\Phi$ равенством (16). Тогда из условия и (7) следует, что

$$\big(L_\alpha + \lambda^2\big)(G_\lambda \overset{\alpha}{\star} \Phi) = 0 \quad \text{на} \quad I_\varepsilon.$$

Как и в лемме 5, отсюда находим

$$\big(G_\lambda \overset{\alpha}{\star} \Phi\big)(x) = A_{\alpha,\lambda,r}\widetilde{\Phi}(\lambda)\varphi_\lambda(x), \quad x \in I_\varepsilon. \tag{18}$$

С другой стороны, по лемме 2

$$A_{\alpha,\lambda,r}\big(\varphi_\lambda \overset{\alpha}{\star} \Phi\big)(x) = A_{\alpha,\lambda,r}\widetilde{\Phi}(\lambda)\varphi_\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Сопоставляя (18) и (19), приходим к уравнению

$$\big(A_{\alpha,\lambda,r}\varphi_\lambda - G_\lambda\big) \overset{\alpha}{\star} \Phi = 0 \quad \text{на} \quad I_\varepsilon.$$

Поскольку $A_{\alpha,\lambda,r}\varphi_\lambda - G_\lambda = 0$ на $I_r \supset I_{r(\Phi)}$ и $G_\lambda = 0$ при $|x| > r$, это соотношение и лемма 3 показывают, что $r(\Phi) \le r-\varepsilon$. Поэтому $\Phi = 0$ на $(r-\varepsilon, +\infty)$ и $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$. Таким образом, первое утверждение теоремы 2 доказано.

Наконец, используя лемму 6 (ii), утверждение (i) и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем (ii). □

Доказательство. [Доказательство теоремы 3] Пусть $0 < \varepsilon < r$ и $A$ – линейный непрерывный функционал на $E_{r-\varepsilon,r+\varepsilon}$, равный нулю на $E_{r,r+\varepsilon}$. В силу теоремы Хана-Банаха для доказательства равенства $E_{r,r+\varepsilon} = E_{r-\varepsilon,r+\varepsilon}$ нужно установить, что $A = 0$. По теореме Рисса-Маркова об описании пространства, сопряженного к $C(\mathbb{R})$, функционал $A$ является чётной комплексной мерой Радона на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Тогда условие $A\big|_{E_{r,r+\varepsilon}} = 0$ и формула (4) влекут соотношение

$$f \overset{\alpha}{\star} A = 0 \quad \text{на} \quad (r, r+\varepsilon).$$

С другой стороны, из условия $f \in V_r(\mathbb{R})$ следует, что $f \overset{\alpha}{\star} A \in V_r(\mathbb{R})$. Теперь применяя к функции $f \overset{\alpha}{\star} A$ теорему 1 (i), получаем $f \overset{\alpha}{\star} A = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$. Значит, $A = 0$ на $E_{r-\varepsilon,r+\varepsilon}$ и

$E_{r,r+\varepsilon} = E_{r-\varepsilon,r+\varepsilon}$ при $0 < \varepsilon < r$. Остальные равенства в теореме доказываются аналогично (см. лемму 3). □

Доказательство. [Доказательство теоремы 4] Запишем $f_n$ в виде

$$f_n(x) = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \sum_{q=1}^{n} \gamma_{q,n} \varphi_{r_q}(x).$$

В силу леммы 7 существует ненулевая функция $h \in \mathcal{D}_\natural(I_{d+\frac{\varepsilon}{2}})$, такая что $\widetilde{h}(r_q) = 0$, $q \in \mathbb{N}$. Для этой функции $h$ имеем (см. лемму 2)

$$\big(f_n \overset{\alpha}{\star} h\big)(x) = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \sum_{q=1}^{n} \gamma_{q,n} \widetilde{h}(r_q) \varphi_{r_q}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда используя сходимость $f_n$ к $f$, получаем $f \overset{\alpha}{\star} h = 0$ на $I_{R-r(h)}$. Учитывая, что $f = 0$ на $I_{d+\varepsilon} \supset I_{r(h)}$, отсюда и из леммы 3 следует, что $f = 0$ на $I_R$. □

Доказательство. [Доказательство теоремы 5] Как известно (см. [33, гл. 4, §§ 4.4, 4.5]),

$$U(x,t) = \frac{2\Gamma(\beta+1)t^{-2\beta}}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t^2-y^2)^{\beta-\alpha-1} T_x^\alpha f(y) d\mu_\alpha(y),$$

если $\beta > \alpha$, и $U(x,t) = T_x^\alpha f(t)$, если $\alpha = \beta$. Эти равенства можно записать в виде

$$U(x,t) = \begin{cases} \frac{2\Gamma(\beta+1)t^{-2\beta}}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \big(f \overset{\alpha}{\star} g_t\big)(x), & \beta > \alpha \\ \big(f \overset{\alpha}{\star} \delta_t\big)(x), & \beta = \alpha, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$g_t(x) = (t^2-x^2)^{\beta-\alpha-1} \chi_t(x).$$

Пусть $\beta > \alpha$. Тогда по условию $f = 0$ на $(0,r)$ и $f \overset{\alpha}{\star} g_r = 0$ на $(0,\varepsilon)$. Учитывая чётность функций $f$, $g_r$ и используя лемму 3, получаем $f = 0$ на $(0, r+\varepsilon)$. Отсюда и из (20) следует требуемое утверждение при $\beta > \alpha$. Случай $\alpha = \beta$ рассматривается аналогично (см. лемму 5). □

## 5. Заключение

Результаты §§ 2, 3 и рассуждения в § 4 позволяют получить другие версии теорем 3 и 5. Например, из леммы 3 следует равенство

$$\mathrm{cl}_{C^\infty(\mathbb{R})} \mathcal{L}in\big\{T_x^\alpha f : 0 \le x < r(g)\big\} = \mathrm{cl}_{C^\infty(\mathbb{R})} \mathcal{L}in\big\{T_x^\alpha f : 0 \le x < +\infty\big\},$$

где $g$ – произвольная ненулевая функция класса $L^{\mathrm{loc}}_{\natural,\alpha}(\mathbb{R})$ с компактным носителем, а функция $f \in C^\infty_\natural(\mathbb{R})$ является решением уравнения $f \overset{\alpha}{\star} g = 0$. Кроме того, используя теорему 1, можно установить, что решение задачи (9), (10) для $\beta = \alpha + 1$ обладает следующим свойством: если $0 < \varepsilon < r$, $U(x,r) = 0$ при $0 < x < \varepsilon$ и $U(x,0) = 0$ на $(r-\varepsilon, r)$ или $(r, r+\varepsilon)$, то $U(x,t) = 0$ при $x \in (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, $0 < t < \min\{x - r + \varepsilon, r + \varepsilon - x\}$.

Другие свойства решений дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя, могут быть найдены в [13, часть 5, гл. 6], [33].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Delsarte, J. Les fonctions 'moyenne-périodiques' / J. Delsarte // J. Math. Pures Appl. – 1935. – V. 14, №. 9. – P. 403–453.

2. Schwartz, L. Theorie générale des functions moyenne-periodiqué / L. Schawrtz // Annals of Mathematics. – 1947. – V. 48. – P. 857–928.

3. Kahane, J.P. Sur les fonctions moyenne–périodiques bornées / J.P. Kahane // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1957. – V. 7. – P. 293–314.

4. Никольский, Н.К. Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций / Н.К. Никольский // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. – 1974. – Т. 12. – С. 199–412. – DOI 10.1007/BF01247397.

5. Беренстейн, К.А. Комплексный анализ и уравнения в свёртках / К.А. Беренстейн, Д. Струппа // Итоги науки и техники. Совр. матем. и прил. – 1989. – Т. 54. – С. 5–111. DOI 10.1007/978-3-652-58011-6.

6. Титчмарш, Э.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Э.Ч. Титчмарш. – Москва: ГИТТЛ, 1948. – 418 с.

7. Йон, Ф. Плоские волные и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. – Москва: ИЛ, 1958. – 158 с. – DOI 10.1007/978-1-4613-9453-2.

8. Любич, Ю.И. Об одном классе интегральных уравнений / Ю.И. Любич // Матем. сб. – 1956. – Т. 38(80), № 2. – С. 183–202.

9. Леонтьев, А.Ф. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси / А.Ф. Леонтьев // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 269–328.

10. Smith, J.D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ / J.D. Smith // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403–416. – DOI 10.1017/S0305004100047241.

11. Леонтьев, А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент / А.Ф. Леонтьев. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.

12. Волчков, В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах / В.В. Волчков // Мат. сб. – 1995. – Т. 186, № 6. – С. 15–34. – DOI 10.1070/SM1995v186n06ABEH000043.

13. Volchkov, V.V. Integral Geometry and Convolution Equations / V.V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p. – DOI 10.1007/978-94-010-0023-9.

14. Volchkov, V.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p. – DOI 10.1007/978-1-84882-533-8.

15. Зарайский, Д.А. Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам / Д.А. Зарайский // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 77–83.

16. Зарайский, Д.А. Класс функций, периодических в среднем, однозначно определяющихся своими значениями на "периоде"/ Д.А. Зарайский // Труды ИПММ. – 2019. – Т. 33. – С. 38–41.

17. Зарайский, Д.А. Теорема единственности для решений уравнения свертки с радиальным свертывателем / Д.А. Зарайский // Материалы IV Межд. науч. конф. «Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности». Том 1 Физико-математические и технические науки, Часть 1. – 2019. – С. 127–128.

18. Quinto, E.T. Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds / E.T. Quinto // Israel J. Math. – 1993. – V. 84. – P. 353–363. – DOI 10.1007/BF02760947.

19. Любич, Ю.И. К теореме единственности для функций, периодических в среднем / Ю.И. Любич // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1978. – Т. 81. – С. 166. – DOI 10.1007/BF01221539.

20. Каргаев, П.П. О нулях функций, периодических в среднем / П.П. Каргаев // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, № 3. – С. 322–325. – DOI 10.1007/BF01158736.

21. Зарайский, Д.А. Уточнение теоремы единственности для решений уравнения свертки / Д.А. Зарайский // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – Т. 12. – С. 69–75.

22. Волчков, В.В. Экстремальные задачи, связанные с теоремой единственности Ф. Йона / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков // Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21, № 5. – С. 37–69. – DOI 10.1090/S1061-0022-2010-01113-0.

23. Volchkov, V.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V.V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p. – DOI 10.1007/978-3-0348-0572-8.

24. Волчков, В.В. Сферические средние на двухточечно-однородных пространствах и их приложения / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков // Изв. РАН. Сер. матем. – 2013. – Т. 77, № 2. – С. 3–34. – DOI 10.4213/im7956.

25. Волчков, В.В. О множествах инъективности преобразования Радона на сферах / В.В. Волчков // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т. 63, № 3. – С. 63–76. – DOI 10.4213/im248.

26. Волчков, В.В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю / В.В. Волчков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59, № 5. – С. 671–680. – DOI 10.4213/mzm1761.

27. Зарайский, Д.А. Новая теорема единственности для одномерного уравнения свертки / Д.А. Зарайский // Труды ИПММ. – 2020. – Т. 34. – С. 63–67.

28. Selmi, B. A Local Two Radii Theorem on the Chébli-Trimèche Hypergroup / B. Selmi, M.M. Nessibi // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – V. 329, № 1. – P. 163–190. – DOI 10.1016/j.jmaa.2006.06.061.

29. Волчков, Вит.В. Уточнение теоремы о двух радиусах на гипергруппе Бесселя-Кингмана / Вит.В. Волчков, Г.В. Краснощёких // Мат. заметки. – 2024. – Т. 116, № 2. – С. 212–228. – DOI 10.4213/mzm14184.

30. Волчков, В.В. Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов / В.В. Волчков // Мат. заметки. – 1992. – Т. 51, № 6. – С. 27–31. – DOI 10.1007/BF01263296.

31. Винер, Н. Преобразование Фурье в комплексной плоскости // Н. Винер, Р. Пэли. – Москва: Наука, 1964. – 268 с. – DOI 10.1007/BF01699343.

32. Levinson, N. Gap and density theorems // N. Levinson. – Providence: Amer. Math. Soc., 1940. – 243 p.

33. Ситник, С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя // С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. – Москва: Физматлит, 2019. – 224 с.

34. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1, 2 // Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Москва: Наука, 1973, 1974. – 294, 296 с.

## REFERENCES

1. Delsarte, J. 1935, "Les fonctions 'moyenne-périodiques'", *J. Math. Pures Appl.*, vol. 14, no. 9, pp. 403–453.

2. Schwartz, L. 1947, "Theorie générale des functions moyenne-periodiqué", *Annals of Mathematics*, vol. 48, pp. 857–928.

3. Kahane, J.P. 1957, "Sur les fonctions moyenne–périodiques bornées", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 7, pp. 293–314.

4. Nikol'skii, N.K. 1976, "Invariant subspaces in the theory of operators and theory of functions", *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 7, no. 2, pp. 129–249. doi: 10.1007/BF01247397/

5. Berenstein, K., Struppa, D. 1989, "Complex analysis and convolution equations", *Itogi Nauki i Tekhniki*, vol. 54, pp. 5–111. doi: 10.1007/978-3-652-58011-6/

6. Titchmarsh, E.C. 1937, "Introduction to the theory of Fourier integrals", *Clarendon Press*, Oxford, 390 p.

7. John, F. 1955, "Plane waves and spherical means applied to partial differential equations", *Dover Publications, Mineola*, NY, 172 p. doi: 10.1007/978-1-4613-9453-2/

8. Lyubich, Yu.I. 1956, "On a class of integral equations", *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 38(80), no. 2, pp. 183-202.

9. Leont'ev, A. F. 1965, "Properties of sequences of Dirichlet polynomials converging on an interval of the imaginary axis", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 29, no. 2, pp. 269–328.

10. Smith, J.D. 1972, "Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol 72, pp. 403–416. doi: 10.1017/S0305004100047241/

11. Leont'ev, A. F. 1980, "Sequences of exponential polynomials", *Nauka, Glavnaya Redaktsiya Fiziko-Matematicheskoj Literatury*, Moscow, 384 p.

12. Volchkov, V.V. 1995, "A definitive version of the local two-radii theorem", *Sbornik: Mathematics*, vol. 186, no. 6, pp. 783-802. doi: 10.1070/SM1995v186n06ABEH000043/

13. Volchkov, V.V. 2003, "Integral Geometry and Convolution Equations", *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 454 p. doi: 10.1007/978-94-010-0023-9/

14. Volchkov, V.V., Volchkov, Vit.V. 2009, "Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group", *Springer*, London, 671 p. doi: 10.1007/978-1-84882-533-8/

15. Zaraisky, D.A. 2012, "A uniqueness theorem for functions with zero integrals over balls", *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 25, pp. 77–83.

16. Zaraisky, D.A. 2019, "A class of mean-periodic functions which are uniquely determined by their restrictions to the 'period'", *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 33, pp. 38–41.

17. Zaraisky, D.A. 2019, "The uniqueness theorem for solutions of the convolution equation with convolution kernel", *Materialy' IV Mezhd. nauch. konf. "Doneczkie chteniya 2019: obrazovanie, nauka, innovacii, kul'tura i vy'zovy' sovremennosti" ", (Proc. 4-th Int. Sci. Conf. "Donetsk Readings 2019: education, science, innovation, culture and modern problems").* Donetsk, 2019, pp. 127–128.

18. Quinto, E.T. 1993, "Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds", *Israel J. Math.*, vol. 84, pp. 353–363. doi: 10.1007/BF02760947/

19. Lyubich, Yu.I. 1984, "Uniqueness theorem for mean-periodic functions", *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 26, no. 5, p. 2206. doi: 10.1007/BF01221539/

20. Kargaev, P.P. 1985, "Zeros of mean-periodic functions", *Mathematical Notes*, vol. 37, no. 3, pp. 181–183. doi: 10.1007/BF01158736/

21. Zaraisky, D.A. 2006, "Refinement of the uniqueness theorem for solutions of the convolution equation", *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 12, pp. 69–75.

22. Volchkov, V.V., Volchkov, Vit.V. 2010, "Optimization problems related to the John uniqueness theorem", *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 21, no. 5, pp. 705–729. doi: 10.1090/S1061-0022-2010-01113-0/

23. Volchkov, V.V., Volchkov, Vit.V. 2013, "Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces", *Birkhäuser*, Basel, 592 p. doi: 10.1007/978-3-0348-0572-8/

24. Volchkov, V.V., Volchkov, Vit.V. 2013, "Spherical means on two-point homogeneous spaces and applications", *Izv. Math.*, vol. 77, no. 2, pp. 223–252. doi: 10.4213/im7956/

25. Volchkov, V.V. 1999, "Injectivity sets for the Radon transform over a sphere", *Izv. Math.*, vol. 63, no. 3, pp. 481–493. doi: 10.4213/im248/

26. Volchkov, V.V. 1996, "Extremal cases of the Pompeiu problem", *Math. Notes*, vol. 59, no. 5, pp. 482–489. doi: 10.4213/mzm1761/

27. Zaraisky, D.A. 2020, "A new uniqueness theorem for one-dimensional convolution equation", *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 34, pp. 63–67.

28. Selmi, B., Nessibi, M.M. 2007, "A Local Two Radii Theorem on the Chébli-Trimèche Hypergroup", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 329, no. 1, pp. 163–190. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.06.061/

29. Volchkov, Vit.V., Krasnoschekikh, G.V. 2024, "A Refinement of the Two-Radius Theorem on the Bessel-Kingman Hypergroup", *Mathematical Notes*, vol. 116, no. 2, pp. 223–237. doi: 10.4213/mzm14184/

30. Volchkov, V.V. 1992, "Uniqueness theorems for multiple lacunary trigonometric series", *Math. Notes*, vol. 51, no. 6, pp. 550–552. doi: 10.1007/BF01263296/

31. Paley, R., Wiener, N. 1936, "Fourier transforms in the complex domain", *(American Math. Soc. Colloq. Publications Vol. XIX)VIII+184 Seiten. Amer. Mathem. Society*, New York, vol. 44, pp. A8–A9. doi: 10.1007/BF01699343/

32. Levinson, N. 1940, "Gap and density theorems", *Amer. Math. Soc.*, Providence, 243 p.

33. Shiskina, E.L., Sitnik, S.M. 2019, "Method of Transmutations for Differential Equations with Bessel Operators", *Fizmatlit*, Moscow, 224 p.

34. Bateman, H. Erdélyi, A. 1973, 1974, “Higher transcendental functions. Vol. 1–2.”, *Nauka*, Moscow, 294, 296 p.

Получено: 19.06.24
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.968.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-74-89

# К теории двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем дифференциальных уравнений

Г. Джангибеков, Г. М. Козиев

**Джангибеков Гулходжа** — доктор физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана (г. Душанбе).
**Козиев Гулназар Мавлоназарович** — кандидат физико-математических наук, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана (г. Душанбе).
*e-mail: gulkhoja@list.ru, gulnazar88@mail.ru*

**Аннотация**

В лебеговом пространстве с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$, где $D$ – конечная односвязанная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова $\Gamma$, и содержащая внутри точку $z=0$, рассматривается двумерный сингулярный интегральный оператор типа Михлина – Кальдерона – Зигмунда вида

$$(Af)(z) \equiv a_0(z)f(z) + b_0(z)\overline{f(z)} + \\ + \iint_D \frac{\Omega_1(z,\theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta + \iint_D \frac{\overline{\Omega_2(z,\theta)}}{|\zeta - z|^2} \overline{f(\zeta)} ds_\zeta,\ \theta = \arg(\zeta - z).$$

В зависимости от гомотопического класса $\mathfrak{M}_\nu (\nu = 0, \pm 1, \ldots, \pm m)$ оператора $A$ установлены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости оператора $A$ в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ и найдены формулы для подсчёта индекса оператора.

Полученные результаты применяются к задачам Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем двух уравнений с двумя независимыми переменными высшего порядка.

*Ключевые слова:* сингулярный интегральный оператор, символ оператора, нётеровость, индекс оператора, эллиптическая система, задача Дирихле.

*Библиография:* 33 названий.

**Для цитирования:**
Джангибеков, Г., Козиев, Г. К теории двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем дифференциальных уравнений // Чебышёвский сборник, 2023, т. 25, вып. 5, с. 74–89.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 517.968.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-74-89

# On the theory of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations

G. Jangibekov, G. M. Koziev

**Jangibekov Gulkhoja** — doctor of physical and mathematical sciences, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
**Koziev Gulnazar Mavlonazarovich** — candidate of physical and mathematical sciences, International University of tourism and entrepreneurship of Tajikistan,(Dushanbe).
*e-mail: gulkhoja@list.ru, gulnazar88@mail.ru*

**Abstract**

In a Lebesgue space with weight $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, where $D$ is a finite singly connected domain of the complex plane bounded by a simple closed Lyapunov curve $\Gamma$ and containing the point $z = 0$, we consider a two-dimensional singular integral operator of the Mikhlin – Calderon – Zygmund type of the form

$$(Af)(z) \equiv a_0(z)f(z) + b_0(z)\overline{f(z)}+$$
$$+\iint_D \frac{\Omega_1(z,\theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta + \iint_D \frac{\overline{\Omega_2(z,\theta)}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta,\ \theta = \arg(\zeta - z).$$

Depending on the homotopy class $\mathfrak{M}_\nu(\nu = 0, \pm1, \ldots, \pm m)$ of the operator $A$, we establish effective necessary and sufficient conditions for the operator $A$ to be Noetherian in $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ and found formulas for calculating the index of an operator.

The results obtained are applied to the Dirichlet and Neumann problems for general elliptic systems of two equations with two higher-order independent variables.

*Keywords:* singular integral operator, operator symbol, Noetherian property, operator index, elliptic system, Dirichlet problem.

*Bibliography:* 33 titles.

**For citation:**
Jangibekov, G., Koziev, G.M. 2023, "On the theory of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 74–89.

## 1. Введение

Основополагающие результаты по построению общей теории одномерных сингулярных интегральных уравнения были получены Ф. Нётером [1] и Ф. Карлеманом [2]. Изложение такой теории в гельдеровых классах функций дано в монографии одного из создателей этой теории Н.И. Мусхелишвили [3].

Первые исследования по многомерным сингулярным интегральным уравнениям принадлежат Ф. Трикоми [4], [5], который установил формулу дифференцирования двойных интегралов со слабой особенностью и правило композиции двойных сингулярных интегралов. В этом

направлении фундаментальное исследование принадлежит Ж. Жиро [6], [7], доказавшему справедливость теоремы Фредгольма для некоторых сингулярных интегральных уравнений на ляпуновских многобразиях.

Классические сингулярные интегральные операторы Михлина – Кальдерона – Зигмунда имеют вид

$$(Af)(x) = \int_D \frac{\Omega(x,\theta)}{r^n} f(y)dy, \tag{1}$$

где $D$ – конечная или бесконечная область эвклидового пространства $E_n$, $r = |x-y|$, $\theta = \frac{x-y}{r}$, функция $\Omega(x,\theta)$ называется характеристикой, а точка $x$ – полюсом сингулярного интеграла (1).

Наиболее важные результаты по теории сингулярных интегральных операторов получены А. Кальдероном и А. Зигмундом в работе [8], где они доказали, что при определенных условиях на характеристику $\Omega(x,\theta)$, оператор $A$ будет линейным (ограниченным) оператором, действующим из $L_p(E_n)$ в $L_p(E_n)$ $p > 1$. Общая теория многомерных сингулярных интегральных уравнений $(Af)(x) = g(x)$ по всему $n$ – мерному пространству $E_n$ в пространстве $L_2(E_n)$ построена С.Г. Михлиным [9]. Разлагая характеристику $\Omega(x,\theta)$ в ряд Фурье по сферическим функциям $Y_m^{(l)}(\theta)$ $(l = 1,\ldots,\varkappa_m; m = 0,1,2,\ldots)$, С.Г. Михлин каждому оператору $A$ из (1) ставил в соответствие непрерывную символическую функцию

$$\mathscr{A}(x,\theta) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\varkappa_m} a_m^{(l)}(x)Y_m^{(l)}(\theta), \tag{2}$$

и доказал, что если символ (2) нигде не обращается в нуль, то для уравнения $(Af)(x) = g(x)$ с оператором $A$ из (1) имеет место теория Фредгольма в пространстве $L_2(E_2)$. И.Ц. Гохберг [10] доказал необходимость этого условия для фредгольмовости уравнения, а И.Б. Симоненко [11] обобщил указанный результат на пространство $L_p(E_2), p > 1$.

При исследовании сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области $D$ возникает новая конструкция – граничные символы, связанные с границей $\Gamma$ области $D$. В упомянутой выше работе [11], И.Б. Симоненко исследовал нетеровы свойства матричного сингулярного оператора $A$ на гладком многообразии $\Gamma$ с краем в пространстве $L_2^m(\Gamma)$ с помощью предложенного им локального принципа. Эти результаты были обобщены Р.В. Дудучавой [12] на случаи пространств $L_p^m(\Gamma)$ $p > 1$ и $W_p^s(\Gamma)$. Однако, как указывает И.Б. Симоненко (см. [11], стр. 758) найденные условия нетеровости, сформулированные в терминах частных индексов граничных матриц – символа оператора $A$, не являются эффективными.

В связи с этим приобретает интерес получение для общих классов двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области условий нетеровости и формулы для вычисления индекса в более простой доступной для применения формулы.

Пусть $D$ – конечная односвязанная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова $\Gamma$ и содержащая внутри точку $z = 0$. В банаховом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$,

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \|f\|_{L^p_{\beta-2/p}} = \|F\|_{L^p}\},$$

где $1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2$, рассматривается оператор

$$\begin{aligned}(Af)(z) &\equiv a_0(z)f(z) + b_0(z)\overline{f(z)} + \\ &+ \iint_D \frac{\Omega_1(z,\theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta + \iint_D \frac{\overline{\Omega_2(z,\theta)}}{|\zeta - z|^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta,\end{aligned} \tag{3}$$

Разлагая характеристики $\Omega_j(z,\zeta)$ $(j=1,2)$ в ряд Фурье по полярному углу $\theta$, и выделяя вполне непрерывные операторы, оператор из (3) можно записать в виде

$$A \equiv a_0(z)I + b_0(z)K + \sum_{n=-m}^{m}{}' \Big(a_n(z)I + b_n(z)K\Big)S_n, \tag{4}$$

где штрих у знака суммы означает пропуск члена $n=0$; $I$ – тождественный оператор, операторы $K$ и $S_n$ действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_nf)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta, \quad z \in \overline{D};$$

$n \neq 0$ – целое, $\theta = \arg(\zeta - z)$, $\overline{S}_n \equiv KS_nK = (-1)^n S_{-n}$, черта обозначает операцию комплексного сопряжения, $ds_\zeta$ – элемент плоской меры Лебега, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [9], $a_n(z), b_n(z)$ $(n = 0, \pm 1, \cdots \pm m)$ – комплекснозначные непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функции.

При этом, хотя функции, входящие в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, являются комплексно-значными, само пространство будем считать вещественным, т.е. рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда оператор $A$ будет обычным линейным ограниченным оператором в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, что следует, например из [13].

Всякий линейный ограниченный функционал на рассматриваемом (вещественном) пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ единственным образом представим представим в виде.

$$(f,\psi) = Re \iint_D f(z)\psi(z)ds_z, \ \psi \in L^q_{2-\beta-2/q}(D), \ 1/p + 1/q = 1.$$

В соответствии с этим сопряженным к оператору $A$ в $L^q_{2-\beta-2/q}(D)$ будет

$$A^* \equiv a_0(z)I + \overline{b_0(z)}K + \sum_{n=-m}^{m} \overline{S}_n\Big(a_n(\zeta)I + \overline{b_n(\zeta)}K\Big).$$

В случае нетеровости под индексом оператора $A$ , как обычно, понимается разность между числом линейно-независимых решений однородного уравнения $(Af)(z) = 0$ в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ и числом линейно-независимых решений сопряженного однородного уравнения $(A^*\psi)(z) = 0$ в $L^q_{2-\beta-2/q}(D)$.

## 2. Гомотопическая классификация и Нётерова свойства

Как известно [14] простейшие двумерные сингулярные интегральные уравнения (4) играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций и построении гомеоморфизма системы Бельтрами, а более общие сингулярные интегральные операторы по ограниченной области (см. [16], [17], [18]) связаны с основными краевыми задачами эллиптических систем уравнений первого и второго порядка на плоскости. Не вдаваясь в подробности, отметим, что некоторые частные случаи оператора $A$ из (4) исследованы в работах [14] – [31].

Прежде всего заметим, что уравнение (4) наряду с искомой функцией $f(z)$ также содержит комплексно сопряжённую функцию $\overline{f(z)}$ и уравнения такого вида можно непосредственно свести к системе двух сингулярных уравнений с двумя неизвестными функциями $f(z)$ и $\overline{f(z)}$, если присоединить к данному уравнению другое, полученное переходом к комплексно сопряжённым значениям. Для этого в векторном пространстве

$$L^{2,p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L_{\beta-2/p}(D)\}, \quad 1 < p < \infty$$

рассмотрим оператор

$$U = \begin{pmatrix} a_0(z) + \sum'_{n=-m}{}^{m} a_n(z)S_n & b_0(z) + \sum'_{n=-m}{}^{m}(-1)^n b_n(z)S_{-n}K \\ \overline{b_0(z)} + \sum'_{n=-m}{}^{m}\overline{b_n(z)}S_n & \overline{a_0(z)} + \sum'_{n=-m}{}^{m}(-1)^n\overline{a_n(z)}S_{-n}K \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Нетеровость оператора* $A : L^p_{\beta-2/p}(D) \longrightarrow L^p_{\beta-2/p}(D)$ *эквивалентна нетеровости оператора* $U : L^{2,p}_{\beta-2/p}(D) \longrightarrow L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$.

Действительно, если функция $f(z)$ является решением операторного уравнения $(Af)(z) = g(z)$ из $L^p_{\beta-2/p}(D)$, то вектор $F = (f, \overline{f})$ будет решением системы $UF = Q$ из $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$, где $Q = (g, \overline{g})$ и обратно, если вектор $F = (f_1, f_2)$ является решением системы $UF = q$ из $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$, то вектор $(\overline{f}_2, \overline{f}_1)$ также будет решением. Но тогда решением системы $UF = Q$ из $L^{2,p}_{\beta-2/p}(D)$ будет вектор $\left(\frac{f_1+\overline{f}_2}{2}, \frac{f_2+\overline{f}_1}{2}\right)$. Отсюда следует, что функция $\frac{f_1+\overline{f}_2}{2}$ будет решением уравнения (4) из $L^p_{\beta-2/p}(D)$.

Далее, пусть $k$–число линейно-независимых решений однородного уравнения $(Af)(z) = 0$ над полем вещественных чисел, $l$–число линейно независимых решений однородной системы $UF = 0$ над полем комплексных чисел. Покажем, что $k = l$. Пусть $\{f_j(z)\}, j = 1, 2, \cdots k$,– фундаментальная система решений однородного уравнения (2.1).Тогда векторы $F_j = (f_j, \overline{f}_j)$ $(j = 1, 2, \cdots k)$ будут линейно-независимыми решениями уравнения $UF = 0$. Действительно, если $\sum_{j=1}^n c_j F_j = 0$, то $\sum_{j=1}^n c_j f_j = 0$, $\sum_{j=1}^n c_j \overline{f}_j = 0$ или $\sum_{j=1}^n c_j f_j = 0$ и $\sum_{j=1}^n \overline{c}_j f_j = 0$. Отсюда $\sum_{j=1}^n (c_j + \overline{c}_j) f_j = 0$, $\sum_{j=1}^n (c_j - \overline{c}_j) f_j = 0$. Поэтому $c_j + \overline{c}_j = 0, c_j - \overline{c}_j = 0$, т.е. $c_j = 0$. Таким образом, $k \le l$. Также , как в ([32], стр.276) доказывается обратное неравенство $k \ge l$.

Совершенно аналогично доказывается, что однородное сопряжённое уравнение $A^*\psi = 0$ в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ и соответствующая система уравнений $U^*\Psi = 0$ в векторном пространстве $L^{2,q}_{2-\beta-2/q}(D)$ имеют одинаковое число линейно независимых решений, определенным образом соответствующих друг другу.

Из установленного выше соответствия между решениями неоднородного уравнения $Af = g$ и неоднородной системы $UF = Q$ следует, что уравнение $Af = g$ и соответствующая система $UF = Q$ нормально разрешимы лишь одновременно. Лемма 1 доказана.

Поскольку символ оператора $S_n$ (см.[9]) равен $(\frac{\sigma}{|\sigma|})^n \equiv t^n$ $(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \ne 0)$, то согласно [12], свойства оператора $U$ определяются свойствами матрицы

$$\mathscr{G}_A(z,t) = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_{2m}(z,t) & \mathscr{Q}_{2m}(z,t) \\ \hat{\mathscr{Q}}_{2m}(z,t) & \hat{\mathscr{P}}_{2m}(z,t) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathscr{P}_{2m}(z,t) = \overline{t}^m \sum_{n=-m}^{m} a_n(z)t^{m+n},\ \mathscr{Q}_{2m}(z,t) = \overline{t}^m \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n b_n(z)t^{m-n},$$

$$\hat{\mathscr{Q}}_{2m}(z,t) = t^m \sum_{n=-m}^{m} \overline{b_n(z)}\overline{t}^{m-n},\ \hat{\mathscr{P}}_{2m}(z,t) = t^m \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n\overline{a_n(z)}\overline{t}^{m+n},$$

и для нетеровости оператора $A$ в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ необходимо, чтобы

$$\det \mathscr{G}_A(z,t) \equiv \mathscr{P}_{2m}(z,t)\hat{\mathscr{P}}_{2m}(z,t) - \mathscr{Q}_{2m}(z,t)\hat{\mathscr{Q}}_{2m}(z,t) \ne 0 \tag{5}$$

для всех $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$.

Теперь введём следующие обозначения:

$$\Delta_n(z) = |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2,\ n = 0, \pm 1, \ldots, \pm m;$$

$$
\begin{aligned}
M(z) &= \max_{|t|=1}\Big[(a_m\overline{a}_{-m} - b_{-m}\overline{b}_m)t^{2m} + (a_{m-2}\overline{a}_{-m} - a_{m-1}\overline{a}_{-m+1} + a_m\overline{a}_{-m+2} - \\
&- b_{-m}\overline{b}_{m-2} - b_{-m+1}\overline{b}_{m-1} - b_{-m+2}\overline{b}_m)t^{2m-2} + \cdots\Big], \\
-m(z) &= \min_{|t|=1}\Big[(a_m\overline{a}_{-m} - b_{-m}\overline{b}_m)t^{2m} + (a_{m-2}\overline{a}_{-m} - a_{m-1}\overline{a}_{-m+1} + a_m\overline{a}_{-m+2} - \\
&- b_{-m}\overline{b}_{m-2} - b_{-m+1}\overline{b}_{m-1} - b_{-m+2}\overline{b}_m)t^{2m-2} + \cdots\Big].
\end{aligned} \tag{6}
$$

Лемма 2. *Матрица $\mathscr{G}_A(z,t)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и $|t| = 1$ ($\det \mathscr{G}_A(z,t) \neq 0$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$
\sum_{n=-m}^{m} (-1)^{|n|}\Delta_n(z) > 2M(z), \ \textit{при } \forall z \in \overline{D}, \tag{7}
$$

$$
\sum_{n=-m}^{m} (-1)^{|n|}\Delta_n(z) < -2m(z), \ \textit{при } \forall z \in \overline{D}. \tag{8}
$$

Действительно, условие (4) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
\det \mathscr{G}_A(z,t) &= \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n(|a_n|^2 - |b_n|^2) + \\
&+ 2Re\Big[(a_m\overline{a}_{-m} - b_{-m}\overline{b}_m)t^{2m} + (a_{m-2}\overline{a}_{-m} - a_{m-1}\overline{a}_{-m+1} + a_m\overline{a}_{-m+2} - \\
&- b_{-m}\overline{b}_{m-2} - b_{-m+1}\overline{b}_{m-1} - b_{-m+2}\overline{b}_m)t^{2m-2} + \cdots\Big] + \\
&+ 2iIm\Big[(a_{m-1}\overline{a}_{-m} - a_m\overline{a}_{-m+1} + b_{m-1}\overline{b}_{-m} - b_m\overline{b}_{-m+1})t^{2m-1} + \\
&+ (a_{m-3}\overline{a}_{-m} - a_{m-2}\overline{a}_{-m+1} + a_{m-1}\overline{a}_{-m+2} - a_m\overline{a}_{-m+3})t^{2m-3} + \cdots\Big] \neq 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Как видно из (9) $\det \mathscr{G}_A(z,t)$ представляет собой комплексный тригонометрический полином порядка $2m$ по вещественной переменной $\vartheta : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, t = e^{i\vartheta}$. Его мнимая часть является тригонометрическим полиномом порядка $2m-1$ без свободного переменного и поэтому не может сохранять для всех значений $\vartheta$ постоянный знак. Поэтому неравенство (9) примет вид

$$
\begin{aligned}
Re\det \mathscr{G}_A(z,t) &\equiv \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n(|a_n|^2 - |b_n|^2) + \\
&+ 2Re\Big[(a_m\overline{a}_{-m} - b_{-m}\overline{b}_m)t^{2m} + (a_{m-2}\overline{a}_{-m} - a_{m-1}\overline{a}_{-m+1} + a_m\overline{a}_{-m+2} - \\
&- b_{-m}\overline{b}_{m-2} - b_{-m+1}\overline{b}_{m-1} - b_{-m+2}\overline{b}_m)t^{2m-2} + \cdots\Big] \neq 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

для $\forall z \in \overline{D}, |t| = 1$. Тогда (10) эквивалентно выполнению одного из неравенств (7) или (8).

Множество комплексных матричных полиномов второго порядка, степени $2m$, удовлетворяющих условию (10), будем обозначать через $\mathscr{F}^2$. Два полинома $\mathscr{G}_1(t)$ и $\mathscr{G}_2(t)$ из $\mathscr{F}^2$ назовём гомотопными (пишется $\mathscr{G}_1(t) \sim \mathscr{G}_2(t)$), если существует семейство $\mathscr{G}(t;\tau)$ матричных полиномов из $\mathscr{F}^2$, непрерывно зависящих от действительного параметра $\tau, 0 \leq \tau \leq 1$, такое, что

$$
\mathscr{G}(t;0) \equiv \mathscr{G}_1(t), \quad \mathscr{G}(t;1) \equiv \mathscr{G}_2(t).
$$

Соотношение гомотопии (см. напр.[16]) разбивает $\mathscr{F}^2$ на классы гомотопии - связные, открытые компоненты множества $\mathscr{F}^2$.

Соответственно неравенству (10) возможны два случая:

$$Re\det\mathscr{G}_A(z,t)>0 \text{ для } \forall z\in\overline{D},\ |t|=1, \tag{11}$$

$$Re\det\mathscr{G}_A(z,t)<0 \text{ для } \forall z\in\overline{D},\ |t|=1. \tag{12}$$

Множество матричных полиномов, удовлетворяющих условию (11) или (12), будем обозначать соответственно через $\mathscr{F}_+^2$, $\mathscr{F}_-^2$. Если $\mathscr{G}_1(t)\sim\mathscr{G}_2(t)$, то $\mathscr{G}_1(t)$ и $\mathscr{G}_2(t)$ принадлежат одному и тому же из этих множеств. В дальнейшем будем рассматривать лишь $\mathscr{F}_+^2$.

Из (10) следует, что $P_{2m}(z,t)\equiv t^m\mathscr{P}_{2m}(z,t)=\sum_{n=-m}^{m}a_n(z)t^{m+n}$ – есть комплексный невырождающийся полином степени $2m$. Пусть $q_k(z)$ $(k=1,2,\dots,2m)$ комплексные корни уравнения $P_{2m}(z,t)=0$. Согласно (10), а) эти корни не лежат на окружности $|t|=1$, т.е. $|q_k(z)|\neq 1$, либо $|q_k(z)|<1$, либо $|q_k(z)|>1$. Корни первой группы обозначим через $q_k^+(z),\ k=1,2,\dots,l^+$, корни второй группы–через $q_k^-(z),\ k=1,2,\dots,l^-,\ l^++l^-=2m$. В зависимости от количество нулей внутри единичного круга $|t|=1$ возможно, априори $2m+1$ случаев. Класс матричных полиномов из $\mathscr{F}_+^2$, для которого имеет место один из возможных случаев, будем обозначать через $\mathfrak{M}_\nu,\nu=0,\pm1,\dots,\pm m$.

**Определение.** Будем говорить, что оператор $A$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_\nu$ ( $-m\le\nu\le m$), если для любых $z\in\overline{D},|t|=1$ выполнено неравенство (11) и

$$\nu=Ind_{|t|=1}\mathscr{P}_{2m}(z,t)=l^+-m.$$

Введём обозначения

$$\lambda_{\nu,n}=\overline{a}_\nu a_n-b_\nu\overline{b}_n,\ \mu_{\nu,n}=\overline{a}_\nu b_n-b_\nu\overline{a}_n$$

и отметим, что имеют место тождества $|\lambda_{\nu,n}(z)|^2-|\mu_{\nu,n}(z)|^2=\Delta_\nu(z)\Delta_n(z)$, где $\nu=0,\pm1,\dots,\pm m;n=\pm1,\dots,\pm m,\nu\neq n$.

Теорема 1. *Для нётеровости оператора $A$ в лебеговых пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty,0<\beta<2$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий*

$$\Delta_0(z)>M(z)+\Big(M^2(z)+\sum_{n=-m,n\neq0}^{m}(-1)^{|n|}(|\mu_{0,n}(z)|^2-|\lambda_{0,n}(z)|^2)\Big)^{1/2} \text{ для } \forall z\in\overline{D}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\Delta_\nu(z)>M(z)+\Big(M^2(z)+\sum_{n=-m,n\neq\nu}^{m}(-1)^{|n|}(|\mu_{\nu,n}(z)|^2-|\lambda_{\nu,n}(z)|^2)\Big)^{1/2}\\ &\text{и}\quad \mu_{\nu,0}(\tau)\neq0 \text{ для } \forall z\in\overline{D},\ \tau\in\Gamma,\ \nu=\pm1,\cdots,\pm m.\end{aligned} \tag{14}$$

*При этом, если выполнено (13), то индекс оператора $A$ равен нулю, а если выполнено (14), то*

$$\varkappa=-\nu Ind_\Gamma\mu_{\nu,0}(\tau),$$

*где*

$$\mu_{\nu,0}(\tau)=\overline{a_\nu(\tau)}b_0(\tau)-b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)}.$$

Следствие 1. *Если в операторе $A$ из (4) сингулярный интеграл распространён по комплексной плоскости $E_2$:*

$$(S_n^{E_2}f)(z)=\frac{|n|}{2\pi i^{|n|}}\iint_{E_2}\frac{e^{in\theta}}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)ds_\zeta,\quad z\in E_2,$$

*то для фредгольмовости уравнения $(Af)(z)=g(z)$ в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $1<p<\infty$, $0<\beta<2$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих неравенств*

$$\Delta_\nu(z)>M(z)+\Big(M^2(z)+\sum_{n=-m,n\neq\nu}^{m}(-1)^{|n|}(|\mu_{\nu,n}(z)|^2-|\lambda_{\nu,n}(z)|^2)\Big)^{1/2},\nu=0,\ \pm1,\cdots,\pm m.$$

## 3. Схема доказательства теоремы

**1)**. Пусть оператор $A$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_0$, то есть $Ind_{|t|=1}\mathscr{P}_{2m}(z,t)=0$, и многочлен $P_{2m}(z,t)$ внутри круга $|t|=1$ имеет ровно $m$ корней. Тогда $\Delta_0(z)>0$ и легко видеть, что исходный оператор $A$ эквивалентен оператору

$$A_0\equiv\overline{a}_0(z)A-b_0(z)\overline{A}=\Delta_0(z)I+\sum_{n=-m,n\neq 0}^{m}(\lambda_{0,n}(z)S_n-\mu_{0,n}(z)S_{-n}K, \tag{15}$$

и его коэффициенты удовлетворяют условию (13). Поскольку в этом случае рациональные функции $\mathscr{P}_{2m}(z,t),\mathscr{Q}_{2m}(z,t)$ принимают вид

$$\mathscr{P}_{2m}(z,t)=\Delta_0(z)+\overline{t}^m\sum_{n=-m,n\neq 0}^{m}\lambda_{0,n}(z)t^{m+n},$$

$$\mathscr{Q}_{2m}(z,t)=\overline{t}^m\sum_{n=-m,n\neq 0}^{m}(-1)^n\mu_{0,n}(z)t^{m-n},$$

то по символу $\mathscr{G}_{A_0}(z,t)$ построим матрицу $\mathscr{G}_{A_0}(\tau,t)$, где $\tau\in\Gamma,|t|=1$. Пользуясь результатами [32], показывается , что для $\mathscr{G}_{A_0}(\tau,t)$ справедливо представление:

$$\mathscr{G}_{A_0}(\tau,t)=R_0^-(\tau,t)R_0^+(\tau,t),$$

где $R_0^-(\tau,t)$ по переменной $t$ аналитически продолжима в нижнюю, а $R_0^+(\tau,t)$ – в верхнюю полуплоскость, причем их определители нигде в нуль не обращаются, т.е. матрица $\mathscr{G}_{A_0}(\tau,t)$ имеет нулевые частные индексы. Тогда из [12] следует, что оператор $A_0$ нетеров в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty,0<\beta<2)$.

Вычислим теперь индекс оператора $A_0$. Обозначим через $q_\nu^+(z)$ $(\nu=1,2,\ldots,l^+)$ и $q_\nu^-(z)$ $(\nu=1,2,\ldots,l^-)$ все нули (с учётом их кратностей) полинома $P_{2m}(z,t)$, лежащие соответственно внутри и вне единичного круга $|t|=1$. Оператор $A_0$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_0$ т.е. выполнено (11) и $Ind_{|t|=1}\mathscr{P}_{2m}(z,t)=0$. Тогда рациональная функция $\mathscr{P}_{2m}(z,t)$ имеет внутри единичного круга $|t|=1$ одинаковое количество нулей и полюсов и $l^+=l^-=m$. Поэтому $\mathscr{P}_{2m}(z,t)$ можно представить в виде

$$\mathscr{P}_{2m}(z,t)=\lambda_{0,n}(z)t^{-m}\prod_{\nu=1}^{m}(t-q_\nu^+(z))\prod_{\nu=1}^{m}(t-q_\nu^-(z)),$$

где $\lambda_{0,n}(z)\neq 0$ в $\overline{D}$. Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$\mathscr{G}_{A_0^\tau}(z,t,\rho)=\begin{pmatrix}\mathscr{P}_{2m}(z,t,\rho) & \mathscr{Q}_{2m}(z,t,\rho)\\ \hat{\mathscr{Q}}_{2m}(z,t,\rho) & \hat{\mathscr{P}}_2(z,t,\rho)\end{pmatrix},$$

непрерывно зависящее от параметра $\rho:0\leq\rho\leq 1$, где

$$\mathscr{P}_{2m}(z,t,\rho)=\lambda_{0,n}(z)t^{-m}\prod_{\nu=1}^{m}(t-\rho q_\nu^+(z))\prod_{\nu=1}^{m}(\rho t-q_\nu^-(z))$$

$$\mathscr{Q}_{2m}(z,t,\rho)=\tau\varphi(\rho)\mathscr{Q}_{2m}(z,t),\ 0\leq\rho\leq 1,$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\varepsilon}{N}, & \text{когда } 0\leq\rho\leq\rho_0<1,\\ \frac{1}{N}\left(\varepsilon+\frac{N-\varepsilon}{1-\rho_0}\right)(\rho-\rho_0), & \text{когда } \rho_0\leq\rho\leq 1,\end{cases}$$

$rho_0$ – вещественное число близкое к 1,

$$N = \sup |P_{2m}(z,t,\rho)|,\ \varepsilon = \inf |\mathscr{Q}_{2m}(z,t,\rho)|,$$

где супремум (инфимум) берется по всем $z \in \overline{D},\ |t| = 1,\ 0 \le \rho \le 1$. По матрицам $\mathscr{G}_{A_0^\rho}(z,t,\rho)$ построим семейство интегральных операторов $\mathscr{A}_\rho^o$, $0 \le \rho \le 1$, вида (1). Не трудно заметить, что

$$|\mathscr{P}_{2m}(z,t,\rho)| > |\mathscr{Q}_{2m}(z,t,\rho)|,$$

и $Ind_{|t|=1}\mathscr{P}_{2m}(z,t,\rho) = 0,\ \forall z \in \overline{D}, |t| = 1, 0 \le \rho \le 1$, то есть операторы $\mathscr{A}_\rho^o$ нётеровы. Поскольку $\mathscr{A}_1^0 = A$ и $\mathscr{A}_0^0 = (-1)^m c(z) q_1^-(z) \cdot \ldots \cdot q_m^-(z) I$, то индекс оператора $A_0$ равен нулю.

**2).** Пусть теперь оператор $A$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_\nu$, $\nu \neq 0$ т.е. выполнено (11), причём $Ind_{|t|=1}\mathscr{P}_{2m}(z,t) = \nu \neq 0$ $(\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m)$. Будем пока считать, что $\nu \ge 1$. Тогда $\Delta_\nu(z) > 0$ и легко показать, что оператор $A$ эквивалентен оператору

$$A_\nu \equiv \overline{a}_\nu(z)A - b_\nu(z)\overline{A} = \Delta_\nu(z)S_\nu + \sum_{n=-m, n\neq\nu}^{m} (\lambda_{\nu,n}(z)S_n + \mu_{\nu,n}(z)S_{-n}K), \tag{16}$$

а его коэффициенты удовлетворяют неравенству из (14). Отметим, что в формуле (16) под символом $S_0$ подразумывается единичный оператор $I$. Далее по символу $\mathscr{G}_{A_\nu}(z,t)$ построим граничную матрицу–функцию

$$\mathscr{G}_{A_\nu}(\tau,t) = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_{2m}(\tau,t) & \mathscr{Q}_{2m}(\tau,t) \\ \hat{\mathscr{Q}}_{2m}(\tau,t) & \hat{\mathscr{P}}_2(\tau,t) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathscr{P}_{2m}(\tau,t) = \Delta_\nu(\tau)t^\nu + \overline{t}^m \sum_{n=-m, n\neq\nu}^{m} \lambda_{\nu,n}(\tau)t^{m+n},$$

$$\mathscr{Q}_{2m}(\tau,t) = \overline{t}^m \sum_{n=-m, n\neq\nu}^{m} (-1)^n \mu_{\nu,n}(\tau)t^{m-n},\ \tau \in \Gamma,\ |t| = 1.$$

Устанавливается, что матрица $\mathscr{G}_{A_\nu}(\tau,t)$ при выполнении условия

$$\mu_{\nu,0}(\tau) = \overline{a_\nu(\tau)}b_0(\tau) - b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)} \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma$$

факторизуется с нулевыми частными индексами $\mathscr{G}_{A_\nu}(\tau,t) = R_\nu^-(\tau,t)R_\nu^+(\tau,t)$, где матрица $R_\nu^+(\tau,t)$ аналитически продолжима внутри единичного круга $|t| = 1$, и нули ее определителя лежат вне круга, а $R_\nu^-(\tau,t)$ аналитически продолжима вне единичного круга $|t| = 1$, и нули её определителя лежат внутри круга $|t| = 1$, причём условие $\mu_{\nu,0}(\tau) \neq 0$ $\tau \in \Gamma$ необходимо для нетеровости оператора $A_\nu$ в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$.

Перейдём теперь к вычислению индекса оператора $A_\nu$. Оператор $A$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_\nu$, причем выполнено условие (10) и $Ind_{|t|=1}\mathscr{P}_{2m}(z,t) = \nu \neq 0,\ \ (\nu = 1,2,\ldots,m)$. Тогда многочлен $P_{2m}(z,t)$ имеет $\nu$ нулей $q_j^+(z)\ \ (j = 1,2,\ldots,\nu)$ внутри круга $|t| = 1$ и $2m - \nu$ нулей $q_j^-(z)$ $(j = 1,2,\ldots,2m-\nu)$ вне круга $|t| = 1$. Поэтому $\mathscr{P}_{2m}(z,t)$ можно представить в виде

$$\mathscr{P}_{2m}(z,t) = \lambda_{\nu,m}(z)t^{-m}\prod_{j=1}^{\nu}(t - q_j^+(z))\prod_{j=1}^{2m-\nu}(t - q_j^-(z)),$$

Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$\mathscr{G}_{A_\nu^\tau}(z,t,\rho) = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_{2m}(z,t,\rho) & \mathscr{Q}_{2m}(z,t,\rho) \\ \hat{\mathscr{Q}}_{2m}(z,t,\rho) & \hat{\mathscr{P}}_{2m}(z,t,\rho) \end{pmatrix},$$

непрерывно зависящее от параметра $\rho : 0 \le \rho \le 1$, где

$$\mathscr{P}_{2m}(z,t,\rho) = \lambda_{\nu,m}(z)t^{-m}\prod_{j=1}^{\nu}(t-\rho q_j^+(z))\prod_{j=1}^{2m-\nu}(\rho t - q_j^-(z)),$$

$$\mathscr{Q}_{2m}(z,t,\rho) = \mu_{\nu,0}(z) + \rho\varphi(\rho)\Big(\overline{t}^m \sum_{n=-m,n\neq 0,\nu}^{m}(-1)^n\mu_{\nu,n}(z)t^{m-n}\Big),\ z\in\overline{D},$$

а $\varphi(\rho)$ определяется также, как в предыдущем случае.

Построив теперь по матрицам $\mathscr{G}_{A_\nu^\rho}(z,t,\rho)$ семейство интегральных операторов $A_\nu^\rho$, $0 \le \rho \le 1$ , типа (1), заметим, что они нётеровы, ибо

$$|\mathscr{P}_{2m}(z,t,\rho)| > |\mathscr{Q}_{2m}(z,t,\rho)|,\ \forall z\in\overline{D},\ 0\le\rho\le 1,$$

и $\mu_{\nu,0}(z) \neq 0,\ z\in\Gamma$.

Так как $A_\nu^1 = A_\nu$ и

$$A_\nu^0 = (-1)^{2m-\nu}\lambda_{\nu,n}(z)q_1^-(z)q_2^-(z)\dots q_{2m-\nu}^-(z)S_{\nu-m} + \mu_{\nu,0}(z)K,$$

то, применив к оператору $A_\nu^0$ результаты работ [21], [23] получим, что индекс оператора $A$ равен $\varkappa = 2(m-\nu)Ind_\Gamma\mu_{\nu,0}(z)$.

Остается заметить, что в случае, когда оператор $A_\nu$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_\nu$, где $-m \le \nu \le -1$, то следует перейти от оператора $A_\nu$ к оператору $KA_\nu K$.

## 4. Редукция задачи Дирихле для общей эллиптической системы к сингулярным интегральным уравнениям по ограниченной области

Рассмотрим теперь общую эллиптическую систему уравнений порядка $2m$ на плоскости, комплексная запись которой имеет вид

$$\begin{aligned}\sum_{n=-m}^{m} a_n(z)\frac{\partial^{2m}\omega}{\partial\overline{z}^{m+n}\partial z^{m-n}} + b_n(z)\frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{n-m}\partial z^{n+m}} + \\ + \sum_{0\le l+j\le 2m-1} a_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\omega}{\partial\overline{z}^l\partial z^j} + b_{l,j}(z)\frac{\partial^{l+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^l\partial z^j} = g(z),\end{aligned} \tag{17}$$

где $z = x+iy,\ \omega = u(x,y)+iv(x,y)$,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big),\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения (17) являются непрерывными в $\overline{D}$ функциями, а $g(z)\in L^p(D), 2<p<\infty$. По главной части системы (17) построим матрицу-функцию

$$\mathscr{G}(z,\sigma) = \begin{pmatrix}\mathscr{P}_{2m}(z,\sigma) & \mathscr{Q}_{2m}(z,\sigma)\\ \overline{\mathscr{Q}_{2m}(z,\sigma)} & \overline{\mathscr{P}_{2m}(z,\sigma)}\end{pmatrix},$$

где

$$\mathscr{P}_{2m}(z,\sigma) = \sum_{n=-m}^{m} a_n(z)\sigma^{m+n}\overline{\sigma}^{m-n},\ \mathscr{Q}_{2m}(z,\sigma) = \sum_{n=-m}^{m} b_n(z)\sigma^{m-n}\overline{\sigma}^{m+n}.$$

Эллиптичность системы (17) означает, что для любой точки $z \in \overline{D}$ и любого не равного нулю комплексного числа $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ должно выполняться неравенство $\det \mathcal{G}_z(\sigma) \neq 0$.

$$\det \mathcal{G}(z,\sigma) \equiv |\mathscr{P}_{2m}(z,\sigma)|^2| - |\mathscr{Q}_{2m}(z,\sigma)||^2 \neq 0 \tag{18}$$

для всех $z \in \overline{D}$, $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$. В дальнейшем, для удобства введя обозначение $t = \frac{\sigma}{\overline{\sigma}}$, матрицу-функцию $\mathscr{G}_{2m}(z,\sigma)$ запишем в виде

$$\mathscr{G}(z,t) = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_{2m}(z,t) & \mathscr{Q}_{2m}(z,t) \\ \hat{\mathscr{Q}}_{2m}(z,t) & \hat{\mathscr{P}}_{2m}(z,t) \end{pmatrix}, \ |t| = 1, \ z \in \overline{D},$$

где

$$\mathscr{P}_{2m}(z,t) = \overline{t}^m \sum_{n=-m}^{m} a_n(z) t^{m+n}, \quad \mathscr{Q}_{2m}(z,t) = \overline{t}^m \sum_{n=-m}^{m} b_n(z) t^{m-n},$$

Без ограничения общности будем считать, что $D = \{z : |z| < 1\}$. Для общего уравнения (17) будем исследовать краевую задачу Дирихле:

**Задача Дирихле.** Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W_p^{2m}(D) \cap C^{m-1}(\overline{D})$, удовлетворяющую внутри $D$ уравнению (17), а на её границе $\Gamma$ – краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^j \omega}{\partial n^j}\right|_{\Gamma} = 0, \ j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{19}$$

где $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ - означает производную функции $\omega(z)$ по направлению внешней нормали в точках контура $\Gamma$.

Известно [14],[15],[17], что любая комплекснозначная функция класса $W_p^{2m}(D) \cap C^{m-1}(\overline{D})$, $(p > 2)$ удовлетворяющая на границе $\Gamma$ однородным краевым условиям (2), представляется в виде

$$\omega(z) = \iint_D G_m(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta, \tag{20}$$

с произвольной комплекснозначной плотностью $f(z) \in L_p(D)$, $p > 1$, где $G_m(z,\zeta)$ [15] функция Грина уравнения $\Delta^m \omega \equiv \frac{\partial^m \omega}{\partial z^m \partial \overline{z}^m} = 0$ в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ :

$$G_m(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{\pi[(m-1)!]^2} |\zeta - z|^{2(m-1)} \ln \left| \frac{\zeta - z}{1 - z\overline{\zeta}} \right|^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k} |\zeta - z|^{2(m-k-1)} [(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)]^k.$$

Тогда для производных $\frac{\partial^{2m} \omega}{\partial \overline{z}^{m+n} \partial z^{m-n}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$ имеем выражения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{2m} \omega}{\partial \overline{z}^m \partial z^m} = f(z) \quad \text{при} \quad n = 0, \\ &\frac{\partial^{2m} \omega}{\partial \overline{z}^{m+n} \partial z^{m-n}} = \iint_D K_n(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta \equiv (S_{2n}^* f)(z) \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} K_n(z,\zeta) = \frac{(-1)^n n}{\pi} \cdot \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^{n-1}}{(\zeta - z)^{n+1}} + \frac{(-1)^{m-n}}{\pi (m-1)!(n-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} C_{m+n}^k (-1)^k ! \times \\ \times (m-1)(m-2)\ldots(m-k) \cdot (m+n-1-k)! \frac{(\zeta - z)^{m-1-k} (\overline{\zeta} - \overline{z})^{n-1} \overline{\zeta}^{m+n-k}}{(1 - z\overline{\zeta})^{m+n-k}}, \end{aligned} \tag{22}$$

причём ядро $K(z,\zeta)=0$ при $\zeta\in\Gamma$ и интегральный оператор $S^*_{2n}$ локально эквивалентен сингулярному оператору $S_{2n}$. Очевидно, что все производные от функции $\omega(z)$ по $z$ и по $\overline{z}$ до $2m-1$ - го порядка дают интегральные операторы с непрерывными ядрами или с ядрами, имеющими слабую особенность и, следовательно, являются вполне непрерывными в $L_p(D)\,(2<p<\infty)$ операторами.

В силу формул (21) для определения комплекснозначной функции $f(z)\in L_p(D)\,(2<p<\infty)$ из (17) получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$a_0(z)f(z)+b_0(z)\overline{f(z)}+\sum_{n=-m}^{m}{}'\,a_n(z)(S^*_{2n}f)(z)+b_n(z)\overline{(S^*_{2n}f)(z)}+(Tf)(z)=g(z). \tag{23}$$

Применяя к уравнениям (23) теорему 1, получим что справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы задача Дирихле (19) для любой эллиптической системы (17) с непрерывными коэффициентами в классе $W^{2m}_p(D)\cap C^{m-1}(\overline{D})$, была нётеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_0(z)>M(z)+\Big(M^2(z)+\sum_{n=-m,n\neq0}^{m}(|\mu_{0,n}(z)|^2-|\lambda_{0,n}(z)|^2)\Big)^{1/2}\ \text{для}\ \forall z\in\overline{D}, \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\Delta_\nu(z)>M(z)+\Big(M^2(z)+\sum_{n=-m,n\neq\nu}^{m}(|\mu_{\nu,n}(z)|^2-|\lambda_{\nu,n}(z)|^2)\Big)^{1/2}\\ \text{и}\quad \overline{a_\nu(\tau)}b_0(\tau)-b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)}\neq0\quad\text{для}\quad\forall z\in\overline{D},\ \tau\in\Gamma,\ \nu=\pm1,\cdots,\pm m.\end{gathered} \tag{25}$$

*При этом, если выполнено (24), то задача фредгольмова, а если выполнено (25), то*

$$\varkappa=-2\nu Ind_\Gamma\left(\overline{a_\nu(\tau)}b_0(\tau)-b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)}\right).$$

**Задача Неймана.** Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W^{2m}_p(D)\cap C^{m-1}(\overline{D})$, удовлетворяющую внутри $D$ уравнению (17), а на ее границе $\Gamma$ краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^j\omega}{\partial n^j}\right|_\Gamma=0,\ j=1,\dots,m, \tag{26}$$

где $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ - означает производную функции $\omega(z)$ по направлению внешней нормали в точках контура $\Gamma$. Теперь вместо представления (20) воспользуемся представлением [15], [33] функций, удовлетворяющих $m$ условиям (26) по формуле

$$\omega(z)=\iint\limits_D N_m(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta, \tag{27}$$

где

$$N_m(z,\overline{\zeta})=\frac{1}{\pi[(m-1)!]^2}|\zeta-z|^{2(m-1)}\ln\Big|(\zeta-z)(1-z\overline{\zeta})\Big|^2+g_m(z,\overline{\zeta})$$

функция Неймана уравнения $\Delta^m\omega\equiv\frac{\partial^m\omega}{\partial z^m\partial\overline{z}^m}=0$ в единичном круге $D=\{z:|z|<1\}$, причем при $m\geq2$ эти функции определяются по рекуррентной формуле

$$\frac{\partial^2N_m(z,\overline{\zeta})}{\partial z\partial\overline{z}}=N_{m-1}(z,\overline{\zeta}).$$

Также как в случае Задачи Дирихле, Задача Неймана (26), (27) эквивалентным образом приводится к сингулярным интегральным уравнениям вида (23).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Nother F., Uber eine Klasse singularer Integralgleichungen // Math. Ann., 1921, 82, 42 – 63.
2. Carleman T., Sur la resolution de certaines equations integrales // Ark. Math., 1922, 16, № 26, 1–19.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения // М.; Наука, 1968, 511 с.
4. Tricomi F.G. Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie ″con asterisco″ // Rend. Accad. Naz. Lincei, III, ser. 6a, fasc. 9, 1926, 535 – 539.
5. Tricomi F.G. Equazioni integrall contenenti il valor principale di un integrale doppio // Math. Z., 27, 1928, 87 – 133.
6. Giraund G. Equations a integrales principales // Ann. Scient. Ecole norm. super., 51, fasc. 3 et, 1934, 251 – 372.
7. Giraund G. Sur une classe generale d'equations a interrales principales //C. r. Acad. sci., 202, № 26, 1936, 2124 – 2126.
8. Calderon A. P. and Zygmund A., On singular integrals // Amer. J. Math., 78, № 2, (1956), 289 – 309.
9. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения // М.: Физматгиз, 1962, 254 с.
10. Гохберг И.Ц. К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений // ДАН СССР, 133, № 6, 1960, 1279 – 1282.
11. Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений // Изв. АН СССР, сер. матем. I-II, т. 29, № 3, 4, 1965, с. 567 – 580, 757 – 782.
12. Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I-II // Journal of Operator Theory, 11, 1984, 41 – 76, 199 – 214.
13. Stein E.M. Note on singular integrals // Proc. Amer. Math. Soc.. 1957, vol. 8. p. 250–254.
14. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции // М.: Физматгиз, 1959, 628 с.
15. Векуа И.Н. Новые методы эллиптических уравнений // М.-Л: Тех.лит, 1959, 298 с.
16. Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области // ДАН СССР, т. 197, № 46, 1971, с. 1251 – 1254.
17. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений // М.: Наука, 1987, 415 с.
18. Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций // Дисс. докт. физ.-мат. наук. Москва, 1960.
19. Комяк И.И. Об условиях нетеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР, т. 22, № 6, 1978, с. 488 – 491.
20. Комяк И.И. Условия нетеровости и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области // Дифференц. уравнения, 1980, том 16, № 2, 328 – 343

21. Бильман Б.М., Джангибеков Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области // ДАН СССР, т. 288, № 4, 1986, с. 792 – 797.

22. Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук. т. 43, вып.3 (261), 1988, с. 171 – 172.

23. Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // ДАН СССР, т. 300,№ 42, 1988, с. 272 – 276.

24. Джангибеков Г. Об одном классе сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем на плоскости // ДАН СССР, т. 330, № 4, 1993, с.415 – 419.

25. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области // ДАН СССР, т. 383, № 1, 2002, с. 7 – 9. 415 – 419.

26. Джангибеков Г., Худжаназарова Г.Х. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области // ДАН России, т. 396, № 4, 2004, с. 449 – 454.

27. Джангибеков Г., Худжаназарова Г.Х. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости // ДАН России, т. 398, № 2, 2004, с. 151 – 155.

28. Джангибеков Г., Валиев Н.Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками зависящими от полюса // ДАН РТ, т. 57, № 7, 2014, с. 556 – 562.

29. Джангибеков Г., Козиев Г.М. Об одном двумерном сингулярном интегральном операторе с нечетной характеристикой // ДАН РТ, т. 58, № 10, 2015, с. 886 – 893.

30. Джангибеков Г., Одинабеков Д.М., Худжаназарова Г.Х. Об условиях нётеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области // Вестник Московского университета. Сер. 1. Матем., мех., 2019, № 2, с. 9 – 14.

31. Джангибеков Г., Одинабеков Д.М. К теории Нетера двумерных сингулярных интегральных операторов с четной характеристикой по ограниченной области // В сб. Современные проблемы математики и механики. МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019, с. 50 – 53.

32. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи // М.: Наука, 1970, 379 с.

33. Begehr H., Vanegas C.J., Iterated Neumann problem for higher order Poisson equation // Math. Nachr. 279 (2006) 38–57.

## REFERENCES

1. Nother F., 1921, “Uber eine Klasse singularer Integralgleichungen”, *Math. Ann.*, 82, pp. 42 – 63.

2. Carleman T. 1922, “Sur la resolution de certaines equations integrales”, *Ark. Math.*, 16, vol 26, pp. 1 – 19.

3. Muskelishvili N. I. 1968, “Singular integral equation”, *M.; Nauka*, 511 p. (English transl.: Noordh., Groningen, 1953.)

4. Tricomi F. G. 1926, "Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie "con asterisco" ", *Rend. Accad. Naz. Lincei*, III, ser. 6a, fasc. 9, pp. 535 – 539.

5. Tricomi F. G. 1928, "Equazioni integrall contenenti il valor principale di un integrale doppio", *Math. Z.*, 27, pp. 87 – 133.

6. Giraund G. 1934, "Equations a integrales principales", *Ann. Scient. Ecole norm. super.*, 51, fasc. 3 et, pp. 251 – 372.

7. Giraund G. 1936, "Sur une classe generale d'equations a interrales principales", *C. r. Acad. sci.*, 202, vol 26, pp. 2124 – 2126.

8. Calderon A. P. and Zygmund A., 1956, "On singular integrals", *Amer. J. Math.*, 78, vol 2, pp. 289 – 309.

9. Mikhlin C. Г. 1962, "Multidimensional singular integrals and integral equations", *Fizmatgiz, Moscow* (Russian);(English transl.: Pergamon Press, New York 1965.)

10. Gocheberg I. Z. 1960, "On the theory of multidimensional singular integral equations ". *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR, n. Ser.*, 133, vol. 6, pp. 1279 – 1282(Russian).

11. Simonenko I. B . 1965, "A new general method for the investigatoin of linear operator integral equations". (Russian).". *I. Izv. Akad.Nauk SSSR, Ser. Mat.. I-II,* 29, vol. 3, 4, 567 – 580, pp. 757 – 782. (Russian)

12. Duduchava R. 1984, "On multidimensional singular integral operators". I-II, *Journal of Operator Theory*, 11, 1984, 41 – 76, pp. 199 – 214.

13. Stein E. M. 1957, "Note on singular integrals" *Proc. Amer. Math. Soc.*. vol. 8. pp. 250 – 254.

14. Vekua И. N. 1959, "Generalized Analytic Functions", *M.: Fizmat.* 628 p. (Russian) (English transl.: Pergamon Press, Oxford, 1962.)

15. Vekua И. N. 1948, "New methods of solving elliptic equations", *M.-L: Tekh.lit.,* 298 p.(Russian) (English transl.:North Holland, Amsterdam, 1967.)

16. Dzuraev A.D. 1971, "On the one method of Singular Integral Equations on a boudeddomain ", *Dokl. Acad. Sci. USSR*, т. 197, vol 46, pp. 1251 – 1254 (Russian).

17. Dzhuraev A. D. 1987, " Method of Singular Integral Equations", *M.: Наука* (Russian) Longman, Harlow, 1992. 1987, 415 c.(English transl.:Longman, Harlow, 1992).

18. Bojarski B. 1960, " Studies on elliptic equations in plane domains and boundary value problems of function theory. *Dr. sci. thesis, Steklov Inst. Math., Moscow* (Russian).

19. Komyak I. I. 1978, "The noether property and the index of a class of two-dimensional singular integral equations", *Dokl. Acad. Sci. BSSR*, Ser. 22, vol 6, pp. 488 – 491 (Russian).

20. Komyak I. I. 1980, "The noether property and the index of a class of two-dimensional singular integral equations in the ", *Differential equations*, Ser. 16, vol 2, pp. 328 – 343 (Russian).

21. Bilman B. M., & Dzangibekov G. 1986, "Noethericity conditions and index for some two-dimensional singular integral equations with discontinuous coefficients over a bounded simply connected domain", *Dokl. Acad. Sci. USSR*, Ser. 288, vol 4, p. 792 – 797.(Russian) (English transl.:Soviet Math. Dokl. 33 vol. 3, pp. 752 – 757.)

22. Boimatov K. H., & Dzangibekov G. 1988, "On a singular integral operator", *Uspekhi math.nauk* 43, vup. 3 (261), pp. 171 – 172. (Russian) (English transl.: Math. Surveys 43 (1988), vol 3, pp. 199 – 200.).

23. Dzangibekov G. 1988, "On the Noethericity and index of a class of two – dimensional singular integral equation with discontinuous coefficients" *Dokl. Acad. Sci. USSR*, Ser.300,vol 42, pp. 272 – 276.(Russian) (English transl.: Soviet Math. Dokl. 37 1988, vol 3, pp. 639 – 643.)

24. Dzangibekov G. 1993, "On a class of two – dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the plane", *Dokl.Akad.Nauk* 330, no.4, pp. 415–419. (Russian). (English transl.: Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 47, (1993), no 3, pp. 498 – 503.)

25. Dzangibekov G. 2002 "On some two-dimensional singular integral operators on a bounded domain", Dokl.Akad.Nauk, т. 383, vol 1, pp. 415 – 419.(Russian) (English transl.:Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 2002)

26. Dzangibekov G., & Khudzhanazarova G. Kh. 2004, "On the Noethericity and index of some two-dimensional singular integral operators over bounded domain", *Dokl.Akad.Nauk*, 396, no 4, pp. 449 – 454.(Russian) (English transl.:Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 2004)

27. Dzangibekov G., & Khudzhanazarova G. Kh. 2004, "On the Dirichlet problem for an elliptic system of two fourth-order equations on a plane", *Dokl.Akad.Nauk* 398, vol 2, 2004, c. pp. 151 – 155.(Russian) (English transl.:Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 2004).

28. Dzangibekov G., & Valiev N. G. 2014, "On some two-dimensional singular integrals operators with characteristics depending on the pole", *Dokl. Acad. Sci. Taj.*, Ser. 57, vol 7, pp. 556 – 562.(Russian).

29. Dzangibekov G., & Koziev G. M. 2015, "The Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain", *Dokl. Acad. Sci. Taj.*, т. 58, vol 10, pp. 886 – 893. (Russian).

30. Dzangibekov G., & Одинабеков Д . М., & Khudzhanazarova G. Kh. 2019, "On the Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 74:2 (2019), 49 – 54. Ser. 1.(Russian). (English transl.:Moscow University Mathematics Bulletin Mathем., meh., vol 2, pp. 9 – 14).(Russian).

31. Dzangibekov G., & Odinabekov D. M. 2019, "The Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain", *On Sat. Modern problems of mathematics and mechanics. Moscow State University M.V. Lomonosov*, pp. 50 – 53.(Russian).

32. Vekua N. P. 1970, "Systems of singular integral equations and some boundary problems", *M.: Science*, 379 p.

33. Begehr H., & Vanegas C. J., 2006, "Iterated Neumann problem for higher order Poisson equation", *Math. Nachr.* 279, pp. 38 – 57.

Получено: 23.05.2024

Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.977 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-90-112

# Периодическое управление биосообществом и гомеоморфизмы окружности

А. Н. Кириллов

**Кириллов Александр Николаевич** — доктор физико-математических наук, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН (г. Петрозаводск). *e-mail: krllv1812@yandex.ru*

**Аннотация**

Предлагается и исследуется математическая модель периодического процесса управления, предназначенная для решения экологической проблемы сохранения видовой структуры биосообщества «хищник-жертва». Модель основана на сведении непрерывной динамики к дискретной, порожденной гомеоморфизмами окружности.

Динамика взаимодействия видов описывается трехмерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Два уравнения задают систему Лотки – Вольтерры, а третье — динамику пищевой привлекательности участка, понятие которой введено в [1]. Специфика системы такова, что ее траектории принадлежат инвариантным цилиндрическим поверхностям, что позволяет провести полное качественное исследование системы.

Моделируется следующий процесс. В некоторый момент времени на участок вводится популяция хищника для уменьшения роста популяции жертвы, которая рассматривается как вредный вид. Это широко распространенная в практике процедура борьбы с вредными инвазивными видами. Если через некоторое время значение пищевой привлекательности участка становится меньше порогового значения, то популяция хищника покидает участок. Ставится задача управления, состоящая в изъятии части популяции хищника так, чтобы для оставшейся части значение пищевой привлекательности было больше порога.

Вводится понятие допустимого кусочно постоянного управления, которое учитывает возможность его практической реализации при наименьшей антропогенной нагрузке на участок. Для решения поставленной задачи предлагается метод касательных управлений, на основе которого построен периодический процесс управления, как наиболее естественный, если учесть периодичность свободной системы Лотки – Вольтерры.

При построении периодического процесса управления непрерывная динамика сводится к дискретной, которая порождает гомеоморфизмы окружности. Получены условия, при которых система периодична. Найдены явные выражения для периодов. Построено множество управляемости. Рассмотрено обобщение задачи, при котором непрерывная динамика индуцирует дискретную, порождающую двойные повороты окружности. Ставится задача нахождения периодических траекторий.

*Ключевые слова:* трехмерная динамическая система, биосообщество «хищник-жертва», периодическое управление, касательная траектория, гомеоморфизм окружности, множество управляемости, огибающая.

*Библиография:* 21 названий.

**Для цитирования:**
Кириллов, А. Н. Периодическое управление биосообществом и гомеоморфизмы окружности // Чебышевский сборник, 2019, т. 25, вып. 5, с. 90–112.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 517.977 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-90-112

# Periodic control of biocommunity and circle homeomorphisms

A. N. Kirillov

**Kirillov Aleksandr Nikolaevich** — doctor of physical and mathematical sciences, Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of RAS (Petrozavodsk).
*e-mail: krllv1812@yandex.ru*

**Abstract**

To solve a problem of preserving a predator-prey biocommunity species structure, a mathematical model of periodic control process is proposed and investigated. A model is based on reducing of continuous dynamics to a discrete one generated by circle homeomorphisms.

The biocommunity dynamics is described by a three dimensional system of ordinary differential equations. Two equations present the Lotka-Volterra system, and the third one describes the dynamics of food attractivity the notion of which was introduced in [1]. The specifics of the system is such that its trajectories belong to cylindrical surfaces. The latter permits to conduct a qualitative research of the system.

The following process is modeled. At some point of time, in order to diminish the growth of prey population, which is considered as a harmful one, a predator population is transferred to a patch. The latter procedure is widely spread in practice while controlling the growth of harmful, invasive, species. If, after a while, the value of food attractivity becomes less than some threshold then the predator population leaves the patch. Thus, there arises a control problem consisting in removal of some part of predator population in such a way that for the remaining part the patch attractivity value becomes more than a threshold.

A notion of admissible piecewise constant control is proposed. The latter takes into account a possibility of its realization with the less anthropogenic load on a patch. To solve the formulated problem, a method of tangent control is proposed. On the basis of this method, a periodic control process, as the most natural if one takes into account the periodicity of the free Lotka-Volterra system, is constructed. In this case, a continuous dynamical system is reduced to a discrete one which generates circle homeomorphisms. The conditions under which a dynamical system is periodic are obtained. The explicit expressions for periods are found. The set of attainability is constructed. Also, there is considered a generalization of the control problem consisting in generating of a discrete dynamics which induces double circle rotations. In this case, the problem of finding periodic trajectories is posed.

*Keywords:* three-dimensional dynamical system, predator-prey biocommunity, periodic control, tangent trajectory, circle homeomorphism, controllability set, envelope.

*Bibliography:* 21 titles.

**For citation:**
Kirillov, A. N. 2024, “Periodic control of biocommunity and circle homeomorphisms” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 90–112.

## 1. Введение

Для сохранение видовой структуры биосообществ, что является важной экологической проблемой, в практике рапространено изъятие некоторой части видов тех или иных популяций с одного участка и перенос их на другие участки. Такое антропогенное воздействие

регламентируется соответствующими документами (см. Рекомендации Комиссии по выживанию видов (SSC) Международный союз охраны природы (IUCN): Species Survival Commission Guidelines on the Use of Ex situ Management for Species Conservation. Approved by the Steering Committee of the IUCN Species Survival Commission, Tallinn, Estonia, 29 August 2014.).

В статье предлагается и исследуется математическая модель периодического процесса управления, позволяющая разрабатывать конкретные рекомендации по решению указанной выше экологической проблемы. Модель взаимодействия видов задается трехмерной системой дифференциальных уравнений, в основе которой понятие пищевой привлекательности участка [1]. Периодический процесс управления строится путем сведения непрерывной динамики к дискретной, которая порождает гомеоморфизмы окружности.

Следует отметить, что теория динамических систем с периодическим управлением активно развивается и применяется в различных прикладных задачах ([2]– [5]).

При учете в модели дополнительных ограничений, связанных с повышением надежности предлагаемого процесса управления, неожиданным образом возникает дискретная система, порожденная двойными (двухцветными) поворотами окружности [6], [7]. Таким образом, решение прикладной экологической проблемы, приводит к постановке новых задач эргодической теории. Некоторые задачи сформулированы в последнем разделе.

Настоящая работа продолжает исследования [8], [9], где построена модель взаимодействия хищник-жертва с переменной структурой, в которой популяция жертв не покидает участок, а популяция хищников может как покидать участок, так и возвращаться обратно в зависимости от значения пищевой привлекательности участка. Для удобства читателей, коротко поясним смысл этого понятия.

Пусть $x = x(t), y = y(t)$ – количественные характеристики находящихся на участке популяций жертв и хищников, соответственно, в момент времени $t$. Пусть $\lambda > 0$ – пороговая постоянная, характеризующая минимальное количество жертв, необходимое организму хищника в единицу времени для поддержания его жизненных функций. Величина $w(t) = \frac{x(t)}{y(t)} - \lambda$ характеризует недостаток ($w(t) < 0$) или избыток ($w(t) > 0$) пищевых ресурсов, приходящихся на одного хищника в момент времени $t$. Тогда величина

$$n(t) = \int_0^t y(\tau) w(\tau) d\tau. \tag{1}$$

характеризует накопление избытка или недостатка пищевого ресурса на участке, на промежутке $[0, t]$, для всей популяции хищников. Функция $n : t \to n(t)$, значение которой определяется формулой (1), введена в [1] и называется пищевой привлекательностью участка в момент времени $t \geq 0$. Появление множителя $y(\tau)$ под интегралом мотивируется принципом "стада себялюбцев"[10], объясняющим скопление особей во времени и пространстве. Величину $n(t)$ можно интерпретировать как память популяции хищников о питатательных ресурсах участка на промежутке времени $[0, t]$.

Полагаем, что популяция хищников появляется на участке, в результате миграции или искуственного внедрения, в момент времени $t = 0$ и при этом выполняются условия

$$w(0) > \lambda, \quad n(0) = 0. \tag{2}$$

Смысл начальных условий (2): хищник появляется на участке, содержащем достаточное количество пищевых ресурсов ($w(0) > \lambda$); в начальный момент времени, $t = 0$, память популяции о пищевом ресурсе нулевая, что естественно ввиду отсутствия хищника на участке при $t < 0$.

Полагаем, что популяция хищников начинает покидать участок в момент времени $t = t^* > 0$ такой, что

$$n(t^*) = 0, \quad w(t^*) < 0, \quad n(t) > 0, \text{ при } t \in (0, t^*). \tag{3}$$

Динамика биосообщества с памятью, заданной выражением, отличным от (1), рассматривалась в [11], где проводилось исследование устойчивости равновесия по первому приближению. Отметим, что на значимость величины отношения $x/y$ для описания динамики популяций обратили внимание Р. Ардити и Л. Гинзбург (R. Arditi и L. Ginzburg) в известной работе [12]. В [13], [14] отношение $x/y$ использовано для построения двумерной модели системы с переключениями между режимами взаимодействия видов и ухода в убежища (refuge regime).

Задача управления биосообществом состоит в изъятии такого количества особей популяции хищников, чтобы для оставшихся особей участок был привлекательным (в пищевом смысле). Поддерживать некоторое количество хищников на участке требуется, в частности, для сдерживания роста инвазивного (вредного) вида жертв. В отсутствие хищников этот рост может быть экспоненциальным ([15], [16]). Формальная постановка задачи приведена ниже.

## 2. Модель и постановка задачи

Рассмотрим управляемую динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(kbx - m - u), \\ \dot{n} = x - \lambda y, \end{cases} \tag{4}$$

в которой первые два уравнения задают управляемую вольтерровскую динамику взаимодействия хищник-жертва, а последнее — получено дифференцированием $n(t)$ (см. (1)). Здесь $a, b, m, k$ – положительные постоянные, $k \in (0, 1)$, $u = u(t) \geq 0$ — управляющее воздействие, интенсивность изъятия особей популяции хищников.

Хищник, как отмечено выше, появляется на участке в момент времени $t = 0$, и поэтому система (4) рассматривается при $t \geqslant 0$.

Обозначим через $\mathbb{R}^n_+$ множество $n$-мерных векторов с положительными компонентами.

Пусть $r(t, M_0, u) = (x(t, M_0, u), y(t, M_0, u), n(t, M_0, u))$ – решение системы (4), при управлении $u$, где $r(0, M_0, u) = M_0 = (x_0, y_0, n_0)$, $r^+(M_0, u) = \{r(t, M_0, u),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ — соответствующая положительная полутраектория.

Пусть $u$— постоянная, $u \geq 0$. Тогда система

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(kbx - m - u). \end{cases} \tag{5}$$

составленная из первых двух уравнений (4), является классической системой Лотки—Вольтерры. Пусть $r_v(t, z_0, u) = (x_v(t, z_0, u), y_v(t, z_0, u))$ – решение системы (5), где $r_v(0, z_0, u) = z_0 = (x_0, y_0)$,

$$\sigma(z_0, u) = \{r_v(t, z_0, u),\ t \in \mathbb{R}_+\}$$

— соответствующая положительная полутраектория, которую будем называть овалом.

Замечание 4. *Правые части системы (4) не содержат переменной $n$. Тогда при постоянном $u \geq 0$ положительные траектории системы (4) принадлежат цилиндрическим поверхностям, являясь винтовыми линиями. Образующие цилиндров параллельны координатной оси $n$. Будем полагать траектории системы (5) вложенными в плоскость $n = 0$, принадлежащую $\mathbb{R}^3$. Тогда направляющие цилиндрических поверхностей — овалы $\sigma(z_0, u)$, где $z_0 = (x_0, y_0)$ (см. Рис.1).*

*Обозначим через $C(z_0, u)$ цилиндр с направляющей $\sigma(z_0, u)$. Таким образом, имеем дизъюнктное обьединение инвариантных поверхностей*

$$\mathbb{R}^3_+ = \bigcup_u C(z_0, u), \quad \textit{где} \quad u \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

*Иначе говоря, семейство* $\{C(z_0,u) : u \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$ *является двумерным слоением.*

В дальнейшем будем полагать выполненным условие

$$\lambda > \frac{m}{ak}, \tag{6}$$

из чего следует, что положение равновесия системы (5) при $u = 0$, $P = P(0)$, принадлежит области $\{(x,\ y) : x < \lambda y\}$. Экологический смысл этого условия в состоит том, что для нормального функционирования популяции хищника требуется достаточно большое число особей жертвы.

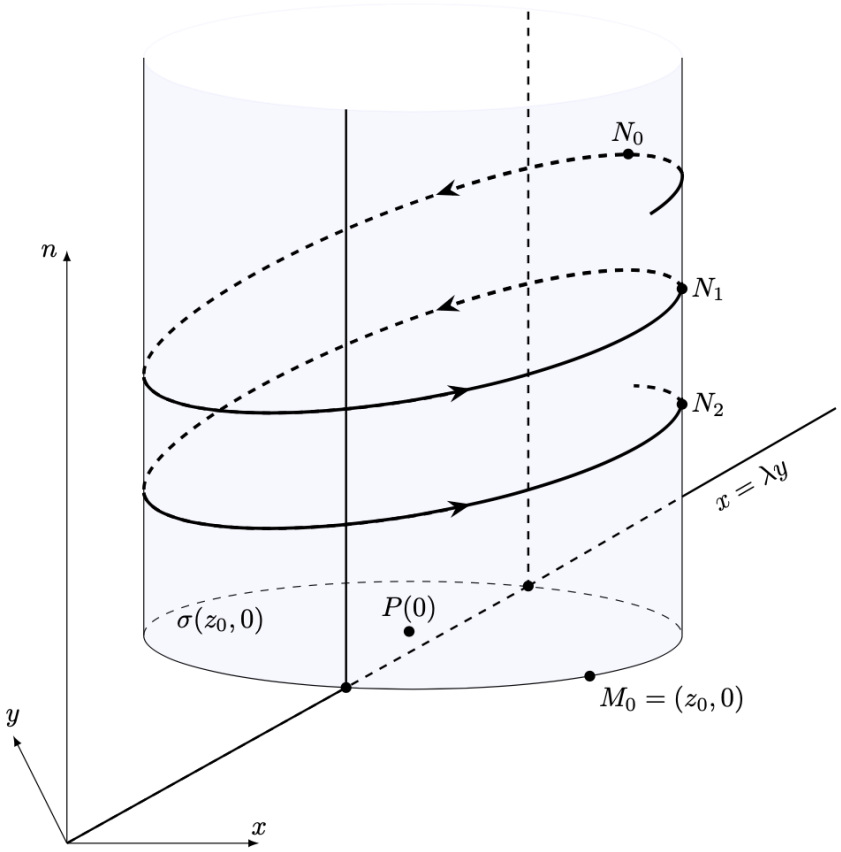



Рис. 1: Цилиндр траекторий при $\lambda > \frac{m}{ak}$, $u = 0$, $|N_1N_2| = -\Delta(M_0, 0)$, $P(0) = \left(\frac{m}{bk}, \frac{a}{b}\right)$.

Пусть $u$ — неотрицательная постоянная: $u \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$.

Пусть $T(z_0, u)$ — период решения $r_v(t, z_0, u)$ системы (5), $\Delta(t, M_0, u)$ – приращение координатной функции $n(t, M_0, u)$ решения $r(t, M_0, u)$ системы (4) на промежутке $[t, t + T(z_0, u)]$, то есть

$$\Delta(t, M_0, u) = n(t + T(z_0, u), M_0, u) - n(t, M_0, u).$$

В [8] доказано, что $\Delta(t, M_0, u)$ не зависит от $t$, и если обозначить $\Delta(t, M_0, u) = \Delta(M_0, u)$, то

$$\Delta(M_0, u) = \frac{aT(z_0, u)}{b}\left(\frac{m + u}{ak} - \lambda\right). \tag{7}$$

Из условия (6) следует, что $\Delta(M_0, 0) < 0$ (см. Рис.1). Это значит, что если не управлять системой (4), то за конечное время любая фазовая точка, принадлежащая $\mathbb{R}^3_+$, попадет на

плоскость $n = 0$ в точку $(x, y, 0)$, где $x < \lambda y$, то есть будут выполнены условия (3), и хищник покидает участок. Следовательно, для предотвращения ухода хищника требуется управлять системой.

Введем понятие допустимого управлени, для чего определим начальный момент управления. Рассмотрим луч $p$ и множества $p^+,\ p^-$, где

$$p = \{(x, y, 0) :\ x = \lambda y,\ x > 0,\ y > 0\},$$

$$p^+ = \{(x, y, 0) :\ x > \lambda y,\ x > 0,\ y > 0\}, \quad p^- = \{(x, y, 0) :\ x < \lambda y,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

Определение 1. *Пусть $z_0$ удовлетворяет (2); пусть $t(z_0) \geq 0$ такой момент времени, что $r_v(t(z_0), z_0, 0) \in p$ при условии $r_v(t, z_0, 0) \in p^+$, где $t \in [0,\ t(z_0))$. Тогда момент времени $t_u = t_u(z_0) \in [0,\ t(z_0)]$ называется начальным моментом управления.*

Определение 2. *Пусть $z_0$ удовлетворяет (2). Допустимым управлением для системы (4) с начальной точкой $M_0 = (z_0, 0)$ и начальным моментом управления $t_u = t_u(z_0)$ называется кусочно постоянная функция $u(t)$, определяемая постоянной $u^* > 0$ и последовательностями $t_i \in \mathbb{R}_+$, $u_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$, где*

$$t_i > t_{i-1}, \quad t_0 = t_u(z_0), \quad u_i \in \{0, u^*\}, \quad u_i \neq u_{i+1}, \quad u_1 = u^*,$$

*так, что выполняются следующие условия.*

*1. $u(t) = u_i$ при $t \in [t_{i-1},\ t_i)$, $\quad u_1 = u^*$.*

*2. Если $u_i = 0$, то $t_i - t_{i-1} = l_i \cdot T(z_0, 0)$ при $i \geq 2$.*

*3. $u(t) = 0$ только в точках, принадлежащих цилиндру $C(z_0, 0)$.*

*4. $u(t) = u^*$ только в области $\{(x, y, n) \in \mathbb{R}^3_+ : x \geq \lambda y\}$.*

*Постоянную $u^* > 0$ будем называть допустимым значением управления.*

Поясним смысл понятия допустимого управления. Управление $u = u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей одно из двух значений, что мотивируется простотой и возможностью реализации. Значения 0 и $u^*$ чередуются, что понятно, поскольу если при всех $t \geq 0$ положить $u(t) = 0$, то, как отмечено выше, вследствие $\Delta(M_0, 0) < 0$, популяция хищника покидает участок, то есть задача управления не будет решена. Если же $u(t) = u^*$ при всех $t \geq 0$, то процесс управления становится нереализуемым: бесконечно долгое изъятие части особей хищника правктически невозможно.

Условие 2 подразумевает, что время фунционирования биосообщества без вмешательства должно быть достаточно велико, не меньше соответствующего периода свободной вольтерровской динамики, что будет способсововать восстановлению естественной динамики после внешнего воздействия. Последнему обстоятельству способствет и условие 3.

Условие 4 означает, что внешнее вмешательство в биособщество происходит в безопасной области, то есть в области неубывания пищевой привлекательности участка, где $\dot{n} \geq 0$. Тем самым уменьшается риск ухода хищника из участка. Этот риск присутствует, так как при практической реализации управления происходят отклонения от управления, найденного теоретически.

Определение 3. *Допустимое управление $u(t)$ для системы (4) с начальной точкой $M_0 = (z_0, 0)$ и начальным моментом управления $t_u = t_u(z_0)$ называется финально периодическим, если существуют постоянная $\theta = \theta(z_0) > 0$ и момент времени $t' = t'(z_0) \geq t_u(z_0)$ такие, что*

$$u(t) = u(t + \theta), \quad r(t, M_0, u(t)) = r(t + \theta, M_0, u(t + \theta)), \quad \text{при } t \geq t'(z_0).$$

При этом $\theta = \theta(t'(z_0))$ называется периодом управления.

Смысл финальной периодичности мотивируется желанием согласовать (синхронизировать) внешнее, антропогенное, вмешательство в сообщество с его свободной, вольтерровской, динамикой.

**Постановка задачи.** Даны начальная точка $M_0 = (x_0, y_0, 0)$, удовлетворяющая условиям (2), и начальный момент управления $t_u(z_0) \in [0,\ t(z_0)]$. Требуется построить допустимое финально периодическое управление $u(t)$ системой (4), при котором

$$n(t, M_0, u(t)) > 0 \quad \text{при любом} \quad t > 0, \tag{8}$$

и допустимое значение управления $u^* > 0$ принимает наименьшее знчение.

Решение поставленной задачи позволяет сохранить популяцию хищника на участке.

## 3. Обозначения и предварительные результаты

Введем следующие обозначения.

$\pi = \{(x, y, 0) : x > 0, y > 0\}$;

$z = \{(x, y)\}$, если $z \in \pi$;

$P(u) = \left(\frac{m+u}{bk},\ \frac{a}{b}\right)$ — положение равновесия системы (5) при постоянном $u \geq 0$;

$M = (x(M), y(M), n(M))$;

$[M\infty) = \{(x, y) : x = \lambda y, x \geq x(M), y \geq y(M)\} \subset p$;

$(M\infty) = \{(x, y) : x = \lambda y, x > x(M), y > y(M)\} \subset p$.

Упорядочим точки $A, B \in p$. Будем писать $A < B$, если $x(A) < x(B)$ (или $y(A) < y(B)$).

Ниже доказывется важное свойство траекторий системы (5), или овалов $\sigma(z_0, u)$.

Утверждение 1. *Пусть овалы $\sigma(z^*, u)$ и $\sigma(z^*, v)$ имеют общую точку $z^* = (x^*, y^*)$ при постоянных $u,\ v > 0,\ u \neq v$. Тогда*

*– если $y^* = \frac{a}{b}$, то $z^*$ единственная общая точка, являющаяся точкой касания овалов;*

*– если $y^* \neq \frac{a}{b}$, то овалы пересекаются в двух точках, $z^*$ и $z^{**} = (x^{**}, y^{**})$, с одинаковыми абсциссами (см. Рис.2), то есть*

$$x^* = x^{**}.$$

Доказательство. Траектория $\sigma(z^*, u)$ системы (5) при постоянном $u > 0$ задается уравнением

$$f(x, y, z^*, u) = a \ln y - by + (m + u) \ln x - kbx - c(z^*, u) = 0, \tag{9}$$

где

$$c(z^*, u) = a \ln y^* - by^* + (m + u) \ln x^* - kbx^*.$$

Предположим, что траектории $\sigma(z^*, u)$ и $\sigma((z^*, v)$, кроме $z^*$, имеют еще одну общую точку $z^{**} = (x^{**}, y^{**})$. Тогда из (9)

$$f(x^{**}, y^{**}, z^*, u) = 0, \quad f(x^{**}, y^{**}, z^*, v) = 0.$$

Вычитая из одного последнего равенства другое, получаем

$$(u - v)(\ln x^{**} - \ln x^*) = 0,$$

откуда следует равенство $x^{**} = x^*$, то есть абсциссы общих точек овалов $\sigma(z^*, u)$ и $\sigma(z^{**}, v)$ равны. При этом количество общих точек не более двух. Действительно, подставив $y = y^{**}$, $x = x^{**}$ в уравнение (9) и учитывая, что $x^{**} = x^*$, получим уравнение относительно $y^{**}$ при фиксированном $y^*$

$$a \ln y^{**} - by^{**} = a \ln y^* - by^*. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет не более двух решений. Это следует из того, что функция $h(y)=a\ln y-by$ имееет единственное максимальное значение при $y=\frac{a}{b}$. При этом максимальное значение равно $h(\frac{a}{b})=a(\ln\frac{a}{b}-1)$, что является значением правой части (10) при $y^*=\frac{a}{b}$. Таким образом, если $y^*=\frac{a}{b}$, то решение уравнения (10) единственно, а именно, $y^{**}=y^*$. При этом точка $z^*=(x^*,\frac{a}{b})$ является точкой касания овалов, поскольку векторные поля, задаваемые правыми частями уравнения (5) при $u\neq v$ коллинеарны только в точках прямой $y=\frac{a}{b}$. Соотвественно, если $y^*\neq\frac{a}{b}$, то два решения уравнения (10), одно из которых $y^*$, являются ординатами двух точек пересечения.

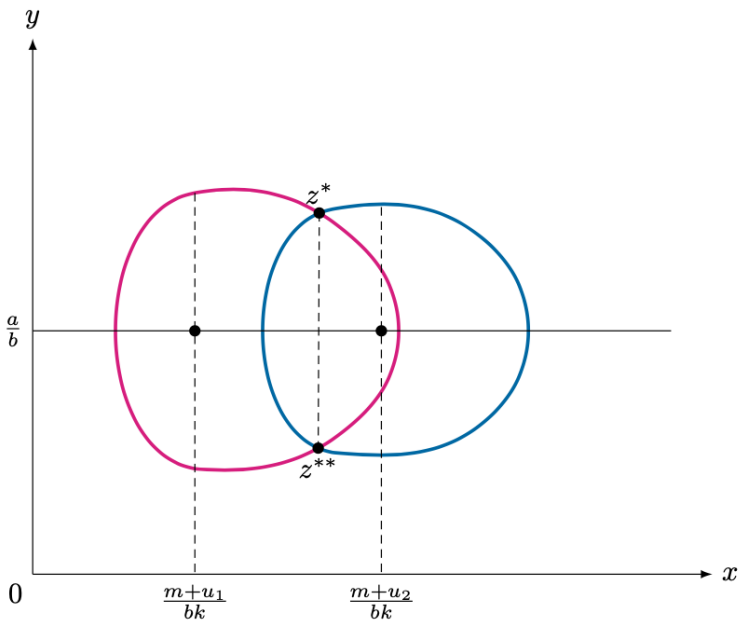



Рис. 2: Пересечение овалов $\sigma(z^*,u_i)$, $i=1,2$, $y^*\neq\frac{a}{b}$, $z^*=(x^*,y^*)$.

## 4. Касательные управления

Введем понятия касательных овалов и управлений, которые будут основным инструментом при решении поставенной задачи. Рассмотрим систему (5).

Определение 4. *Постоянная $u>0$ называется касательным управлением для точки $z_0\in p^+\cup p$, если траектория $\sigma(z_0,u)$ системы (5) касается луча $p$ в некоторой точке $Q\in p$. При этом $\sigma(z_0,u)$ называется касательной траекторией, или касательным овалом.*

*Для касательного управления введем обозначения $u_\tau=u_\tau(Q)$ или $u_\tau=u_\tau(z_0)$.*

Очевидно, $\sigma(z_0,u_\tau(Q))\subset p^+\cup p$ при $z_0\in p^+\cup p$.

Вопросы существования и единственности касательного овала, проходящего через точку $z_0\in p^+$, будут обсуждаться ниже.

Рассмотрим точку $\tilde{Q}$ пересечения луча $p$ и прямой $y=\frac{a}{b}$

$$\tilde{Q}=\left(\frac{\lambda a}{b},\frac{a}{b}\right)\in p, \tag{11}$$

и луч $(\tilde{Q}\infty) \subset p$. Имеет место следующее очевидное утверждение.

Утверждение 2. *Любая точка $Q = (x(Q), y(Q)) \in (\tilde{Q}\infty)$ является точкой касания единственного овала $\sigma(Q, u_\tau(Q)) \subset p^+ \cup p$ и луча $p$. При этом касательное управление $u_\tau(Q)$ имеет вид*

$$u_\tau(Q) = (1 + \lambda k)by(Q) - (a + m). \tag{12}$$

Доказательство. Координаты $x(Q) = x, y(Q) = y$ удовлетворяют системе уравнений

$$x = \lambda y, \qquad \frac{y(kbx - m - u)}{x(a - by} = \frac{1}{\lambda},$$

из которой следует (12).

Из Утверждения 2 получаем выражение для координат точки касания $Q(u)$, где $u = u_\tau$

$$Q(u) = \left(\lambda \cdot \frac{a + m + u}{b(1 + \lambda k)}, \frac{a + m + u}{b(1 + \lambda k)}\right). \tag{13}$$

Касательные управления будут решать поставленную задачу, поэтому изучим их подробнее.

Пусть $D$ — множество всех точек $z \in p^+ \cup p$, для которых существует касательное управление, или через которые проходят касательные овалы:

$$D = \{z \in p^+ \cup p : z \in \sigma(Q, u_\tau(Q))\}. \tag{14}$$

Последующая часть Раздела 4 посвящена нахождению множества $D$.

Ссемейство касательных овалов, принадлежащих $p^+ \cup p$, параметризуем ординатой $y(Q)$ точки касания $Q \in (\tilde{Q}\infty)$, что возможно в силу Утверждения 2. Обозначим $y(Q) = y_Q$, откуда $x(Q) = \lambda y_Q$. Семейство касательных овалов, $\sigma(Q, u_\tau(Q))$, задается семейством уравнений $f(x, y, Q, u_\tau(Q)) = 0$ (см. (9)), а именно

$$f(x, y, Q, u_\tau(Q)) = a \ln y - by + (m + u_\tau(Q)) \ln x - kbx - c(Q, u_\tau(Q)) = 0, \tag{15}$$

где $u_\tau(Q)$ имеет вид (12), $Q = (x_Q, y_Q)$. Найдем огибающую семейства $\{\sigma(Q, u_\tau(Q))\}$. Очевидно, луч $(\tilde{Q}\infty)$ является одной из ветвей огибающей. Дискриминанта семейства касательных овалов задается следующим уравнением

$$\frac{\partial f(x, y, Q, u_\tau(Q))}{\partial y_Q} = 0,$$

которое после элементарных преобразований принимает вид

$$x = \lambda y_Q. \tag{16}$$

Подставив $x = \lambda y_Q$ в (15), с учетом (12) получим

$$a \ln y - by + ((1+\lambda k)by_Q - a) \ln \lambda y_Q - kb\lambda y_Q - (a \ln y_Q - by_Q + ((1+\lambda k)by_Q - a) \ln \lambda y_Q - kb\lambda y_Q) = 0.$$

Обединяя с (16) уравнение, полученное из последнего в результате элементарных преобразований, получим систему уравнений, задающих в параметрической форме огибающую семейства касательных овалов $\sigma(Q, u_\tau(Q))$

$$\begin{cases} a \ln y - by = a \ln y_Q - by_Q), \\ x = \lambda y_Q, \end{cases} \tag{17}$$

где $y_Q > \frac{a}{b}$ (см. Утверждение 2).

Ниже будет показано, что система (17), помимо $x = \lambda y$, задает еще одну ветвь огибающей. Из второго уравнения системы (17) получаем следующий любопытный результат.

Утверждение 3. *Точки касательного овала $\sigma(Q, u_\tau(Q))$, принадлежащие различным ветвям огибающей, имеют одну и ту же абсциссу, равную $x_Q$ (см. Рис.3).*

Покажем, что при фиксированном $y_Q$ первое уравнение в (17), помимо очевидного решения $y = y_Q$, имеет еще одно решение. Обозначим $w(y) = a \ln y - by$. Несложно получить, что $\max w(y) = w(\frac{a}{b})$. Поскольку $y_Q > \frac{a}{b}$ (Утверждение 2), то $a \ln y_Q - by_Q < w(\frac{a}{b})$, откуда и получаем существование двух решений у первого уравнения сисемы (17).

Изучим вторую ветвь огибающей, расположенную ниже прямой $y = \frac{a}{b}$. Такое ее расположение следует из того, что центры овалов (положения равновесия траекторий системы (5)) принадлежат прямой $y = \frac{a}{b}$. Подставив $y_Q = \frac{x}{\lambda}$ в первое уравнение системы (17), получим уравнение, задающее в неявном виде две ветви огибающей

$$a \ln y - by = a \ln \frac{x}{\lambda} - b\frac{x}{\lambda}. \tag{18}$$

Продифференцировав (18) по $x$, получим

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\lambda x} \cdot \frac{\lambda a - bx}{a - by},$$

откуда следует, что $y' < 0$ при $y < \frac{a}{b}$.

Далее, имеем $\lim_{x\to\infty}(a \ln \frac{x}{\lambda} - b\frac{x}{\lambda}) = -\infty$. Отсюда получаем, что $\lim_{x\to\infty}(a \ln y - by) = -\infty$, что равносильно соотношению $y \to 0$ при $x \to \infty$, поскольку $y < \frac{a}{b}$.

Обозначим через $y = \varphi(x)$, где $x > \frac{\lambda a}{b}$, второе, помимо $x = \lambda y$, решение уравнения (18).

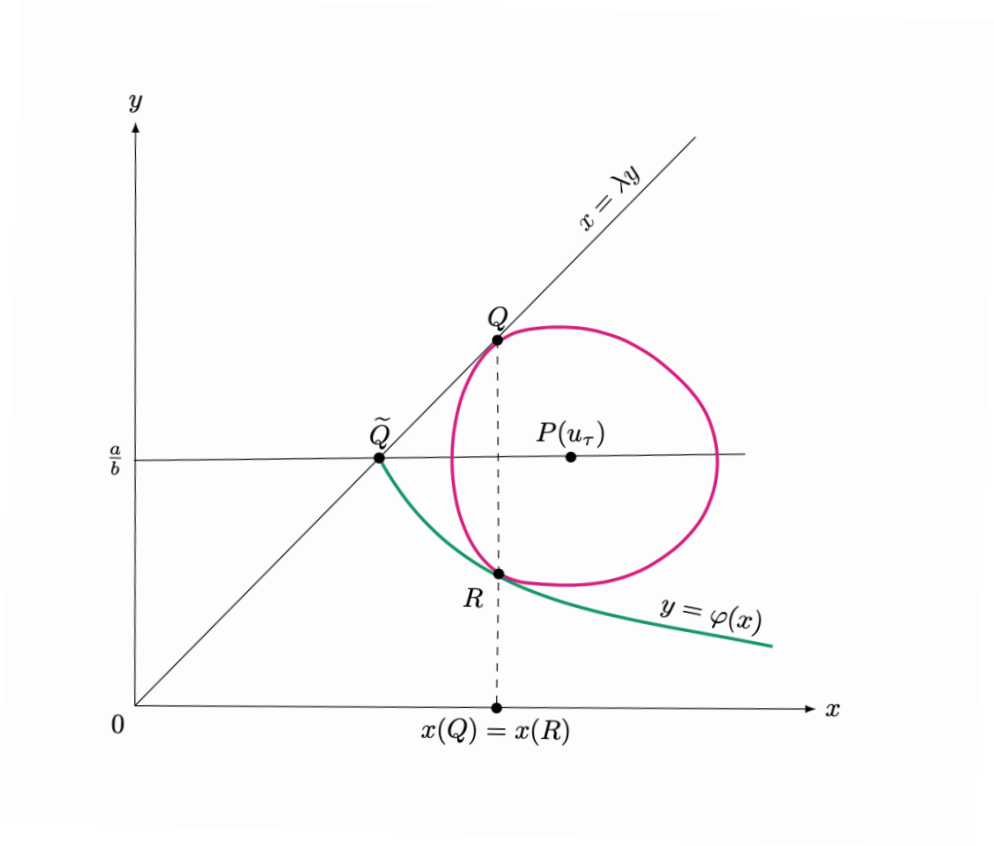



Рис. 3: Касательный овал $\sigma(z_0, u_\tau)$, огибающая $y = \varphi(x)$.

Подводя итог, можно сформулировать следующий результат.

Утверждение 4. *Семейство касательных овалов $\sigma(Q, u_\tau(Q))$ имеет огибающую, состоящую из двух ветвей, задаваемых системой (17) при $x > \frac{\lambda a}{b}$. При этом, при $y > \frac{a}{b}$ имеем ветвь $x = \lambda y$, а при $y < \frac{a}{b}$ — ветвь $y = \varphi(x)$, где обе ветви определяютя либо параметрически (17), либо уравнением (18). При этом функция $\varphi(x)$ монотонно убывает к 0 при $x \to \infty$ (см. Рис.3).*

Таким образом, семейство касательных овалов $\sigma(Q, u_\tau(Q))$ принадлежит множеству

$$\{z = (x, y) : x > \frac{\lambda a}{b},\ \varphi(x) \le y \le \frac{x}{\lambda}\} \equiv \tilde{D}. \tag{19}$$

Вернемся к задаче нахождения множества $D$ (14).

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$D = \tilde{D}. \tag{20}$$

*При этом, если $z_0 \in D \setminus \partial D$, то через точку $z_0$ проходят два касательных овала, а если $z_0 \in \partial D \setminus \tilde{Q}$, то — один касательный овал (см. Рис.4).*

Доказательство. Пусть $Q = (x_Q, y_Q)$ — точка касания. Подставим в уравнение овала $f(x, y, z_0, u_\tau(Q)) = 0$ (см. (9)) $x = x_Q = \lambda y_Q$, $y = y_Q$, $u = u_\tau(Q)$ из (12). При этом, для сокращения записи, сохраним обозначения $x$, $y$ для координат точки $Q$. После несложных преобразований получим

$$y \ln y + \left(\ln \frac{\lambda}{x_0} - 1\right) y + B(z_0) = 0, \tag{21}$$

где

$$B(z_0) = \frac{1}{b(1 + \lambda k)} \left(a \ln \frac{x_0}{\lambda y_0} + b(k x_0 + y_0)\right).$$

Поскольку, по предположению, $z_0 \in p^+ \cup p$, то $B(z_0) > 0$.

Пусть $z_0 \in D \setminus \partial D$. Докажем, что уравнение (21) имеет два различных решения $y_1$, $y_2$, удовлетворяющие условию $\frac{a}{b} < y_1$, елси считать, что $y_1 < y_2$.

Для доказательства достаточно рассмотреть случай $y_0 \ge \frac{a}{b}$, что следует из Утверждения 1. Обозначим левую часть уравнения (21) через $w = w(y)$. Нетрудно видеть, что $\lim_{y \to +0} = B(z_0)$, $\lim_{y \to +\infty} = +\infty$.

Далее, $w'(y) = \ln \frac{\lambda y}{x_0}$, $w''(y) = \frac{1}{y} > 0$. Тогда $y = \frac{x_0}{\lambda}$ — точка минимума функции $w(y)$, причем $\frac{x_0}{\lambda} > y_0 \ge \frac{a}{b}$. При этом $w(\frac{x_0}{\lambda}) = -\frac{x_0}{\lambda} + B(z_0) = \min w(y)$ при $y_0 \ge \frac{a}{b}$.

Покажем, что минимальное значение $w(\frac{x_0}{\lambda}) < 0$, то есть

$$-\frac{x_0}{\lambda} < -\frac{1}{b(1 + \lambda k)} \left(a \ln \frac{x_0}{\lambda y_0} + b(k x_0 + y_0)\right). \tag{22}$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x_0}{\lambda} - y_0 > \frac{a}{b} \ln \frac{x_0}{\lambda y_0}. \tag{23}$$

Поскольку $y_0 \ln \frac{x_0}{\lambda y_0} \ge \frac{a}{b} \ln \frac{x_0}{\lambda y_0}$, то для доказательства (23) достаточно доказать неравенство

$$\frac{x_0}{\lambda} - y_0 > y_0 \ln \frac{x_0}{\lambda y_0}, \tag{24}$$

которое следует из очевидного неравенства $\frac{x_0}{\lambda y_0} - 1 > \ln \frac{x_0}{\lambda y_0}$ при $x_0 > \lambda y_0$. Тогда (23) следует из (24), из которого получаем (22). Итак, неравенство $w(\frac{x_0}{\lambda}) < 0$ доказано. Подводя итог, получаем, что уравнение (21) имеет два решения, $y_1 = y(Q_1)$, $y_2 = y(Q_2)$, где $Q_1$, $Q_2$ — точки касания, $Q_1 < Q_2$. Из доказательства следует, что $y_1 < \frac{x_0}{\lambda} < y_2$.

Осталось доказать, что $\frac{a}{b} < y_1$. Для этого, учитывая, что точка минимума функции $w(y)$ удовлетворяет условию $\frac{x_0}{\lambda} > \frac{a}{b}$, достаточно доказать, что $w(\frac{a}{b}) > 0$, то есть (см. (21))

$$\frac{a}{b} \ln \frac{a}{b} + \left( \ln \frac{\lambda}{x_0} - 1 \right) \frac{a}{b} + \frac{1}{b(1+\lambda k)} \left( a \ln \frac{x_0}{\lambda y_0} + b(kx_0 + y_0) \right) > 0. \tag{25}$$

Для этого рассмотрим случай $x_0 = \lambda y_0$, то есть $z_0 \in \partial D \setminus \tilde{Q}$. Тогда из (25) получаем реравенство

$$w\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} \left( \frac{by_0}{a} - 1 - \ln \frac{by_0}{a} \right) \geq 0,$$

которое очевидно. Обозначим левую часть неравенства (25) как $h(x_0)$, то есть рассматриваем ее как функцию $x_0$ при фиксированном $y_0$. Тогда $h'(x_0) = \frac{k}{1+\lambda k}(1 - \frac{a\lambda}{bx_0}) > 0$, при $x_0 > \lambda y_0 \geq \frac{\lambda a}{b}$ (см. выше). В итоге, получаем (25), то есть $\frac{a}{b} < y_1$. Случай $z_0 \in D \setminus \partial D$ доказан.

Для случая $z_0 \in \partial D \setminus \tilde{Q}$ доказательство аналогично и значительно проще.

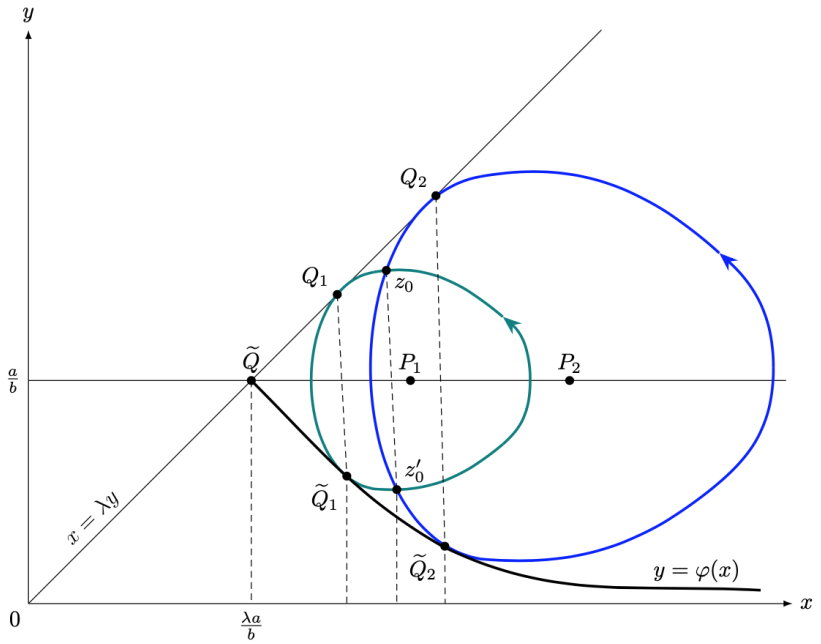



Рис. 4: Два касательных овала, проходящих через точку $z_0$.

Утверждение 5. *Пусть $z_0 \in D \setminus \partial D$, $Q_1$, $Q_2$ — точки касания овалов $\sigma(z_0, u_\tau(Q_1))$, $\sigma(z_0, u_\tau(Q_2))$ с лучом $p$. Пусть $Q_1 < Q_2$. Тогда $u_\tau(Q_1)$ — наименьшее допустимое значение управления (см. Рис.5).*

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть точку $z_0$, для которой $y_0 > \frac{a}{b}$ (см. Рис.5). Поскольку положение равновесия $P(0) \in p^-$, то существуют две точки $R_i(0) = \sigma(z_0, 0) \cap p$, $i = 1, 2$, где $R_1(0) < R_2(0)$. Из (5) в точке $z_0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_0(kbx_0 - m - u}{x_0(a - by_0)} \equiv \tan(z_0, u),$$

откуда

$$\tan(z_0, u) = \tan(z_0, 0) - \frac{y_0}{x_0(a - by_0)}u.$$

Из условия следует, что функция $\tan(z_0, u)$, при фиксированном $z_0$, возрастает относительно $u$. Тогда $R_1 < Q_1 < R_2$, поскольку траектории $\sigma(z_0, 0)$ и $\sigma(z_0, u)$, при $u > 0$, пересекаются только в двух точках $z_0$, $z_0'$ таких, что $x(z_0) = x(z_0')$ (Утверждение 1). По той же причине, для любого $u \in (0, u_\tau(Q_1))$ существуют две точки $R_1(u)$, $R_2(u)$ пересечения $\sigma(z_0, u)$ с лучом $p$: $\{R_1(u),\ R_2(u)\} = \sigma(z_0, u) \cap p$. Пусть $R_1(u) < R_2(u)$. Тогда нетрудно убедиться, что $Q_1 < R_2(u) < R_2(0)$. Следовательно, $\sigma(z_0, u) \cap p^- = \overset{\frown}{R_2(u)R_1(u)}$ — дуга овала $\sigma(z_0, u)$, принадлежащая области $p^-$. Таким образом, при любых $u \in (0, u_\tau(Q_1))$, $n_1$, $n_2$, $0 \le n_1 < n_2$, переход из точки $M_1 = (z_0, n_1)$ в точку $M_2 = (z_0, n_2)$ в области $p^+$ невозможен. Следовательно $u \in (0, u_\tau(Q_1))$ не является допустимым значением управления (см. Определение 1). Утверждение 5 доказано.

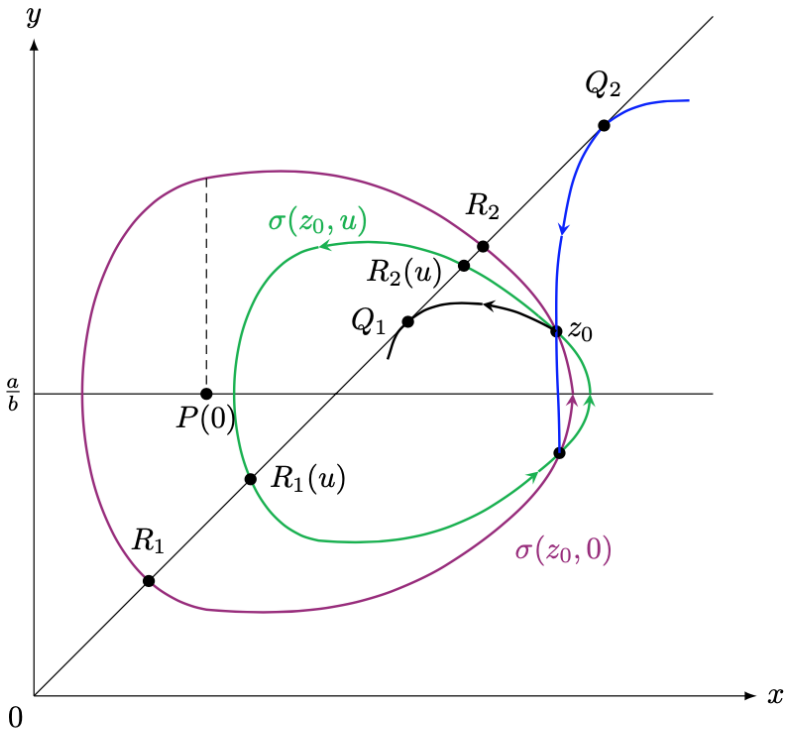



Рис. 5: К доказательству Утверждения 5.

Замечание 5. *Утверждение 5 мотивирует использование касательное управление $u_\tau(Q_1)$ для решения поставленной задачи, что и будет сделано в следующем разделе.*

Найдем множество точек $z_0 \in p^+ \setminus D$, которые попадают в $D$ вдоль траекторий системы (5) при $u = 0$. Пусть $\{\tilde{Q}_1,\ \tilde{Q}\} = \sigma(\tilde{Q}, 0) \cap p$, $\tilde{Q}_1 < \tilde{Q}$, где $\tilde{Q}$ определена в (11). Существование этих точек гарантировано условием $P(0) \in p^-$, или (6).

Рассмотрим дугу $\widehat{\tilde{Q}_1\tilde{Q}} = (p^+ \cup p) \cap \sigma(\tilde{Q}, 0)$ траектории $\sigma(\tilde{Q}, 0)$.

Пусть $p^+ \setminus D = D^- \cup D^+$, где $D^+,\ D^-$ такие множества, что из $D^+$ фазовая точка попадает в $D$ вдоль траекторий системы (5) при $u = 0$, а из $D^-$ — не попадает. Это значит, что если $z_0 \in D^+$, то $\sigma(z_0, 0) \cap D \neq \emptyset$, а если $z_0 \in D^-$, то $\sigma(z_0, 0) \cap D = \emptyset$.

Нетрудно видеть, в силу взаимной вложенности траекторий системы (5) при фиксированном $u > 0$, что $\partial D^- = [\tilde{Q}_1\tilde{Q}] \cup \widehat{\tilde{Q}_1\tilde{Q}}$ (см. Рис.6).

Определение 5. *Множество управляемости, $D_u \in p^+$, это множество точек $z_0$, для которых существует допустимое управление, решающее задачу, поставленную в разделе 2.*

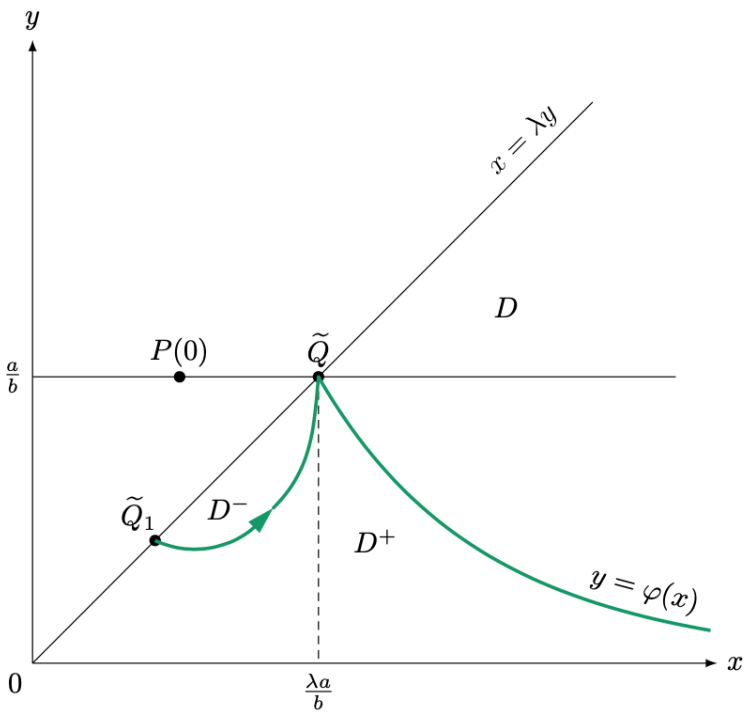



Рис. 6: Множество управляемости $D_u = D \cup D^+$.

В следующем разделе будет показано, что $D_u = D \cup D^+$, то есть для любой точки $z_0 \in D \cup D^+$ будет найдено решение поставленной задачи.

## 5. Решение задачи

В дальнейшем полагаем, что

$$z_0 \in D_u \tag{26}$$

Кроме того, пусть

$$r_v(t_u(z_0), z_0) \in p^+ \cap \{(x, y) : y > \frac{a}{b}\}, \tag{27}$$

то есть управление начинается в точке с достаточно большим значением ординаты. Это естественно и соответствует постановке задачи. С точки зрения излагаемого метода управления, данное условие не вносит изменений по существу: идея метода не изменяется.

### 5.1. Значение $u^*$

Через точку $B = r_v(t_u(z_0), z_0)$ проходят два касательных овала, $\sigma(B, u_\tau(Q_i))$. Пусть $Q_1,\ Q_2$ — точки касания этих овалов с лучом $p$, где $Q_1 \le Q_2$.

Постановка задачи требует в качестве $u^*$ (см. Определение 2) брать наименьшее значение. Тогда из Утверждение 5 следует, что

$$u^* = u_\tau(Q_1), \tag{28}$$

где $Q_1,\ Q_2$ — точки касания овала $\sigma(B, 0)$ и луча $p$, причем $Q_1 < Q_2$ (см. Утверждение 5).

### 5.2. Луч $L$

Используя управление (28), построим финально периодичный процесс управления и получены условия его существования.

Поскольку траектории системы (4) при постоянном $u \ge 0$ принадлежат цилиндрическим поверхностям, $C(z, u)$, то будем говорить, что на промежутке времени $[t,\ t+T(z, u)]$ траектория делает оборот. Тогда $l \in \mathbb{N}$ оборотов траектория делеает на промежутке $[t,\ t + lT(z, u)]$.

Пусть даны начальная точка $M_0 = (z_0, 0) \in D_u$ и начальный момент управления $t_u(z_0)$, удовлетворяющие (26), (27).

Введем в рассмотрение луч $L = L(t_u(z_0))$, на котором будет происходить переключение значений допустимого управления

$$L = \{(x, y, n) : x = x(B), y = y(B), n \ge 0\}, \quad B = r_v(t_u(z_0), z_0). \tag{29}$$

Идея метода управления состоит в следующем. Через точку $B$ могут проходить два или один касательный овал, $\sigma(B, u_\tau(Q_i))$. Пусть $Q_1,\ Q_2$ — точки касания этих овалов с лучом $p$, где $Q_1 \le Q_2$. В момент попадания фазовой точки на луч $L$, полагаем $u = u_\tau(Q_1) \equiv u_\tau$ (см. (12)) и сохраняем это значения управления в течение некоторого времени, кратного периоду $T(B,\ u_\tau)$. В результате, после каждого оборота, фазовая точка поднимается (возрастает $n$) на величину $\Delta(B, u_\tau) > 0$ (см. (7)).

Далее, в момент некоторого очередного попадания на луч $L$, полагаем $u = 0$. Тогда после каждого оборота, фазовая точка спускается (убывает $n$) на величину $\Delta(B, 0) < 0$. Далее, значения $u = 0$ и $u = u_\tau$ чередуются, и переключения между ними происходят на луче $L$. В результате, непрерывная динамика порождает на луче $L$ дискретную динамическую систему, для которой будут получены условия периодичности траекторий. При этом процесс управления строится так, чтобы обеспечить выполнение условия $n(t) > 0$, что дает решение поставленной задачи.

Перейдем к подробному построению метода управления, решающего задачу.

### 5.3. Разбиение луча $L$

Упорядочим точки луча $L$ (29). Пусть $E_1,\ E_2 \in L$. Будем писать $E_1 < E_2$, если $n(E_1) < n(E_2)$.

Пусть $\{A, A'\} = \sigma(z_0, 0) \cap p$, $A < A'$.

Введем точки $B_0, B_1 \in L$ и момент времени $t_A$ такие, что

$$B_0 = r(t_A, A, 0), \quad n(t, A, 0) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, T(z_0, 0)),$$

$$n(B_1) = n(B_0) + |\Delta(M_0, 0)|.$$

Здесь $t_A$ — первый момент времени попадания фазовой точки из $A$ в $B_0$.

Тогда

$$B_0 = r(T(z_0, 0), B_1, 0) = r(t_A + T(z_0, 0), A, 0),$$

то есть траектория при $u = 0$, сделав полный оборот, попадет из $B_1$ в $B_0$.

Обозначим $\Delta_0 = |\Delta(M_0, 0)|$, $n(B_0) = n_0$, $n(B_1) = n_1$. Введем последовательность $\{n_i\}$ такую, что

$$n_i = n_{i-1} + \Delta_0, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Обозначим $B_i = (x(B), y(B), n_i) \in L$ (тогда $B_{i-1} < B_i$). Таким образом, получаем разбиение луча $L$ (см. Рис.7)

$$L = [B, B_0) \cup \cup_{i=0}^{\infty} [B_i, B_{i+1}),$$

где длина $|[B_i, B_{i+1})| = \Delta_0$.

Заметим, что любая точка $M \in \sigma(z_0, 0) \cap p^+$ впервые возвращается на плоскость $n = 0$ вдоль соответствующей траектории при $u = 0$ в область $p^-$.

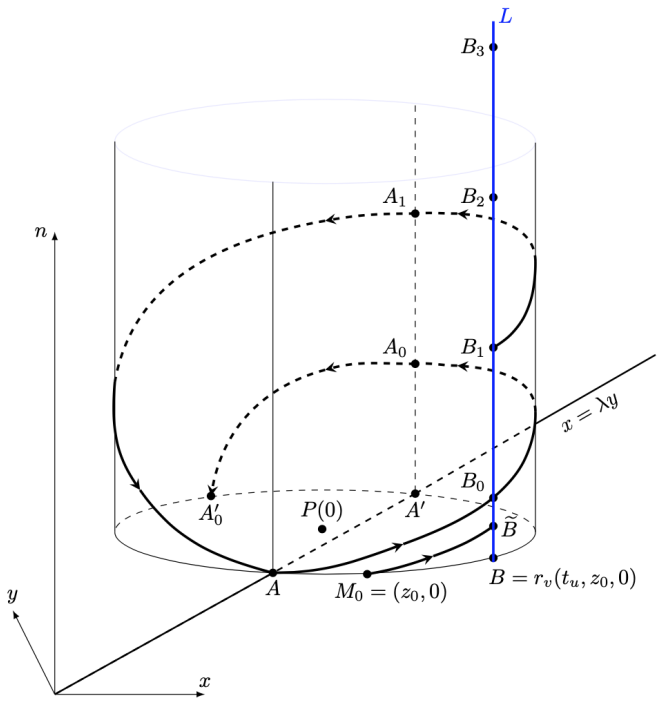



Рис. 7: Разбиение луча $L$ точками $B_i$, $i = 0, 1, 2, ....$

### 5.4. Перевод точки $M_0$ на промежуток $[B_0, B_1) \in L$

Построим управление системой (4), переводящее за конечное время точку $M_0$ на промежуток $[B_0, B_1)$.

Пусть фазовая точка из положения $M_0$ впервые попадает на луч $L$ в точку $\tilde{B} \in L$, то есть

$$\tilde{B} = r(t_u(z_0), M_0, 0) \in L, \quad 0 \le n(t, M_0, 0) < n(\tilde{B}) \quad \text{при} \quad t \in [0, t_u(z_0)).$$

Очевидно, $\tilde{B} \in (BB_0)$.

Заметим, что любая точка $M \in \sigma(z_0, 0) \cap p^+$ впервые возвращается на плоскость $n = 0$ вдоль соответствующей траектории при $u = 0$ в область $p^-$.

В момент попадания фазовой точки на луч $L$, полагаем $u = u_\tau(Q_1) \equiv u_\tau$ (см. (12) и подраздел 5.1) и сохраняем это значение управления до тех пор пока фазовая точка из положения $\tilde{B}$ либо поднимется за конечное время в точку, принадлежащую $[B_0B_1)$ (что возможно при достаточно малом $\Delta(M_0, u_\tau(B)) > 0$), либо поднимется в точку, расположенную выше $B_1$ (что возможно при достаочно большом $\Delta(M_0, u_\tau(B)) > 0$). В последнем случае полагаем $u = 0$ до момента попадания фазовой точчки в $[B_0, B_1)$, что произойдет за конечное время, так как $\Delta(M_0, 0) < 0$ и длина $|[B_0, B_1)| = |\Delta(M_0, 0)|$.

Итак, получили точку $R_0$ первого попадания из $M_0$ в $[B_0,\ B_1)$

$$R_0 \in [B_0,\ B_1).$$

Замечание 6. *Из определения допустимого управления (условие 2) и из (27) следует, что при переводе точки $M_0$ на промежуток $[B_0, B_1) \in L$ при $u = 0$ и $u = u^*$ траектория делает целое число оборотов.*

### 5.5. Построение гомеоморфизма $G_u$

Построим гомеоморфизм

$$G_u : [B_0, B_1) \to [B_0, B_1)$$

как композицию двух гомеоморфизмов, $F_u$ и $G_0$.

1) Гомеоморфизм $F_u$. В момент попадания фазовой точки в $[B_0, B_1)$, в точку $R_0$, полагаем $u = u_\tau(B)$. Выбираем некоторое $s_u \in \mathbb{N}$ такое, что

$$n(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)), B_0, u_\tau(B)) > n_1. \tag{31}$$

Тогда существует единственное $i^* = i(s_u) \in \mathbb{N}$, $i^* > 1$, такое, что

$$r(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)), B_0, u_\tau(B)) \le B_{i^*} < r(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)), B_1, u_\tau(B)). \tag{32}$$

Таким образом, введено отображение сдвига вверх вдоль луча $L$, которое обозначим через $F_u$ (см. Рис.8)

$$F_u : [B_0B_1) \to F_u[B_0B_1),$$

$$F_u(M) = r(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)), M, u_\tau(B)), \quad \text{если } M \in [B_0B_1). \tag{33}$$

Геометрический смысл данного этапа управления состоит в том, что промежуток $[B_0, B_1)$ поднимается вдоль луча $L$ на расстояние $s(u) \cdot \Delta(R_0, u_\tau(B))$, и его образ, $F_u[B_0B_1)$, накрывает точку $B_{i^*}$: $B_{i^*} \in F_u[B_0B_1)$.

Поскольку величина $\Delta(M, u_\tau(B))$ одна и та же для любой точки $M \in L$, то введем обозначение $\Delta_u = \Delta(M, u_\tau(B))$. Очевидно, $\Delta_u > 0$. Таким образом, фазовая точка, двигаясь по цилиндру $C(B, 0) = C(z_0, 0)$, поднимается при каждом обороте на величину $\Delta_u$.

Величина $s_u$ является параметром процесса управления, удовлетворяющим (32).

Обозначим

$$\tilde{R}_1 \equiv F_u(R_0) = r(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)),\ R_0,\ u_\tau(B)).$$

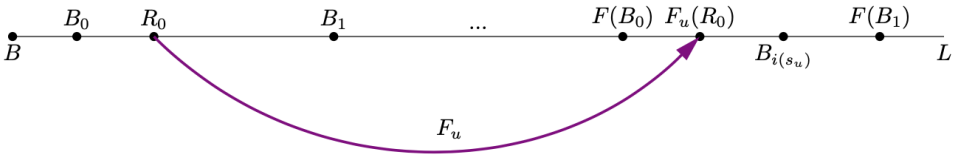



Рис. 8: Гомеоморфизм $F_u$.

2) Гомеоморфизм $F_0$. Далее, в момент времени $t = s_u \cdot T(B, u_\tau(B))$ полагаем $u = 0$, до тех пока при некотором $s_0 \in \mathbb{N}$ не будет выполняться условие

$$r(s_0 \cdot T(B, 0), \tilde{R}_1, 0) \equiv R_1 \in [B_0, B_1).$$

Существование такого $s_0$ обеспечено условием (32) и тем, что $\Delta(M_0, 0) < 0$, $|[B_{i-1}, B_i)| = |\Delta(M_0, 0)|$. При этом величина $s_0$ определяется следующим образом

$$s_0 = \begin{cases} i^* - 1, & \text{если} \quad \tilde{R}_1 \in [F_u(B_0)B_{i^*}), \\ i^*, & \text{если} \quad \tilde{R}_1 \in [B_{i^*}F_u(B_1)). \end{cases} \tag{34}$$

Геометрически, на описанном этапе управления, фазовая точка делает $s_0$ шагов из положения $\tilde{R}_1$ вниз по лучу $L$ в положение $R_1$. При этом каждый шаг имеет величину $|\Delta(\tilde{R}_1, 0)|$. Поскольку для любой точки $M \in L$ величина $\Delta(M, 0)$ имеет одно и то же значение, то введем обозначение $\Delta_0 = |\Delta(M, 0)|$. Таким образом, фазовая точка, двигаясь по цилиндру $C(B, 0) = C(z_0, 0)$, опускается при каждом обороте на величину $\Delta_0$.

Обозначим через $F_0$ построенное отображение сдвига вниз по лучу $L$ (см. Рис.9), то есть

$$F_0 : F_u[B_0B_1) \to [B_0B_1),$$

$$F_0(M) = r(s_o \cdot T(B, 0), M, 0), \quad \text{если } M \in F_u[B_0B_1). \tag{35}$$

Тогда получаем

$$R_1 = F_0(F_u(R_0)). \tag{36}$$

Тем самым построенная композиция $F_0 \circ F_u$ является требуемым гомеоморфизмом, который обозначим $G_u$ (см. Рис.9)

$$G_u = F_0 \circ F_u : [B_0B_1) \to [B_0B_1). \tag{37}$$

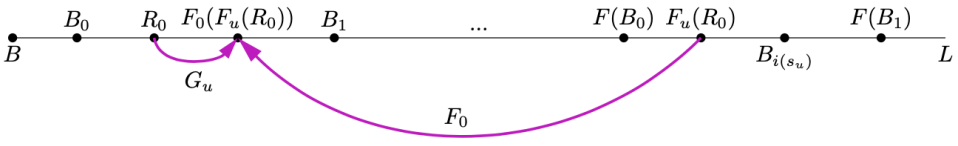



Рис. 9: Гомеоморфизмы $F_0$ и $G_u$.

### 5.6. Гомеоморфизмы окружности

Получим координатную запись отображения $G_u$. Учитывая, что $F_u,\ G_u : L \to L$ и (30), введем функции

$$f_u : [n_0,\ n_1) \to [n(F_u(B_0)),\ n(F_u(B_1))), \quad f_0 : [n(F_u(B_0)),\ n(F_u(B_1))) \to [n_0, n_1)$$

следующим образом

$$F_u(R) = F_u(x(B),\ y(B),\ n) = ((x(B),\ y(B),\ f_u(n)),$$

$$F_0(R') = F_0(x(B),\ y(B),\ n) = ((x(B),\ y(B),\ f_0(n')),$$

где $R \in [B_0,\ B_1)$, $R' \in F_u([B_0,\ B_1))$, $n \in [n_0,\ n_1)$, $n' \in [n(F_u(B_0)),\ n(F_u(B_1))$. Следовательно

$$f_u(n) = n + s_u\Delta_u, \quad f_0(n') = n' - s_0\Delta_0.$$

Обозначим $c_u = f_u^{-1}(n(B_{i^*})) \in [n_0, n_1)$. Тогда, если $g_u = f_0 \circ f_u : [n_0, n_1) \to [n_0, n_1)$, то

$$g_u(n) = \begin{cases} f_u(n) - (i^* - 1)\Delta_0, & \text{если} \quad n \in [n_0, c_u), \\ f_u(n) - i^*\Delta_0, & \text{если} \quad n \in [c_u, n_1). \end{cases} \tag{38}$$

Подставляя в (38) выражение для $f_u(n)$, получим

$$g_u(n) = \begin{cases} n + s_u\Delta_u - (i^* - 1)\Delta_0 = n + \gamma_u, & \text{если} \quad n \in [n_0, c_u), \\ n + s_u\Delta_u - (i^* - 1)\Delta_0 - \Delta_0 = n + \gamma_u - \Delta_0, & \text{если} \quad n \in [c_u, n_1), \end{cases} \tag{39}$$

где $\gamma_u = s_u\Delta_u - (i^* - 1)\Delta_0$. Окончательно получаем

$$g_u(n) = n + s_u\Delta_u (\mathrm{mod}\Delta_0), \tag{40}$$

где $n \in [n_0, n_1)$.

Сделаем замену $n \to \frac{n}{\Delta_0} = v \in [0, 1)$. Тогда вместо $g_u$ получаем $\tilde{g}_u : [0, 1) \to [0, 1)$

$$\tilde{g}_u(v) = v + \frac{s_u\Delta_u}{\Delta_0} (\mathrm{mod}1). \tag{41}$$

Если полуинтервал $[0, 1)$ отождествить с единичной окружностью $S^1$, то можно рассматривать $\tilde{g}_u$ как гомеоморфизм $\tilde{g}_u : S^1 \to S^1$, а именно, поворот $S^1$ на угол $2\pi \cdot \frac{s_u\Delta_u}{\Delta_0}$.

Таким образом, построенный процесс управления порождает дискретную динамическую систему, задаваемую гомеоморфизмом поворота окружности $\tilde{g}_u : [0, 1) \to [0, 1)$.

Пусть $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, $\{\tilde{g}_u^j(v),\ j \in \mathbb{Z}_+ \cup 0\}$ – положительная полутраектория точки $v \in [0, 1)$, порожденная отображением $\tilde{g}_u$. Тогда получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Полутраектория $\{\tilde{g}_u^j(v),\ j \in \mathbb{Z}_+ \cup 0\}$ периодична для любой точки $v \in [0, 1)$ тогда и только тогда, когда $\frac{\Delta_u}{\Delta_0} \in \mathbb{Q}$.*

*При этом, если $\frac{s_u \cdot \Delta_u}{\Delta_0} = \frac{m_1}{m_2}$ – несократимая рациональная дробь, где $m_1,\ m_2 \in \mathbb{N}$, то период полутраектории $\{\tilde{g}_u^j(v),\ j \in \mathbb{Z}_+ \cup 0\}$ равен $m_2$ для любой точки $v \in [0, 1)$.*

Доказательство. Поскольку гомеоморфизм $\tilde{g}_u$ является поворотом окружности на постоянный угол $2\pi \cdot \frac{s_u\Delta_u}{\Delta_0}$, то утверждение теоремы очевидно (см., например, [17]).

Полученный результат позволяет найти период $\theta$ финально периодического решения системы (4). Пусть $i_l = s_0$ — количество сдвигов вниз при $l$-ой итерации, то есть $i_l \in \{i^* - 1, i^*\}$,

$l = 1, 2, ....m_2$, где $m_2$ –период управляемой полутраектории $\{\tilde{g}_u^j\}$. Под итерацией понимается однократное применение гомеоморфизма $G_u$. Тогда

$$\theta = s_u \cdot m_2 \cdot T(B, u_\tau(B)) + T(B, 0) \cdot \sum_{l=1}^{m_2} i_l. \tag{42}$$

Пусть фазовая точка впервые попадает на промежуток $[B_0,\ B_1)$, в точку $R_0$ (см. подраздел 5.2), в момент времени $t = t'(z_0)$. Тогда

$$u(t) = u(t+\theta), \quad r(t,\ R_0,\ u(t)) = r(t+\theta,\ R_0,\ u(t+\theta)), \quad t \in [t'(z_0), \infty). \tag{43}$$

Таким образом, построено допустимое управление, решающее задачу, поставленную в разделе 2.

Замечание 7. *Для нахождения периодов системы Лотки-Вольтерра, которые входят как в выражения (42), (43), так и в условие Теоремы 2, разработаны методы (см. [9], [18], [19]), позволяющие получить приближенно их значения.*

Пример 6. *Пусть* $\frac{\Delta_u}{\Delta_0} = \frac{1}{4}$, $i^* = 2$, $s_u = 4, 5, 6, 7, 8$ – *все значения* $s_u$, *для которых справедливо условие (32). Тогда получаем следующие наборы значений* $m_2$ *и* $i_l$, *в зависимости от выбранного значения* $s_u$

$$\begin{aligned} &s_u = 4,\ m_2 = 1,\ i_1 = 1, && s_u = 5,\ m_2 = 4,\ i_1 = 1,\ i_2 = 1,\ i_3 = 1,\ i_4 = 2,\\ &s_u = 6,\ m_2 = 2,\ i_1 = 1,\ i_2 = 2, && s_u = 7,\ m_2 = 4,\ i_1 = 1,\ i_2 = 2,\ i_3 = 2,\ i_4 = 2,\\ &s_u = 8,\ m_2 = 1,\ i_1 = 2. \end{aligned}$$

## 5.7. Обобщение допустимого управления

Обобщим понятие допустимого управления, сформулированное в Определении 2. Расширим множество значений допустимого управления: $u_i \in \{v_j : v_j > 0,\ j = 1, ..., m\}$. Кроме того, отбросим условие 2. Тогда появляется возможность строить дискретную периодическую динамику, организуя переключения управления на лучах $L(\hat{z}) = \{(\hat{z}, n) : \hat{z} \in D, n \geq 0\}$, где $\hat{z} \in \sigma(z_0, 0)$. При этом в качестве значений $v_j$ по-прежнему используются касательные управления.

Для доказательства существования периодических траекторий естественно использовать теорему Пуанкаре об ориентированных гомеоморфизмах окружности, которые уже могут не являться поворотами на постоянный угол. Периодичность обеспечивается рациональностью числа вращения. В этом случае возникает задача о нахождении периодических траекторий. Заметим, что приведенные изменения сохраняют возможность практической реализации метода управления.

## 5.8. Двойное вращение

Рассмотрим следующее обобщение процесса управления, построенного в Разделе 5. Введем пороговую точку $C \in (B_0, B_1)$. Фиксируем два значения $s'_u,\ s''_u \in \mathbb{N}$, $s'_u < s''_u$, удовлетворяющие условию (31). Этим значениям соответствуют точки $B_{i^*},\ B_{j^*} \in L$, для которых $i^*,\ j^* \in \mathbb{N}$, $1 < i^* < j^*$, и, соответственно, $B_{i^*} < B_{j^*}$, удовлетворяющие (32).

Пусть $s_u = s'_u$, если $R_0 \in [B_0, C)$, или $s_u = s''_u$, если $R_0 \in [C, B_1)$. Смысл такого управления состоит в следующем. При более близком расположении точки $R_0$ к плоскости $n = 0$, то есть при $R_0 \in [B_0, C)$, естественно "подстраховаться"и строить отображение $F_u$, поднимающее точку $R_0$ выше, чем в случае $R_0 \in [C, B_1)$, то есть когда точка $R_0$ расположена дальше от плоскости $n = 0$.

Тогда вместо отображения (41) получаем отображение

$$\tilde{h}_u(v) = \begin{cases} v + \frac{s'_u \Delta_u}{\Delta_0} (\mathrm{mod} 1), & \text{если} \quad v \in [0,\ \frac{n(C)}{\Delta_0}), \\ v + \frac{s''_u \Delta_u}{\Delta_0} (\mathrm{mod} 1), & \text{если} \quad v \in [\frac{n(C)}{\Delta_0},\ 1), \end{cases} \tag{44}$$

называемое двойным поворотом (double rotation), или двухцветным поворотом окружности ([6], [7]). Отображение $\tilde{h}_u$ уже не является гомеоморфизмом: в общем случае оно необратимо и разрывно. При этом возникает вопрос: найдутся ли такие $i^*,\ j^*,\ s'_u,\ s''_u$, для которых управляемый процесс будет финально периодичным? Если ответ положительный, то для каких точек промежутка $[B_0,\ B_1)$ будет иметь место периодичность?

Говорят, что двойной поворот относится к конечному типу, если его аттрактор — интервал, а к бесконечному — если замыкание аттрактора является канторовым множеством ([20]). При этом ограничение двойного поворота конечного типа на его аттрактор является обычным поворотом. Тогда для построения периодического процесса управления актуальной становится задача нахождения соответствующего аттрактора. Последнее подкрепляется тем, что двойной поворот почти для всех, в смысле меры Лебега, точек пространства параметров, $\frac{s'_u \Delta_u}{\Delta_0},\ \frac{s''_u \Delta_u}{\Delta_0},\ \frac{n(C)}{\Delta_0}$, задающих поворот, относится к конечному типу [21].

## 6. Заключение

Построена и исследована модель управления непрерывной динамикой биосообщества, которая порождает дискретную динамическую систему, индуцирующую гомеоморфизмы окружности. Получены условия, в терминах коэффициентов и вольтерровских периодов, существования периодических траекторий управляемых непрерывной и дискретной систем. Для модели управления, порождающей двойные повороты окружности, сформулированы задачи нахождения ее аттрактора и периодических траекторий.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллов, А. Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обозр. прикл. промышл. мат. 1999. Т. 6, №2. С. 819-836.

2. Colonius, F. Optimal periodic control. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. 177 p.

3. Арнольд, В. И. Выпуклые оболочки и повышение производительности систем при пульсирующей загрузке // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28, №4. С. 29-31.

4. Давыдов, А. А., Мельник, .Д. А. Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, №2. С. 99-107.

5. Hausrath, A. R., Manasevich R. F. Periodic solutions of periodically harvested Lotka-Volterra systems // Revista Colombiana de Matematica. 1987. Vol. 21. P. 337-346.

6. Suzuki, H., Ito, S., Aihara, K. Double rotations// Discrete Contin. Dyn. Syst. 2005. Vol. 13, iss. 2. P. 515-532.

7. Журавлев, В. Г. Двухцветные повороты единичной окружности //Изв. РАН. Сер. Матем. 2009. Т. 73, в. 1. С. 79-120.

8. Кириллов, А. Н., Иванова, А. С. Периодический и квазипериодический процессы управления в задаче сохранения видового состава биосообщества // Труды Карельского научного центра РАН. 2015. №10. С. 99-106.

9. Кириллов, А. Н., Иванова, А. С. Численное моделирование периодического процесса, сохраняющего видовую структуру биосообщества// Математическое моделирование. 2021. Т. 33, №6. С. 59-72.

10. Hamilton, W. Geometry for the selfish herd// J. Theor. Biology. 1971. Vol. 31, iss. 2. P. 295-311.

11. Gorcke, A. The influence of past in a population system involving intraspecific competition and Allee effect // Eur. Phys. J. Plus. 2022. Vol. 137, article number 200. P. 1-11.

12. Arditi, R., Ginzburg, L. R. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence // J. Theor. Biology. 1989. Vol. 139, iss. 3. P. 311-326.

13. Chen, X., Huang, L. A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 428, iss. 2. P. 817-837.

14. Hamdallah, S. A, Arafa, A. A. Stability analysis of Filippov prey–predator model with fear effect and prey refuge // J. Appl. Math. Comput. 2023. URL: https://doi.org/10.1007/s12190-023-01934-z.

15. Ivanova, A. S., Kirillov, A. N. Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem // Autom. Remote Control. 2017. Vol. 78, №8. P. 1500-1511.

16. Кириллов, А. Н., Сазонов, А. М. Гибридная модель динамики популяций с режимом убежища: регуляризация и самоорганизация// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33, в. 3. С. 467-482.

17. Каток, А. Б., Хасселблат, Б. Введение в теорию динамических систем. М.: МЦНМО, 2005. 464 с.

18. Shagi,-Di S. The period of a Lotka—Volterra system // Taiwanese J. Math. 1997. Vol. 1, №4. P. 451-470.

19. Waldvogel, J. The period in the Lotka—Volterra system is monotonic // Journal of mathematical analysis and applications. 1986. Vol. 114, iss. 1. P. 178-184.

20. Artigiani, M., Fougeron, Ch., Hubert, P., Skripchenko, A. A note on double rotations of infinite type // Труды ММО. 2021. Т. 82, в. 1. С. 185-203.

21. Bruin, H., Clack, G. Inducing and unique ergodicity of double rotations // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2012. Vol. 32, iss. 12. P. 4133–4147.

## REFERENCES

1. Kirillov, A. N. 1999, "Ecological systems with variable dimension", *Obozr. Prikl. Promyshl. Mat.*, vol. 6, no. 2, pp. 819-836 (in Russian).

2. Colonius, F. 1988, "Optimal periodic control", *Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag*, 177 p.

3. Arnold, V. I. 1987, "Convex hulls and the increase of efficiency of systems under impulse loading", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 28, issue 4, pp. 540-542.

4. Davydov, A. A., Melnik, D. A. 2021, "Optimal states of distributed exploited populations with periodic impulse selection", *Tr. IMM UrO RAN*, vol. 27, no. 2. pp. 99-107.

5. Hausrath, A. R., Manasevich, R. F. 1987, "Periodic solutions of periodically harvested Lotka-Volterra systems", *IRevista Colombiana de Matematica*, vol. 21, pp. 337-346.

6. Suzuki, H., Ito S. & Aihara, K. 2005, "Double rotations", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, vol. 13, issue 2, pp. 515-532.

7. Zhuravlev, V. G. 2009, "Two-colour rotations of the unit circle", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 73, issue 1, pp. 79-120.

8. Kirillov, A.N., Ivanova, A.S. 2015, "Periodic and quasiperiodic control processes in the biocommunity species composition preserving problem", *Tr. Karel. Res. Centr. RAS*, no. 10, pp. 99-106.

9. Kirillov, A. N., Ivanova, A. S. 2022, "Numerical Modeling of a Periodic Process That Preserves the Species Structure of a Biocommunity", *Math. Models Comput Simul.*, vol.14, no. 1, pp. 38-46.

10. Hamilton, W. 1971, "Geometry for the selfish herd", *J. Theor. Biology*, vol. 31, issue 2, pp. 295-311.

11. Gorcke, A. 2022, "The influence of past in a population system involving intraspecific competition and Allee effect", *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 137, article number 200, pp. 1-11.

12. Arditi, R., Ginzburg, L.R. 1989, "Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence", *J. Theor. Biology*, vol. 139, issue 3, pp. 311-326.

13. Chen, X., Huang, L. 2015, "A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 428, issue 2, pp. 817-837.

14. Hamdallah, S. A, Arafa, A. A. 2023, "Stability analysis of Filippov prey–predator model with fear effect and prey refuge", *J. Appl. Math. Comput.*, https://doi.org/10.1007/s12190-023-01934-z.

15. Ivanova, A.S., Kirillov, A.N. 2017, "Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem", *Autom. Remote Control* vol. 78, no. 8, pp. 1500-1511.

16. Kirillov, A.N., Sazonov, A.M. 2023, "A hybrid model of population dynamics with refuge-regime: regularization and self-organization", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, vol 33, issue 3, pp. 467-482.

17. Hasselblatt, B., Katok, A. 2003, "A first course in dynamics", *Cambridge: Cambridge University Press*, 424 p.

18. Shagi-Di, S. 1997, "The period of a Lotka—Volterra system", *Taiwanese J. Math.*, vol. 1, no. 4, pp. 451-470.

19. Waldvogel, J. 1986, "The period in the Lotka—Volterra system is monotonic", *J. MATH. ANAL. APPL.*, vol. 114, issue 1, pp. 178-184.

20. Artigiani, M., Fougeron, Ch., Hubert, P. & Skripchenko, A. 2021, "A note on double rotations of infinite type", *Tr. Moskov. Matem. Obsh.*, vol. 82, issue 1, pp. 185-203.

21. Bruin H., Clack, G. 2012, "Inducing and unique ergodicity of double rotations", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, vol. 32, issue 12, pp. 4133–4147.

Получено: 30.05.24
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-113-125

# О группе классов форм высоких степеней

С. А. Мешаик

**Мешаик Сеймур Ариф оглы** — доктор философии по математике, Гянджинский государственный университет (г. Гянджа, Азербайджан).
*e-mail: seymurmeshaik82@gmail.com*

**Аннотация**

В теории чисел группы классов форм были введены Гауссом для бинарных квадратичных форм. Гаусс ввел понятия эквивалентности и композиции и определил групповую структуру во множестве классов эквивалентности в семействе квадратичных форм с дискриминантами, не делящимися на квадрат целого числа. Дальнейшие исследования были развиты в разных направлениях. Одним из них является обобщение теории на квадратичные формы от большего числа переменных, где широко изучены вопросы, связанные с представлением целых чисел различными квадратичными формами. Другое направление относится к понятию композиции. Однако с ростом количества переменных становится все труднее введение понятия композиции форм. В 1898 г. А. Гурвиц показал, что для квадратичных форм с числом переменных больше 8 очень сложно ввести удовлетворительное понятие композиции. Этот феномен впоследствии был разъяснен Ю. В. Линником с точки зрения теории некоммутативных алгебр с делением. Установлено, что понятие «дискриминанта» не имеет столь существенного значения для форм высших степеней, чем для квадратичных форм. Хорошо известна строгая разница между свойствами форм степени выше 2 с одинаковыми дискриминантами. Для устранения этих трудностей удобно рассмотреть формы, связанные с данным расширением.

*Ключевые слова:* группы, классы форм, алгебраические расширения, дедекиндовы поля.

*Библиография:* 9 названий.

**Для цитирования:**
Мешаик, С. А. О группе классов форм высоких степеней // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 113–125.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-113-125

# On the group of form classes of large degree

S. A. Meshaik

**Meshaik Seymur Arif ogly** —PhD in mathematics, Ganja State University (Ganja, Azerbaijan).
*e-mail: seymurmeshaik82@gmail.com*

**Abstract**

Groups of form classes were introduced in Number Theory by Gauss, for binary quadratic forms. He defined the notions of equivalence and composition and introduced a group structure in classes of equivalence for the family of quadratic forms with discriminants not divisible by a square of integral number. Further investigations of Gauss were developed in various directions. One of them is a generalization of the theory to multivariate quadratic forms, in which widely studied questions on representation of integral numbers by various quadratic forms. Other direction concerns the notion of composition. But with the growth of the number of variables the question stands very difficult. In 1898, A. Hurwits showed that for quadratic forms with the number of variables greater than 8, it is hard to introduce suitable notion of composition. This result of A. Hurwits was explaned by Y. V. Linnik from non-associative algebras' point of a view. It is established that the notion of discriminant for forms of high degree is not so substantive as for quadratic forms. Sometimes, strict difference between forms having one and the same discriminant, is well known. To overcome these difficulties, it is convenient to consider forms connected with given extension of the field.

*Keywords:* groups, form classes, algebraic extensions, dedekind rings.

*Bibliography:* 9 titles.

**For citation:**
Meshaik, S. A. 2024, "On the group of form classes of large degree" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 113–125.

## 1. Introduction

Groups of form classes were introduced in Number Theory by Gauss, for binary quadratic forms. He defined the notions of equivalence and composition and introduced a group structure in classes of equivalence for the family of quadratic forms with discriminants not divisible by a square of integral number. Further investigations of Gauss were developed in various directions.

One of them is a generalization of the theory to multivariate quadratic forms, in which widely studied questions on representation of integral numbers by various quadratic forms. Other direction concerns the notion of composition. But with the growth of the number of variables the question stands very difficult. In 1898, A. Hurwitz ([6]) showed that for quadratic forms the number of variables greater than 8, it is hard to introduce suitable notion of composition (see also [8-9]). This result of A. Hurwitz was explained by y. V. Linnik from non-associative algebras' point of a view ([7]).

It is established that the notion of discriminant for forms of high degree is not so substantive as for quadratic forms. Sometimes, strict difference between forms having one and the same discriminant, is well known ([5]). To overcome these difficulties, it is convenient to consider forms connected with given extension of the field.

One of mostly studied questions of Number Theory is a question on representation of natural numbers by quadratic forms. Simplest problem of such category serves the Pell equation [1-2, 5]:

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

The form $F(x, y) = x^2 - 2y^2$ in the left hand side can not be represented as a product of two linear forms over the field of rational numbers. Easily this may be proved supposing contrary. Really, let we have, for some rationlal numbers $a$ and $b$:

$$x^2 - 2y^2 = (x - ay)(x - by) = x^2 - (a + b)xy + aby^2;\ a, b \in \mathbf{Q}.$$

It is obvious that $a = -b$ and $ab = -a^2 = -2 \Rightarrow a^2 = 2$. But this is impossible. The obtained contradiction gives the result.

Despite that, the fact on decomposability of this form into two linear forms over the field of real numbers plays important role:

$$F(x,y) = (x - \sqrt{2}y)(x + \sqrt{2}y).$$

Definition. The form $F(x_1, ..., x_n)$ in $n$ variables is called a decomposable form if it can be factorized into linear forms in some extension of the field of rational numbers $E/\mathbf{Q}$.

As an example of decomposable forms in two variables it can be taken any form of a view

$$F(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n$$

with rational coefficients. It is obvious that if the polynomial

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

have roots $\alpha_1, ..., \alpha_n$, then the considered form can be written as follows:

$$F(x,y) = a_0(x - \alpha_1 y)\cdots(x - \alpha_n y).$$

## 2. Normal form (principle form)

Let a polynomial $F(x)$ be irreducible over a field $\boldsymbol{K}$. Then the extension $\boldsymbol{K}(\alpha)$ of the field by joining of some its root is an simple extension of degree $n$. Since the polynomial $F(x)$ is irreducible, then it has not repeated roots. From the theory of matrices [3, 10-15] it is known that in some extension $\boldsymbol{E/K}$ of the field $\boldsymbol{K}$ the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - a_1 \end{pmatrix}$$

is similar to diagonal matrix, that is

$$A = L\Lambda L^{-1},$$

and the matrix $\Lambda$ is a diagonal matrix with diagonal entries $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ . Then we have:

$$\Phi(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) = \det C_0 + C_1A + \cdots + C_{n-1}A^{n-1}) =$$

$$= \det(LL^{-1}) \det(C_0I + C_1A + \cdots + C_{n-1}A^{n-1});\ C_i = diag\{c_i, ..., c_i\}.$$

It is clear that using properties of determinants, we can write:

$$\Phi(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) = \det(C_0I + C_1A + \cdots + C_{n-1}A^{n-1}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(c_0 + c_1\alpha_i + ... + c_{n-1}\alpha_i^{n-1}\right).$$

The expression in the last right hand side is called a norm of the element $\alpha$. As it is obvious, the equality

$$\Phi(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) = 0$$

is possibly then and only then when for some root $\alpha_i$ of the polynomial $F(x)$ we have

$$c_0 + c_1\alpha_i + ... + c_{n-1}\alpha_i^{n-1} = 0.$$

From here one derives:

$$c_0 = c_1 = ... = c_{n-1} = 0.$$

So,

$$c_0 = c_1 = ... = c_{n-1} = 0 \Leftrightarrow N(\xi) = 0;$$

here $\xi = c_0 + c_1\alpha + ... + c_{n-1}\alpha^{n-1}$ and $N(\xi)$ denotes the norm of the element $\xi$. Since

$$N(\xi) = \det(C_0 I + C_1 A + \cdots + C_{n-1}A^{n-1}),$$

then the equality $N(\xi) = 0$ is equivalent to the equality

$$\det(C_0 I + C_1 A + \cdots + C_{n-1}A^{n-1}) = 0.$$

Isomorphism $F(\alpha) \cong F(A)$ shows that we again must have $c_0 = c_1 = ... = c_{n-1} = 0$.

Suppose now the equation

$$\Phi(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) = 0$$

has trivial zero solutions only. To show that the polynomial $F(x)$ is irreducible, suppose the contrary. Let there exist polynomials $g(x)$ and $h(x)$ such that $F(x) = g(x)h(x)$, with $degg(x) \geq 1$ and $degh \geq 1$. Then, $g(\alpha) = 0$ and the isomorphism $F(\alpha) \cong F(A)$ shows that $g(A) = 0$. Therefore, if the numbers $g_0, \ldots, g_k, k < n$ are coefficients of the polynomial $g(x)$, then taking

$$c_0 = g_0, \ldots, c_k = g_k, c_{k+1} = 0, \ldots, c_{n-1} = 0,$$

we get: $\Phi(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) = N(g(A)) = 0$. That means that the equation $\Phi(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) = 0$ has non-trivial solution. But this contradicts the isomorphism $F(\alpha) \cong F(A)$ , because in consent with this isomorphism we must have

$$g(\alpha_i) = c_0 + c_1\alpha_i + ... + c_{k-1}\alpha_i^{k-1} = 0,$$

for some index $i$. Therefore, denoting by $\varphi(x)$ a minimal polynomial of this element we see that $g(x) \vdots \varphi(x)$ which shows that the polynomial $F(x)$ is decomposable.

So, we have established the statement.

Theorem 1. For decomposability of a polynomial $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \boldsymbol{K}[x]$ it is necessary and sufficient that the homogeneous polynomial in $n$ variables $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$

$$\Phi(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) = \det(C_0 + C_1 A + \cdots + C_{n-1}A^{n-1})$$

has in the field $\mathbf{K}$ non-trivial roots.

The form defined in Theorem 1 is called a normal form. We shall call it as a principle form also. The normal form is a decomposable form.

## 3. Criteria for divisibility by a prime ideal

Definition 1. Let $\mathbf{K}$ be some algebraically closed field, and $\alpha_1, ..., \alpha_n$ be some its elements. The set of all linear combinations with coefficients in $\mathbf{K}$ is called a module in the field $\mathbf{K}$. The numbers $\alpha_1, ..., \alpha_n$ are called the generators of the module.

One and same module can be defined by different generators. The module is denoted as $M = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, using generators.

Definition 2. Two modules M and $M_1$ are called similar, if for some element $\alpha \in \mathbf{K}$ the equaity $M_1 = \alpha M$ is satisfied.

The norm $N(c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n)$ of the element $c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n$ is a form which we call to be form connected to the module M.

Definition 3. If the module M given in algebraic extension $\mathbf{K}$ of the field of rational numbers degree $n$ contains $n$ elements linearly independent over the field of rational numbers, is called to be full module, otherwise this module is called non-full module.

The form connected to full module is called full form, otherwise it is called non-full form. For example, the numbers $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ form a basis of the field $\mathrm{Q}(\sqrt[3]{2})$ . By this reason the form below is a full form:

$$N(x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}) = x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz.$$

But the form $F(x, y, z) = x^3 + 2y^3$ is non-full, which can be derived from the full form by taking z=0.

Studying of ideals and their properties are exclusively valuable for applications to the theory of Diophantine equations. This is caused by the uniqueness of decomposition of ideals in the ring of integral elements of the number field into the product of prime ideals. However, in applications it arises a problem of extracting necessary consequences concerning integral elements of the field, often. This is a difficult question the decision of which depends on properties of the group of ideals' classes. This idea which for the first time has been found by Kummer E. E. (in the terms of ideal complex numbers), was further developed by efforts of the subsequent generations of researchers, and has led to the creation of the modern theory of algebraic numbers. The questions related to the history of the problem is possible be found in [1-2]. We will adhere basically everywhere throughout the paper the notions and designations from [4]. Some properties of the ideals connected with the divisibility is possible to interpret in the language of congruencies for the elements of the basic field, and often this stands useful in a concrete case.

Let we are given with some Dedekind field $\mathbf{K}$ with a ring of integral elements $K$. $\kappa$ is an algebraic extension of the field $\mathbf{K}$: $\kappa = \mathbf{K}(\theta)$, where $\theta \in \kappa$ is a primitive element with a minimal polynomial

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,\ a_i \in K.$$

Let's assume that the natural basis generated by the powers of this element is fundamental, that is, the module generated by this basis coincides with $K$. Then, each element of a kind

$$\alpha = c_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + c_1\theta + c_0,\ c_i \in K$$

is an integral element of the field $\kappa$, and on the contrary, each integral element has the specified representation. We shall designate the set of all integral elements of the field $\kappa$ by $K'$. Kummer had proved the following theorem.

Theorem 2. The decomposition of the prime ideal $\rho$ of the ring $K$ runs in $\kappa$ parallel in every respect to the decomposition of $f(x)$ in $K_\rho$.

The theorem 1 means that if over the field $K_\rho$ the polynomial $f(x)$ has a factorization

$$f = \varphi_1^{e_1} \cdots \varphi_g^{e_g},$$

or in congruencies

$$f(x) \equiv \varphi_1^{e_1} \cdots \varphi_g^{e_g} (mod \rho), \tag{1}$$

where the polynomials $\varphi_1, ..., \varphi_g$ are irreducible $(mod\rho)$, then the ideal $\rho$ is decomposable over the $\kappa$ into the product of prime ideals

$$\pi_i = (\rho, \varphi_i(\theta)), i = 1, ..., g$$

as follows:

$$\rho = \pi_1^{e_1} \cdots \pi_g^{e_g},$$

and degree of an ideal $\pi_i$ is equal to the degree of corresponding polynomial $\varphi_i(x)$ (see [4, p. 83,] or [5, p. 267]). From here we receive a criterion for divisibility of an element by the prime ideal $\pi_i$:

Consequence 1. For divisibility of an element

$$\alpha = c_0 + c_1\theta + \cdots + c_{n-1}\theta^{n-1}$$

by the prime ideal $\pi_i$ it is necessarily and sufficient that the polynomial

$$\alpha(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$$

was divisible by $\varphi_i(x)$ over the field $K_\rho$.

It is possible to give a "numerical analogue"of this statement useful in concrete applications. For the formulation of this analogue we shall write down $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ as

$$\varphi(x) = x^r + b_1 x^{r-1} + \cdots + b_r;\ b_1, ..., b_r \in K$$

and form on a companion matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_r \end{pmatrix}$$

of order $r$. Under the theorem of Keyley and Hamilton we have $\varphi(B) = 0$. Since the polynomial $\varphi$ is indecomposable then it will be a minimal polynomial for $B$ over the field $K_\rho$. By the property of the minimal polynomial and the theorem of Kummer the following relation is satisfied.

Consequence 2. Following relation is true:

$$\alpha \vdots \pi_i \Leftrightarrow c(B) \equiv 0(mod\rho).$$

Let $\alpha$ be an algebraic number with minimal polynomial

$$f(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n.$$

Every element of the ring $Z[\alpha]$ can be written as an expression

$$c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

with integral coefficients. Suppose that $\pi$ is a prime ideal of degree 1: $N(\pi) = p$. From the theory of algebraic numbers it is best known that the number $c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$ is divisible by $\pi$ iff

$$c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots + c_{n-1}a^{n-1} \equiv 0(modp);$$

here the number $a$ is a solution of the congruence $f(a) \equiv 0(modp)$ .

## 4. Group of units

Two integral algebraic numbers of Dedekind fields with equal norms differ each from other by multipliers with the norm 1. Elements of the norm 1 set up a group which is called a group of units. The structure of this group is settled by the theorem of Dirichlet. To introduce the Dirichlet's theorem, let us consider some auxiliary geometric constructions.

Consider some algebraic extension $\mathbf{K}$ of degree $n$ of the field of rational numbers. Then, by Fundamental Theorem of Algebra, this extension has $n$ various isomorphisms in the field of complex numbers.

Definition 1. If image of an isomorphism $\sigma : \mathbf{K} \to \mathrm{C}$ is a subset of real numbers then it called real isomorphism, otherwise it called complex isomorphism.

For example, if $\mathbf{K} = Q(\sqrt[3]{5})$ then an isomorphism $\theta \mapsto \sqrt[3]{5}$ is real (here $\theta^3 = 5$). But the isomorphism $\theta \mapsto \sqrt[3]{5}(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3)$ is complex. Suppose that the isomorphism $\sigma : \mathbf{K} \to \mathrm{C}$ is real. Then the isomorphism $\bar{\sigma} : \mathbf{K} \to \mathrm{C}$ defined as

$$\bar{\sigma}(\alpha) = \overline{\sigma(\alpha)},\ \alpha \in \mathbf{K}$$

also is complex, which is called conjugate to $\sigma$.

Suppose that there is $s$ real isomorphisms and $2t$ pairwisely conjugate complex ones. Construct some $s + 2t$ dimensional linear space with elements

$$(x_1, ..., x_s; x_{s+1}, ..., x_{s+t}),$$

where first $s$ components are real, and others are complex numbers. This linear space will be a linear space of dimension $s+2t$ over the field of real numbers.

Definition 2. Let $e_1, \ldots, e_m$, $m \leqslant n$, be linearly independent elements of $R^n$. All of linear combinations of a view $a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m$ , with rational coefficients $a_1, \ldots a_m$, called a lattice in $R^n$. If $m = n$ then the lattice is called to be full, otherwise it called non-full.

The set of all linear combinations $a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m$, with coefficients $a_1, \ldots a_m, 0 \leqslant a_i < 1$, is called to be fundamental parallelepiped of the lattice.

Lemma 1. In D there are units $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r,\ r \leqslant s + t - 1$ such that every unit $\varepsilon$ of $D$ is uniquely represented in the form

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_r^{\alpha_r},$$

where $\alpha_1, ..., \alpha_r$ are rational numbers, and $\zeta$ is some root from 1 in D.

Lemma 2. Elements of full module $M$ of the field K extension's degree of which is $n = s + 2t$, is represented as a lattice in the space $R^n$, the volume of fundamental parallelepiped of which is $2^{-t}\sqrt{D}$ (here $D$ is a discriminant of the module M).

The basic result of the geometric theory is a theorem of Minkowski.

Lemma 3. Suppose that in $n$-dimensional space $R^n$ is given some full lattice with the fundamental parallelepiped $\Delta$. Then every central symmetric convex set X with the volume $v(X) \geqslant 2^n \Delta$ contains at least one point of the lattice different from the origin.

From this theorem, as a consequence we get the following statement.

Lemma 4. (Dirichlet's theorem). In every algebraic field K of degree $n=s+2t$, with module U of integral elements, there are $r = s + t - 1$ number of such units $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r$ that for every unit $\varepsilon \in U$ uniquely can be represented in the view

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_r^{\alpha_r},$$

in which $\alpha_1, ..., \alpha_r$ are rational numbers, and $\zeta$ is a root from 1 in $U$.

## 5. Group of form classes

The basic result of the Gauss' theory of quadratic forms is that that the group of binary quadratic forms' classes is isomorphic to the ideal classes' group of quadratic ring. This fact can be taken as a principle argument in the issue on seeking of suitable generalization of the Gauss' theory. We put the following question. Let we are given with some Dedekind field $k$ with a ring of integral elements $K$. Is it possible define a family of forms of degree being equal to the degree of field's extension, in which is possible introduce a group of form classes being isomorphic to the group of ideal classes of the given field? We establish that the answer to this question is positive. Main tool

in our investigations is the criteria of divisibility by a prime ideal given in Consequence 2. This criteria shows that in such sort of questions, as in the case of quadratic forms, essential role plays the fact on representability of prime ideals' norms by forms. Here, naturally it arises the family of forms closely connected with considered extension. The question, put above, is solvable in this family. The group of ideal classes seems very useful in the process of construction of the group of form classes. We suffice with consideration of the field of rational numbers as a basic field.

Let $K = Q(\alpha)$ be an algebraic extension of the field of rational numbers by joining of integral algebraic element $\alpha$. A minimal polynomial of the element $\alpha$ denote as

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

This polynomial is irreducible over the field of rational numbers. Suppose that the numbers 1, $\alpha$, $\alpha^2, ..., \alpha^{n-1}$ set up the fundamental basis, that is the maximal order is generated by natural basis. We have $K \cong Q(A)$.

Take some prime number $p$. Decomposition of prime number $p$ in the field $K$, in consent with Kummer's theorem, runs in $Z_p$ parallel in all respects to the decomposition

$$f(x) \equiv f_1(x) \cdots f_k(x)(modp). \tag{2}$$

Moreover, if the polynomial $f_i$ has a degree $k_i$, then the expansion of the number $p$ will be of form $p = \pi_1 \cdots \pi_k$, where $\pi_i$ is a prime ideal of degree $k_i$. The norm of the prime ideal $\pi_i$ equals to $p^{k_i}$.

Theorem 3. The number of ideal classes of field K is equal to 1, iff the norm of every prime ideal can be represented by Principle Form.

Proof. Suppose that the field $K$ has only one class of ideals, that is, the maximal order $D$ is a ring of principle ideals. Suppose that $\pi$ is some prime ideal and its norm is equal to $p^k$. Then, there is an element $c(\alpha) \in D$ such that $\pi = (c(\alpha))$. So, we must have $\pi \backslash c(\alpha)$ and $c(\alpha) \backslash \pi$. It means that $N(c(\alpha)) = p^k$. Therefore, $p^k$ is representable by Principle Form.

Suppose now that the norm of every prime ideal can be represented by Principle Form. Taking arbitrary prime number $p$ consider its decomposition into the product of prime ideals:

$$p = \pi_1 \cdots \pi_k,$$

with $N(\pi_i) = p^{k_i}$. Then for each $i, i = 1, ..., k$ there is an element $c_i(\alpha) \in D$ such that $N(c_i(\alpha)) = p^{k_i}$. Therefore, taking an element $c(\alpha) = c_1(\alpha) \cdots c_k(\alpha)$ we have $N(c(\alpha)) = p^n$. By this reason, one has $p \backslash c(\alpha)$. Then $c(\alpha) = pe(\alpha)$ and $e(\alpha)$ is a unit. From unique decomposition of non-zero ideal by the product of prime ideals it follows that every prime ideal is defined by some element $c_i(\alpha)$. So, $D$ is a ring of principle ideals. Theorem 3 is proved.

From multiplicatives of the norm it follows that if the field has more than 1 classes of ideals, then there exists such a prime ideal that its norm cannot be represented by Principle Form. Now the question is arising: is there a form which presents the norm of that ideal? Following theorem answers this question positively.

Theorem 4.The norm of every prime ideal can be represented by a form of degree $n$ which is reduced from the Principle Form using some parameterization (linear transformation) of variables.

Proof.It is best known the fact that for every ideal $\pi$ there is such an ideal $\tau$ that their product $\pi\tau$ is a principle ideal, that is, there exists an element $c(\alpha) = c_0 + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1} \in D$ for which

$$\pi\tau = (c(\alpha)).$$

Suppose at first that $\tau$ is a prime ideal and its norm is $q^k$ ($q$ is a prime number). Assume also that in the decomposition (1) for the prime number $q$ to the ideal $\tau$ corresponds the polynomial $g(x)$ of degree $\deg g = k$ and $g(x) = b_0 + \cdots + b_k x^k, b_k = 1$. In this case, by the criteria of divisibility by prime ideal, we must have

$$c(B) \equiv 0(modq), \tag{3}$$

where $B$ is a companion matrix of the polynomial $g(x)$, that is

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Consider the congruence (3) as a system of linear equations over the field $\mathbf{Z}_q$ with respect to the coefficients $c_0, ..., c_{n-1}$. This is a homogeneous system and their solutions set up a subspace in the space $(Z_q)^n$. Suppose that the basis minor of the system's matrix is placed at first $k$ rows and columns (note that the case when the systems' matrix has a rank 0 over the field $\mathbf{Z}_q$ is trivial, in which $q$ is not decomposable). Then the variables $c_k, ..., c_{n-1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ are free and can take arbitrary values. Basic variables are $c_0, ..., c_{k-1}$. So, the general solution to the system (3) is as follows:

$$c_i \equiv \sum_{j=k}^{n-1} b_{ij} c_j (mod q); i = 0, ..., k-1.$$

Replace this system of congruences by a system of equalities, adding the multipliers of modulus as below:

$$c_i = \sum_{j=k}^{n-1} b_{ij} c_j + q t_i; t_i \in Z, i = 0, ..., k-1.$$

Substituting the values of the coefficients in the expression for $c(A)$ and taking the determinant, we get some form of variables $t_0, ..., t_{k-1}, c_k, ..., c_{n-1}$.

As it is known ([3]), the matrix $A$ is possible to reduce to natural normal form over the field $\mathbf{Z}_q$ and in diagonal will stay blocks of a view $B$. Since in the diaconal stays the block $B$ then $\det c(A)$ is divisible by $q^k$. As it seen from the said above, this relation is satisfied for all possible values of variables $t_0, ..., t_{k-1}, c_k, ..., c_{n-1}$. It means that the coefficients of the last form are divisible by $q^k$. After of division the form by $q^k$ we get a new form. Taking specified values of coefficients, we have

$$N(\pi\tau) = N(\pi) q^k = N(c(\alpha)).$$

So, the equality

$$N(\pi) = q^{-k} N(c(\alpha))$$

is satisfied for some non-zero values of variables $t_0, ..., t_{k-1}, c_k, ..., c_{n-1}$. It means that the theorem 4 is established for the case of prime ideal $\tau$.

Consider now the case when $\tau$ is a square of prime ideal, that is

$$\pi\tau^2 = (c(\alpha)),$$

fore some $c(\alpha) = c_0 + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1} \in D$. Taking the congruence (3) with respect to the modulus $q^2$, let us investigate the congruence

$$c(B) \equiv 0 (mod q^2).$$

We will seek the solutions among the solutions of the congruence (3). We have found the general its solution

$$c_i = \sum_{j=k}^{n-1} b_{ij} c_j + q t_i; t_i \in Z, i = 0, ..., k-1. \tag{4}$$

Rewrite the congruence as below

$$B_1 \bar{c}_1 + q B_2 \bar{c}_2 \equiv 0 (mod q^2), \tag{5}$$

where the block matrix $(B_1|B_2)$ is an initial matrix of the congruence (3), $\bar{c}_1 = (c_0, \cdots, \bar{c}_{k-1}), \bar{c}_2 = = (c_k, \cdots, \bar{c}_{n-1})$. Since the vector $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2)$ found in (4) is a solution of the system (3), then the solution of the system (5) we shall seek in the form

$$\bar{c}_2 = \bar{t}_1 + q\bar{t}_2.$$

Substituting into (5) and reducing we find:

$$B_1\bar{c}_1 + qB_2\bar{t} + q^2B_2\bar{t}_2 \equiv 0(modq^2).$$

We have $B_1\bar{c}_1 \equiv 0(\mathrm{mod}q)$ and note that the matrix $B_1$ has a block-view

$$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix},$$

where $M$ is a basic minor above. By this reason all of its elements are not divisible by $q$, so,

$$\bar{c}_1 \equiv M^{-1}B_2\bar{c}_2(\mathrm{mod}q).$$

But elements of the block $N$ are divisible by $q$ and $N{=}qN_1$. So, after of reducing we find a new system:

$$\tilde{B}_1\bar{x}_1 + B_2\bar{t} + qB_2\bar{t}_2 \equiv 0(modq),$$

or

$$\tilde{B}_1\bar{x}_1 + B_2\bar{t} \equiv 0(modq).$$

We again arrived at the congruence (3) but with different main matrix and basic minor. The solution of this system can be found as above. Note that

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} M \\ N_1 \end{pmatrix},$$

and $\bar{x}_1 = \bar{c}_1$. Using the method of bordering, we can find a basic minor of the matrix $(\tilde{B}_1, B_2)$ over the field $\mathbf{Z}_q$, and continue solving of the the last congruence. The vector $\bar{x}_1$ of basic variables can increase the number of its components. So, linear parameterization is more complicated in this case, but we have find a new paramterization, and substituting found values of the coeffients in the expression for $c(A)$ and taking the determinant, we get new form which represents the norm of the ideal $\pi$:

$$N(\pi) = q^{-2k}N(c(\alpha)),$$

becaus in the relation $\pi\tau^2 = (c(\alpha))$ both sides are divisible by $\tau^2$. Theorem 4 is proved in the case of $\tau^2$. Analogical reasonings allows the complete proof in the case of arbitrary degree of the ideal $\tau$.

Completion of Theorem based on the Chines theorem on reminders. Let $\tau = \tau_1^{k_1} \cdots \tau_m^{k_m}$ is a decomposition into the product of prime ideals. Then the congruence (3) is equivalent to the system of congruences

$$c(B) \equiv 0(modq_j^{s_j}),\ j = 1, ..., m.$$

Applying Chines theorem on reminders we find general solution of the congruence

$$c(B) \equiv 0(modq_1^{s_1} \cdots q_m^{s_m}),$$

which delivers a needed parameterizations also. The representation of the norm of the ideal $\pi$ we find now from the relation

$$N(\pi) = (N(\tau))^{-1}N(c(\alpha)).$$

Theorem 4 is completely proved.

Consequence. The norm of every ideal is representable by some form, got from the Principle Form by some parametrization.

As it is seen the forms which reduced from the Principle Form by parameterizations plays an important role. For every prime ideal $\tau$, as above, we can construct the form

$$\Psi(t_0, ..., t_{n-1}) = q^{-ks} \det c(A), \tag{6}$$

where $k$ is a degree of prime ideal $\tau$ and $s$ is its multiplicity. Denote by $\mathbf{F}_n(\alpha)$ the set of all forms got by this way. Let introduce in $\mathbf{F}_n(\alpha)$ an equivalence relation.

Suppose that $a(\alpha) \in D$ is an element of maximal order $D$. Consider transformation of Principle Form by this element as follows. At first define usual product $a(A)t(A)$. We find a sum $u_0 + u_1 A + \cdots + u_{n-1}A^{n-1}$ in which every variable $u_i$ is a linear combination of variables $t_0, ..., t_{n-1}$. Therefore, $\det(a(A)t(A)$ will be some form. Denote this form as $a * F$.

Definition. Two forms $F_1$ and $F_2$ we call to be equivalent and denote as $F_1 \sim F_2$ if for some elements $a(\alpha)$ and $b(\alpha)$ the equality $a * F_1 = b * F_2$ is satisfied, that is

$$\det(a(A)t_1(A)) = \det(b(A)t_2(A)).$$

Lemma 5. The relation $F_1 \sim F_2$ is an equivalence relation.

Proof. It is clear that $F_1 \sim F_1$. Also, if $F_1 \sim F_2$, then $F_2 \sim F_1$. Suppose $F_1 \sim F_2$ and $F_2 \sim F_3$. Prove that $F_1 \sim F_3$. We have

$$\det(a(A)t_1(A)) = \det(b(A)t_2(A))$$

and

$$\det(c(A)t_2(A)) = \det(d(A)t_3(A)).$$

Then

$$\det(b(A)c(A)t_2(A)) = \det(b(A)d(A)t_3(A)) = \det(c(A)a(A)t_1(A)).$$

This relation shows that $F_1 \sim F_3$. Lemma 5 is proved.

Theorem 5.If the form $F_1$ represents the norm of the prime ideal $\pi$ then this form represents the norm of every ideal equivalent to $\pi$.

Proof. Let the norm of the ideal $\pi$ is representable by the form $F_1$. Then there exists an ideal $\tau$ and element $c(\alpha)$ such that $\pi\tau = (c(\alpha))$. Denote by $\pi'$ some ideal equivalent to $\pi$. We can find such two elements $a(\alpha)$ and $b(\alpha)$ that

$$a(\alpha)\pi = b(\alpha)\pi'. \tag{7}$$

Then,

$$a(\alpha)c(\alpha) = a(\alpha)\pi\tau = b(\alpha)\pi'\tau.$$

Left hand side is divisible by $b(\alpha)$, and reducing we get the relation

$$\pi'\tau = (h(\alpha))$$

Repeating the conclusions of Theorem 2 we find, in some values of variables:

$$Nm\pi' = q^{-k} \det(t(A)).$$

Theorem 5 is proved.

Theorem 6.If the form $F_1$ defined as (6) represents some natural number $m$ then every form $F_2 \sim F_1$ also represents the number $m$.

Proof of this theorem easily follows from definition and the relation (7).

Obtained above results is applicable to various questions of Number Theory. We have seen that the representability of the norm of ideal is substantive for the theory of form developed here. As we observed above, representability the norm of the prime ideal is a fact closely connected with the structure of the field. The norm of the ideal is representable by forms of a class simultaneously. In other hand, by Theorem 3, one and the same form represents the norm of every ideal equivalent to given one. So, there is a natural correspondence between classes of forms and ideals. This correspondence is possible to extend to the group structure. It is natural to take as a product of two forms as a form which represents the norm of the product of taken ideals. Let us show that the notion of the product defined by such way is defined correctly and the set of form classes defined above sets up a group.

Suppose that we are given with two forms: $F_1$ and $F_2$. There are such classes of ideals that the norms of their elements are representable respectively by forms $F_1$ and $F_2$. Denote them by $\pi_1$ and $\pi_2$. As we have established above, there exists a form $F$ such that it represents the norm of the product $\pi_1\pi_2$. In the set $\mathbf{F}_n(\alpha)$ of forms, introduce the product $F_1 * F_2$ of forms by equality $F = F_1 * F_2$. By Theorems 5 and 6, from $F_2 \sim F_3$ it follows that $F_1 * F_2 \sim F_1 * F_3$. So, the operation of multiplication is defined correctly. Namely, the product of form classes includes all of products of equivalent forms of corresponding classes. So, the factor group $\mathbf{F}_n(\alpha)/\sim$ is correctly defined and includes the classes of forms reduced from Principle Form.

Resuming the all of said above we can formulate our basic result.

Theorem 7. The group $\mathbf{F}_n(\alpha)/\sim$ of form classes is isomorphic to the group of ideal classes.

## 6. Conclusion

In the section 5 we have introduced the group structure in the family of form classes. All of forms are reduced from the principle form by linear parametrization. The constructed group is isomorphic to the group of ideal classes.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эдвардс, Х. М. Последняя теорема Ферма: Общее введение в алгебраическую теорию чисел. Нью-Йорк: изд-во «Шпрингер», 1977.

2. Постников М. М. Введение в теорию алгебраических чисел // 1982.- М: Наука.

3. Мальцев И. А. Линейная алгебра: 2-е изд. // СПб: изд-во «Лань».- 384 с.

4. Вейль Х. Алгебраическая теория чисел // Издательство Принстонского университета.- 1940.- 225 с.

5. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел: 2-е изд. // М:Наука.- 1972.

6. Гурвиц А. О композиции квадратичных форм больших чисел переменных // Новости Геттингена.- 1898.- С. 309–316.

7. Линник Ю. В. Обобщение теоремы Фребебиуса и установление связи с теоремой Гурвица о композиции квадратичных форм // Изв. Акад. Наук СССР, сер.математика.- 1938.- Т.2.- С. 41–52.

8. Альбурт А. Квадратичные формы, разрешающие композицию // Анналы Математики.- 1942.- Т. 43.- № 1.- С. 161–177.

9. Дубиш Р. Композиция квадратичных форм // Анналы Математики.- 1946.- Т.47.- № 3.- С. 510–527.

10. Кострикин А.И. Введение в алгебру // М:Наука.- 2009.- 495 с.

11. Ленг К. Алгебра // М:Мир.- 1968.- 564 с.

12. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре // М:Наука.- 1971.- 271 с.

13. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры // М: Наука.- 2005.- 470 с.

14. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра // М: Мир.- 2000.

15. Родосский К. А. Алгоритм Евклида // М: Наука.- 1988.

## REFERENCES

1. Edwards, H. M. 1977, "The Last Theorem of Fermat: A General Introduction to Algebraic Number Theory", *Springer*, New York.

2. Postnikov, M. M. 1982, "Introduction to the Theory of Algebraic Numbers", *Nauka*, Moscow.

3. Mal'tsev, I. A. "Linear Algebra: 2nd ed.", *Lan*, St. Petersburg. 384 p.

4. Weil, A. 1940, "Algebraic Number Theory", *Princeton University Press*. 225 p.

5. Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R. 1972, "Number Theory: 2nd ed.", *Nauka*, Moscow.

6. Gurwitz, A. 1898, "On the composition of quadratic forms of large numbers of variables", *News of Göttingen*, pp. 309–316.

7. Linnik, Yu. V. 1938, "Generalization of the Frobenius theorem and establishing a connection with Hurwitz's theorem on the composition of quadratic forms", *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR, Series Mathematics*, 2, pp. 41–52.

8. Alburt, A. 1942, "Quadratic forms allowing composition", *Annals of Mathematics*, 43(1), pp. 161–177.

9. Dubish, R. 1946, "Composition of quadratic forms", *Annals of Mathematics*, 47(3), pp. 510–527.

10. Kostrikhin, A. I. 2009, "Introduction to Algebra", *Nauka*, Moscow. 495 p.

11. Lang, S. 1968, "Algebra", *Mir*, Moscow. 564 p.

12. Gelfand, I. M. 1971, "Lectures on Linear Algebra", *Nauka*, Moscow. 271 p.

13. Mal'tsev, A. I. 2005, "Foundations of Linear Algebra", *Nauka*, Moscow. 470 p.

14. Bourbaki, N. 2000, "Commutative Algebra", *Mir*, Moscow.

15. Rodossky, K. A. 1988, "Euclid's Algorithm", *Nauka*, Moscow.

Получено: 22.06.24
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-126-139

# Численный метод решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра с помощью искусственных нейросетей[1]

Т. Д. Нгуен, И. З. Ахметов, А. Ф. Галимянов

**Нгуен Тиен Дык** — аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань); Колледж промышленных технологий (г. Бакзанг, Вьетнам).
*e-mail: ducnt@bcit.edu.vn*
**Ахметов Ильшат Зуфарович** —- аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань).
*e-mail: ilshat.achmetov@gmail.com*
**Галимянов Анис Фуатович** —- кандидат физико-математических наук, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань).
*e-mail: anis_59@mail.ru*

**Аннотация**

Многие задачи математики, механики, физики и других инженерных дисциплин приводят к уравнениям, в которых неизвестная функция стоит под знаком интеграла. Интегральные уравнения являются полезными математическими инструментами во многих областях, поэтому они исследуются во многих различных аспектах, таких, как существование решений, аппроксимация решений, расчет поправки или неисправимости, корректировка решений и т. д. Во многих статьях упоминаются так называемые PINN (physics-informed neural networks, что можно перевести как физически обусловленные нейронные сети), которые нашли применение для решения дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, а также систем дифференциальных уравнений. PINN также применяются для решения интегральных уравнений, однако, в публикациях обычно приводятся методы для решения некоторого класса уравнений, к примеру, уравнения Фредгольма 2-го рода либо уравнения Вольтерра 2-го рода. В этой статье будет описан общий метод решения непрерывных интегральных уравнений с помощью нейросетей, который обобщает их как для интегральных уравнений Фредгольма, так и для интегральных уравнений Вольтерра. Суть метода заключается в том, что искомая функция аппроксимируется нейронной сетью, которая по сути является огромной функцией с большим числом настраиваемых параметров, которые выбираются из условия минимальности квадрата невязки, для чего параметры нейронной сети настраиваются с помощью алгоритма оптимизации L-BFGS. Результаты метода ANN сравниваются с точным решением для нескольких типовых интегральных уравнений.

*Ключевые слова:* численные методы, интегральные уравнения, уравнения Фредгольма и Вольтерры, приближение функций, нейронные сети.

*Библиография:* 20 названий.

**Для цитирования:**
Нгуен, Т. Д., Ахметов, И. З., Галимянов, А. Ф. Численный метод решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра с помощью искусственных нейросетей // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 126–139.

[1]Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-126-139

# Numerical method for solving Fredholm and Volterra integral equations using artificial neural networks

T. D. Nguyen, I. Z. Akhmetov, A. F. Galimyanov

**Nguyen Tien Duc** — postgraduate student, Kazan (Volga) Federal University (Kazan); College of Industrial Techniques (Bac Giang, Vietnam).

*e-mail: ducnt@bcit.edu.vn*

**Akhmetov Ilshat Zufarovich** — postgraduate student, Kazan (Volga) Federal University (Kazan).

*e-mail: ilshat.achmetov@gmail.com*

**Galimyanov Anis Fuatovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Kazan (Volga) Federal University (Kazan).

*e-mail: anis_59@mail.ru*

**Abstract**

Many problems in mathematics, mechanics, physics and other engineering disciplines lead to equations in which the unknown function appears under the integral sign. Integral equations are useful mathematical tools in many fields, so they are studied in many different aspects, such as the existence of solutions, approximation of solutions, calculation of correction or incorrigibility, correction of solutions, etc. Many articles mention the so-called PINN (physics-informed neural networks, which can be translated as physically conditioned neural networks), which have found application for solving differential equations, both ordinary and partial derivatives, as well as systems of differential equations. PINNs are also used to solve integral equations, but publications usually provide methods for solving a certain class of equations, for example, the Fredholm equation of the 2nd kind or the Volterra equation of the 2nd kind. This article will describe a general method for solving continuous integral equations using neural networks that generalizes them to both Fredholm and Volterra integral equations. The essence of the method is that the desired function is approximated by a neural network, which is essentially a huge function with a large number of adjustable parameters, which are selected from the condition of minimal squared residual, for which the parameters of the neural network are adjusted using the L-BFGS optimization algorithm. The results of the ANN method are compared with the exact solution for several typical integral equations.

*Keywords:* Numerical methods, integral equations, Fredholm and Volterra equations, approximation of functions, neural networks.

*Bibliography:* 20 titles.

**For citation:**

Nguyen, T. D., Akhmetov, I. Z. Galimyanov, A. F. 2024, "Numerical method for solving Fredholm and Volterra integral equations using artificial neural networks" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 126–139.

## 1. Введение

Теория интегральных уравнений представляет собой широкую область математического анализа и имеет большое теоретическое и практическое значение. Их систематическая теория основана на работах В. Вольтерра (1860-1940), Э. И. Фредгольма (1866-1927), Д. Гильберта (1862-1943) и других математиков. Многие задачи механики, физики и других областей науки приводят к линейным интегральным уравнениям [1, 2], например, проблема Абеля, задача равновесия нагруженной струны, задачи о свободны, вынужденных колебаниях струны. В частности, задача о свободных и вынужденных колебаниях струн привела к задачам Фредгольма первого и второго рода. За долгие годы разработано множество различных алгоритмов для численного решения различных классов интегральных уравнений, таких как метод квадратур, метод Галеркина, метод разложения Тейлора [3, 4], метод гомотопического анализа [5-7], метод полиномов Лежандра [8, 9], метод полиномов Бернштейна [10] и метод разложения Адомиана [11]. Искусственные нейронные сети (ИНС), как известно, очень хорошо могут аппроксимировать неизвестные функции, поскольку сами являются по сути очень сложными функциями. В настоящее время у нейронных сетей много приложений. К примеру, они могут классифицировать тексты, изображения. Как выглядят такие функции, выражаются ли они через элементарные функции неясно, но тем не менее как показывает практика они хорошо справляются с такими задачами. В таком случае возникает вопрос: если ИНС хорошо справляются с аппроксимацией неизвестных функций, быть может, они могут достаточно хорошо аппроксимировать решение интегрального уравнения? В последнее время появилось много исследовательских работ по решению интегральных и дифференциальных уравнений с помощью нейронных сетей [12 - 19]. В англоязычной литературе они часто относятся к так называемым PINN (physical informed neural networks) [20]. Однако, в публикациях приводятся методы для каждого из уравнений Фредгольма и Вольтерра в отдельности. К тому же есть необходимость сравнить точность аппроксимации, выполненной с помощью ANN с классическими методами численного решения интегральных уравнений. В этой статье будет описан общий метод решения непрерывных интегральных уравнений с помощью нейросетей, который обобщает их как для уравнений Фредгольма, так и для уравнений Вольтерра. Так же будет показано, что данный метод применим для решения произвольных нелинейных интегральных уравнений при некоторых условиях, таких как существование и единственность решения, непрерывность ядра и т.д. Для демонстрации эффективности метода проведены численные эксперименты, разработана программа на языке Python на основе фреймворка машинного обучения PyTorch.

## 2. Постановка задачи

В данной статье рассматривается решение интегральных уравнений Фредгольма 1 и 2 рода, а также уравнения Вольтерры 1 и 2 рода. Как скоро станет ясно, для нейросетевого метода неважно, к какому классу принадлежит интегральное уравнение. Это одно из достоинств данного метода – универсальность. Метод может быть легко обобщен на функции многих переменных. Для начала напомним, как выглядит интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x)$$

где $K(x,s)$ – ядро интегрального уравнения.

Интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода:

$$y(x) = \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x)$$

Обозначим интегральный оператор как $(Iy)(x)$. Для уравнения Фредгольма он будет равен $\int_a^b K(x,s)y(x)ds$, а для уравнения Вольтерры - $\int_a^x K(x,s)y(x)ds$ . Оставшуюся часть уравнения обозначим через оператор $F(y,f)(x) = y(x) - f(x)$. Тогда интегральное уравнение можно записать в виде $F(y,f)(x) - (Iy)(x) = 0$. В данной форме с помощью интегрального оператора можно записать как уравнение Фредгольма, так и уравнение Вольтерры, поскольку через (Iy)(x) можно обозначить интегральный оператор для интегральных уравнений обоих типов. Аналогично можно выразить интегральные уравнения первого рода. Мы выбрали такую форму записи, так как нас будет интересовать минимизация квадрата невязки в общем случае.

## 3. Описание метода

Предлагаемый метод основан на идее, что если норма невязки уравнения на области $C[a,b]$ определения стремится к нулю при замене неизвестной функции $y(x)$ на ее нейросетевую аппроксимацию $NN(x)$, то $NN(x)$ – приближенное решение интегрального уравнения на данной области, то есть если выражение

$$\big|\big|F(y,f)(x) - (Iy)(x))\big|\big|_{(C[a,b])}$$

стремится к нулю, то должно быть, что $NN(x) \sim y(x)$ , то есть нейросетевая аппроксимация сходится к истинному решению. Обозначение $NN(x)$ выбрано не случайно, оно означает нейронную сеть, то есть нейронную сеть. Для примера рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\int_0^1 y(t)dt, x \in [a,b]$$

В таком случае необходимо минимизировать следующее выражение:

$$agrmin_{NN(x)}\big|\big|NN(x) - \sin(\pi x) - \frac{1}{2}\int_0^1 y(t)dt\big|\big|_{C[a,b]}$$

то есть максимальную норму невязки. Обозначим невязку приближенного решения как

$$r\big[\widetilde{u}\big] = F\big(\widetilde{u}, f\big) - \big(I\widetilde{u}\big)$$

Из теории интегральных уравнений известно, что если $\widetilde{u}$ - приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода $u = Ku + f$, уравнение имеет единственное решение $u$ и справедливо

$$\big|\big|u\big|\big|_{C[a,b]} \leq C_1\big|\big|f\big|\big|_{C[a,b]}$$

для некоторого $C_1 > 0$, то справедливо неравенство

$$\big|\big|u - \widetilde{u}\big|\big|_{C[a,b]} \leq C_1\big|\big|r\big[\widetilde{u}\big]\big|\big|_{C[a,b]}$$

Следовательно, об успешной сходимости метода для уравнения Фредгольма можно судить по значению нормы невязки $\big|\big|u - \widetilde{u}\big|\big|_{C[a,b]}$ при выполнении определенных условий.

Таким образом, неизвестная функция будет аппроксимироваться полносвязной нейронной сетью. В данном исследовании количество скрытых слоев равно 3. На вход нейросетевой функции подается значение $x \in R$, на выходе – ответ $NN(x) \in R$. В данной статье функция активации внутреннего слоя - $Tanh(x)$, количество нейронов на внутреннем слое равно 50. Для оптимизации использован метод L-BFGS. У нейросети имеется большое количество параметров, настраиваемых в ходе обучения. Покажем, как найти их количество на примере

нейросети с двумя скрытыми слоями. Пусть $x$ – значение, поданное на вход. Оно же будет значением функции активации в первом слое.

Пусть $a_j^l(z_j^l)$ - значение функция активации $j$-го нейрона в $l$-слое. Значение $z_j^l$ получается, как $z_j^l = \sum_k w_{jk}^l a_k^{l-1} + b_j^l$ где $a_k^{l-1}$ - значение функции активации k-го нейрона в $(l-1)$ - м слое. Значения $w_{jk}^l$ и $b_j^l$- параметры весов и смещений на слое $l$. Они настраиваются в ходе обучения нейронной сети. Если количество нейронов и слоев велико, то, как можно догадаться, таких параметров будет очень много. Для примера рассмотрим нейросеть с двумя скрытыми слоями, в каждом из которых 50 нейронов, с одним входом и одним выходом размерности 1. Количество связей $w_j k^1$ между входным и первым слоем будет 50 и еще 50 параметров смещения $b_j^l$. Затем нужно установить связь между каждой парой нейронов первого и второго слоя. Это будет 50×50=2500. Плюс параметры смещения – это еще 50 параметров. На выходном слое будет 50 параметров весов (связей) + 1 параметр смещения. Всего в сумме 2601 параметр. В итоге выходит, что решение ищется в пространстве функций с 2601 переменными. В нашем случае применения нейросети с будет применяться нейросеть с 3 слоями. Ниже на рис 1 приведена структура используемой нейросети.

Входом является $x \in R$, выходом является значение

$$y_N(x, \Omega) = \sum_{j=1}^{m} w_j^N a_j^N(z_j^{N-1})$$

Определим функционал, так называемую функцию потерь, с помощью которой в ходе обучения будут настраиваться параметры нейросети следующим образом. Пусть нужно найти решение на области $x \in [a, b]$. Выберем на этой области некоторое количество точек $K$, получим массив значений $[x_1, x_2, \dots x_K]$, таких, что $x_1 = a$ и $x_K = b$. В данной статье использовано равномерное разбиение, хотя оно не обязано быть таковым. Тогда функцией потерь будет среднее значение квадрата невязки:

$$Loss(\widetilde{u}) = \frac{\sum_k \left(F(\widetilde{u}, f)(x_j) - (I\widetilde{u})(x_j)\right)^2}{K} \tag{1}$$

Именно это выражение будет минироваться в ходе обучения, а не среднее абсолютного значения невязки либо максимальное значение модуля невязки. Был выбран именно квадрат невязки, а не абсолютное значение, поскольку квадрат аргумента – выпуклая функция, следовательно такая функция более склонна к достижению глобального минимума, чем модуль значения.

Таким образом, фактически мы перешли к задаче минимизации некоторого функционала $Loss(\widetilde{u})$. Заметим, что для данного метода не важен тип интегрального уравнения и его вид, алгоритм применения одинаков как для линейных, так и для нелинейных интегральных уравнений. Однако оценивать эффективность алгоритма, сходимость будем по максимальному абсолютному значению невязки, т.е. с помощью выражения:

$$\left|\left|F(c, f)(x) - (I\widetilde{u})(x)\right|\right|_{C[a,b]} \tag{2}$$

Это обусловлено тем, что в отдельных точках модуль невязки может быть очень большим, в то время как в остальных точках значение модуля невязки может быть близко к нулю, из-за чего среднее значение квадрата невязки так же будет небольшим, что приведет к ошибочному выводу, что алгоритм сошелся к истинному решению.

Однако оптимизировать веса нейронной сети с помощью функционала, где вместо среднего квадрата используется максимальная норма – плохая идея, так как в таком случае на каждой итерации алгоритм будет подгонять параметры только под одну некоторую точку

$x_i$, на которой норма невязки максимальна, игнорируя ошибки на всех остальных точках. Эксперименты, показывают, что такой функционал для оптимизации крайне неэффективен.

Пусть всего имеется $N$ так называемых эпох. Это последовательные итерации, на каждой эпохе алгоритм пытается минимизировать функцию потерь для всех значений $x$ из области определения $X$. Можно делать это последовательно для каждой точки $x$, можно сразу для некоторого подмножества, а можно минимизировать одновременно для всех точек $x \in X$, если все элементы могут поместиться в память. Поскольку в отличии от, например, изображений либо больших текстов несколько десятков чисел легко помещается в память, то нет необходимости вычислять среднее значение квадрата невязки отдельно для каждой точки $x$, можно минимизировать одновременно по всем точкам $x_i$, то есть с помощью выражения (1).

Таким образом, среднее значение квадрата невязки вычисляется сразу на всей области определения, а не на некотором ее подмножестве. Здесь $K$ – количество точек для обучения. На каждой итерации вычисляется градиент данной функции потерь по параметрам нейросети, то есть весам $w^l_{jk}$ и смещениям $b^l_j$, и тем самым изменяются параметры нейросети в сторону уменьшения функции потерь $Loss(x)$:

$$w_{new} = w_{old} - lr * H(Loss(\widetilde{u}))_w$$

где $lr$ (learning rate) - строго положительная константа - скорость обучения, от которой зависит скорость обновление параметров нейросети и сходимость метода, $H(Loss(\widetilde{u}))_w$ – аппроксимация Гессиана функции потерь по параметрам нейросети с помощью алгоритма L-BFGS.

В отличии от традиционных численных методов решения интегральных уравнений, таких как метод квадратур, метод простой итерации, метод Галеркина и т.д, нейросетевой метод является скорее эвристическим, сильно зависящим от выбранных гиперпараметров обучения, а также метода оптимизации. Гиперпараметры в оптимизации нейронных сетей – параметры, выбираемые до начала обучения и не изменяющиеся на протяжении всей процедуры оптимизации. Для оптимизации параметров нейросетевой модели был выбран метод L-BFGS. Так же важную роль играет архитектура нейросети, выбранная для аппроксимации искомой функции. В данной работе она очень проста. В качестве функций активации, как было отмечено раннее выбран Tanh. Строго не рекомендуется использовать в качестве функции активации такие функции, как ReLu, т.к они не имеют непрерывных вторых производных и являются по сути псевдолинейными, так как $ReLU(X) = [x\ if\ x > 0\ else\ 0]$.

Так же стоит отметить, что в отличии от сеточных методов добавление новых узлов интегрирования обходится значительно дороже, так как для каждого узла необходимо итеративно выполнять операции forwardpropagation и backpropagation для обновления параметров нейросети. Поэтому здесь следует рассмотреть возможность применения квадратур Гаусса вместо, например, метода средних прямоугольников. В данной работе в различных экспериментах для аппроксимации интегрального оператора в точке были использованы как квадратуры Гаусса, так и метод средних прямоугольников.

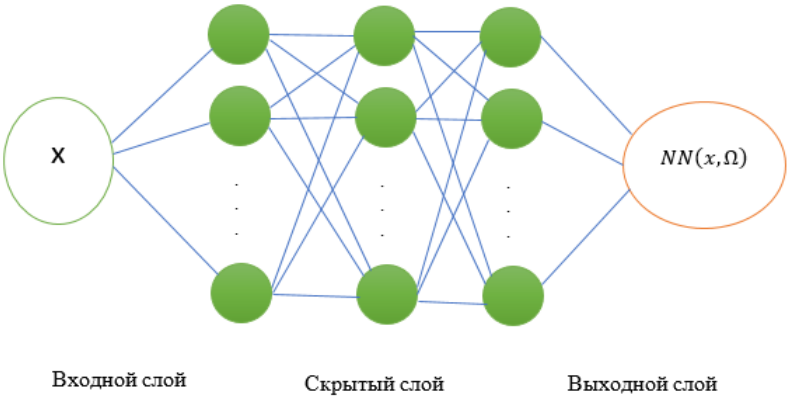



Рис. 1: Архитектура нейронной сети.

## 4. Численные эксперименты

Для проверки эффективности метода была написана программа для решения интегральных с помощью нейросетей. Для разработки программы использован фреймворк для глубокого обучения PyTorch и проведен ряд экспериментов. Далее будут показаны результаты некоторых из них. Узлы интерполяции были выбраны наиболее примитивно, они представляют собой равномерную сетку. Для оптимизации использован L-BFGS. Приближенное значение интегралов считается с помощью метода средних прямоугольников с выбранным количеством узлов. Узлы получаются путем генерации равномерной сетки. Через $\left|\left|R\right|\right|_{C[a,b]}$ будем обозначать максимальное абсолютное значение невязки на области определения искомой функции, т.е выражение (2). Погрешность будет округляться до третьего знака после запятой. Так же приведем максимальную абсолютную разность между точным решением и аппроксимацией, обозначив ее как $\left|\left|y(x) - NN(x)\right|\right|_{C[a,b]}$.

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.

$$y(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\int_0^1 y(t)dt,\ x \in [0,1]$$

Аналитическое решение: $y(x) = \sin(\pi x) + \frac{2}{\pi}$

Мы обучаем сеть на 20 точках в области $[0;1]$ с одним, двумя и тремя скрытыми слоями соответственно. Количество нейронов в слое 10, эпох $= 20$, $lr = 0.225$. В таблице 1 показано сравнение решения методом ANN и аналитического решения при разных количествах скрытых слоев. График абсолютной ошибки между решением ANN и аналитическим решением показан на рис.2. На рис.3 показан график убывания нормы невязки в зависимости от эпохи минимизации. Для аппроксимации интеграла в уравнении были использованы квадратуры Гаусса с 6 узлами. Норма невязки для трехслойной сети: $\left|\left|r[\widetilde{u}]\right|\right|_{C[0,1]} \sim 0.0001$. График ниже может ввести в заблуждение, что с ростом количества скрытых слоев нейросеть все точнее аппроксимирует решение уравнения. Но это далеко не всегда так, причем начиная с некоторого числа скрытых слоев точность уже убывает при прочих равных параметрах. Например, если сделать число слоев равным четырем, то $\left|\left|r[\widetilde{u}]\right|\right|_{C[0,1]} \sim 0.0005$, а при пяти в данном случае уже имеем $\left|\left|r[\widetilde{u}]\right|\right|_{C[0,1]} \sim 0.001$.

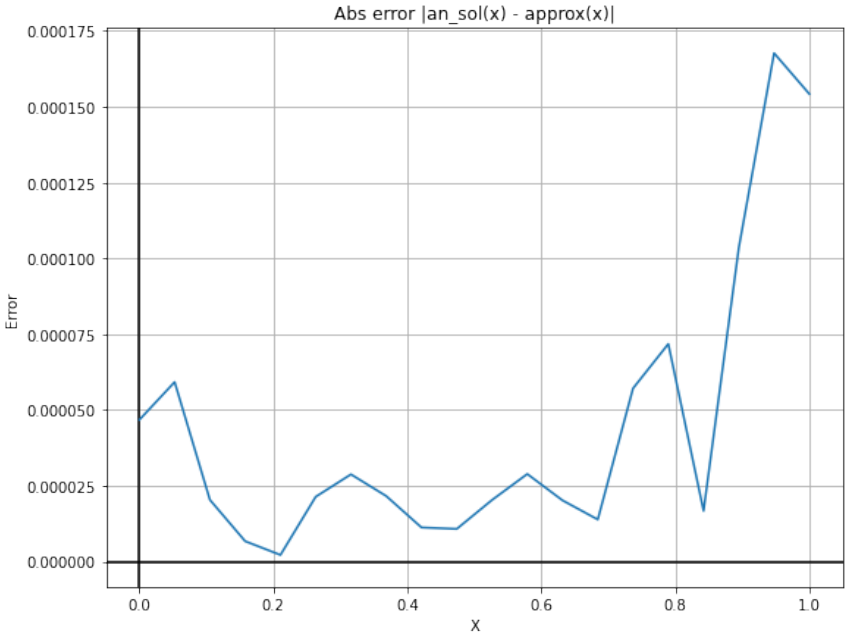



Рис. 2: Абсолютная погрешность аппроксимации (3 скрытый слой, 10 нейронов).

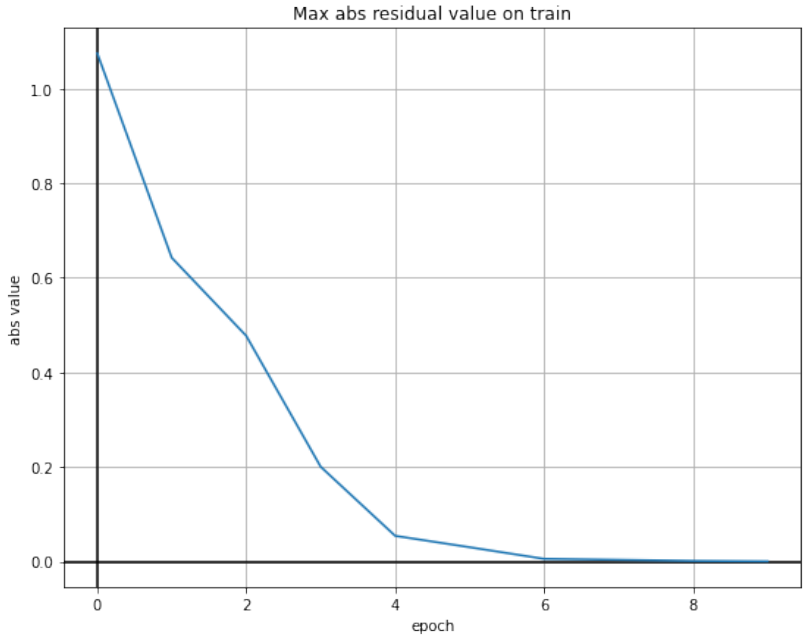



Рис. 3: График убывания значения $\left|\left|r[\widetilde{u}]\right|\right|_{C[0,1]}$ в зависимости от эпохи.

Таблица 1: Сравнение результатов ANN и аналитического решения с 1 скрытым слоем, 2 скрытыми слоями и 3 скрытыми слоями.

| X | Analytical | ANN1 | Error1 | ANN2 | Error2 | ANN3 | Error3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.636620 | 0.639208 | 2.59E-03 | 0.636351 | 2.69E-04 | 0.636573 | 4.67E-05 |
| 0.052632 | 0.801214 | 0.800647 | 5.67E-04 | 0.801588 | 3.73E-04 | 0.801274 | 5.92E-05 |
| 0.105263 | 0.961319 | 0.959307 | 2.01E-03 | 0.961694 | 3.75E-04 | 0.961340 | 2.03E-05 |
| 0.157895 | 1.112567 | 1.110564 | 2.00E-03 | 1.112676 | 1.09E-04 | 1.112561 | 6.68E-06 |
| 0.210526 | 1.250833 | 1.249789 | 1.04E-03 | 1.250660 | 1.73E-04 | 1.250835 | 2.15E-06 |
| 0.263158 | 1.372344 | 1.372611 | 2.67E-04 | 1.372025 | 3.18E-04 | 1.372365 | 2.13E-05 |
| 0.315789 | 1.473786 | 1.475168 | 1.38E-03 | 1.473517 | 2.69E-04 | 1.473815 | 2.87E-05 |
| 0.368421 | 1.552393 | 1.554311 | 1.92E-03 | 1.552342 | 5.08E-05 | 1.552415 | 2.16E-05 |
| 0.421053 | 1.606020 | 1.607737 | 1.72E-03 | 1.606253 | 2.33E-04 | 1.606031 | 1.12E-05 |
| 0.473684 | 1.633204 | 1.634064 | 8.59E-04 | 1.633653 | 4.48E-04 | 1.633215 | 1.07E-05 |
| 0.526316 | 1.633204 | 1.632827 | 3.77E-04 | 1.633682 | 4.78E-04 | 1.633225 | 2.03E-05 |
| 0.578947 | 1.606020 | 1.604424 | 1.60E-03 | 1.606305 | 2.85E-04 | 1.606049 | 2.88E-05 |
| 0.631579 | 1.552393 | 1.550009 | 2.38E-03 | 1.552326 | 6.70E-05 | 1.552413 | 2.01E-05 |
| 0.684211 | 1.473786 | 1.471365 | 2.42E-03 | 1.473370 | 4.17E-04 | 1.473772 | 1.38E-05 |
| 0.736842 | 1.372344 | 1.370755 | 1.59E-03 | 1.371777 | 5.67E-04 | 1.372287 | 5.71E-05 |
| 0.789474 | 1.250833 | 1.250778 | 5.48E-05 | 1.250462 | 3.71E-04 | 1.250761 | 7.18E-05 |
| 0.842105 | 1.112567 | 1.114231 | 1.66E-03 | 1.112725 | 1.58E-04 | 1.112550 | 1.67E-05 |
| 0.894737 | 0.961319 | 0.963988 | 2.67E-03 | 0.962066 | 7.47E-04 | 0.961423 | 1.04E-04 |
| 0.947368 | 0.801214 | 0.802893 | 1.68E-03 | 0.802000 | 7.86E-04 | 0.801382 | 1.68E-04 |
| 1 | 0.636620 | 0.633683 | 2.94E-03 | 0.635902 | 7.18E-04 | 0.636466 | 1.54E-04 |

Пример 2. Мы рассмотрим уравнение Вольтерры

$$y(x) = \sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt,\ x \in [0,1]$$

Аналитическое решение:

$$y(x) = x.$$

Мы обучаем сеть на 20 точках. Сеть имеет три скрытых слоя. Количество нейронов в слое = 10, эпох = 10, lr = 0.5. В таблице 2 приводится сравнение аппроксимации ANN и аналитического решения. Для аппроксимации интеграла используется формула средних прямоугольников с 50 узлами. На рисунке 4 приведен график абсолютной ошибки.

$$\left|\left|r[\widetilde{u}]\right|\right|_{C[0,1]} \sim 0.0005$$

Таблица 2: Сравнение результатов ANN и аналитического решения.

| X | Analytical | ANN | Error |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | -0.00018 | 1.78E-04 |
| 0.052632 | 0.052632 | 0.052664 | 3.26E-05 |
| 0.105263 | 0.105263 | 0.105420 | 1.57E-04 |
| 0.157895 | 0.157895 | 0.158097 | 2.02E-04 |
| 0.210526 | 0.210526 | 0.210708 | 1.81E-04 |
| 0.263158 | 0.263158 | 0.263273 | 1.15E-04 |
| 0.315789 | 0.315789 | 0.315813 | 2.34E-05 |
| 0.368421 | 0.368421 | 0.368349 | 7.20E-05 |
| 0.421053 | 0.421053 | 0.420901 | 1.52E-04 |
| 0.473684 | 0.473684 | 0.473486 | 1.98E-04 |
| 0.526316 | 0.526316 | 0.526114 | 2.02E-04 |
| 0.578947 | 0.578947 | 0.578789 | 1.58E-04 |
| 0.631579 | 0.631579 | 0.631509 | 7.00E-05 |
| 0.684211 | 0.684211 | 0.684261 | 5.02E-05 |
| 0.736842 | 0.736842 | 0.737022 | 1.80E-04 |
| 0.789474 | 0.789474 | 0.789763 | 2.89E-04 |
| 0.842105 | 0.842105 | 0.842439 | 3.33E-04 |
| 0.894737 | 0.894737 | 0.894998 | 2.61E-04 |
| 0.947368 | 0.947368 | 0.947379 | 1.08E-05 |
| 1 | 1 | 0.999511 | 4.89E-04 |

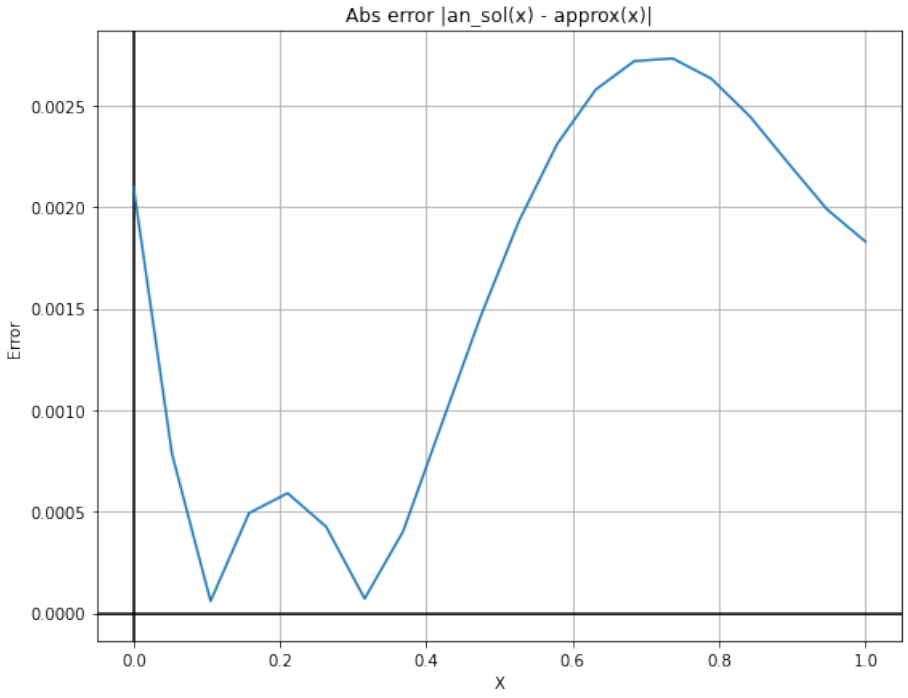



Рис. 4: Абсолютная погрешность аппроксимации (пример 2).

Были проведены и другие эксперименты. Во всех экспериментах нейросеть неплохо справлялась аппроксимацией. Как показывают эксперименты, результаты можно улучшить путем изменения гиперпараметров, например увеличением количества эпох обучения, изменением

количества скрытых слоев, нейронов в слое. Можно так же попробовать изменять learning rate, увеличить количество точек точек для обучения, использовать большее количество узлов для численного вычисления интегралов либо вычислять значение интегралов с помощью методов более высокого порядка точности. Нужно так же отметить, что классические методы решения линейных интегральных уравнений, такие, как например метод квадратур имеют погрешность порядка

$$\left||u-\widetilde{u}|\right| \sim o(h^2)$$

где $h$– размер сетки. Очевидно, что при достаточно плотной сетке они гораздо точнее, чем данный метод. Приведенные в статье результаты являются одними из лучших, найденных авторами статьи для данных примеров. Однако данный метод универсален, применим для разных классов интегральных уравнений и на выходе дает готовую функцию, с помощью которой можно получить значение искомой функции в различных точках области определения, поэтому возможно, что у данного метода есть своя область применения.

Интересно заметить, что максимальная норма невязки сильно коррелирует с максимальной абсолютной разностью между точным решением и аппроксимацией, что еще раз подтверждает теоретическую оценку

$$\left||u-\widetilde{u}|\right|_{C[a,b]} \leq C_1 \left||r[\widetilde{u}]|\right|_{C[a,b]}$$

## 5. Заключение

В статье продемонстрирован численный метод решения интегральных уравнений с помощью нейросетей, проведены численные эксперименты. Как видно из результатов, нейросети вполне неплохо справляются с численным решением интегральных уравнений, причем уравнений различных классов. Несмотря на то, что в данной статье рассматривались лишь уравнения Фредгольма и Вольтерры, в целом этот метод подходит для решения произвольного нелинейного интегрального уравнения при условии, что пределы интегрирования конечны, интегральный оператор непрерывен, а подынтегральная функция ограничена.Алгоритм метода не накладывает ограничений на вид интегрального уравнения. Интуитивно ясно, что чем меньше максимальное значение невязки $\left||r[\widetilde{u}]|\right|_{C[a,b]}$, тем ближе аппроксимация к точному решению. Однако строго доказано это лишь для уравнения Фредгольма при некоторых условиях, приведенных раннее, в других случаях это требует доказательства. Но насколько малым должен быть квадрат невязки, чтобы считать аппроксимацию нейросетью достаточно точной? Как лучше выбрать архитектуру нейросети, чтобы искусственная нейронная сеть могла в теории аппроксимировать искомую функцию? Это вопросы, требующие дополнительных исследований.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hosseini S. M., Shahmorad S. Numerical piecewise approximate solution of Fredholm integro-differential equations by the Tau method //Applied Mathematical Modelling. 2005. Т. 29. №. 11. С. 1005-1021.

2. Maleknejad K., Nouri K., Yousefi M. Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations //Applied Mathematics and Computation. 2007. Т. 193. №. 2. С. 335-339.

3. Maleknejad K., Aghazadeh N., Rabbani M. Numerical solution of second kind Fredholm integral equations system by using a Taylor-series expansion method //Applied Mathematics and Computation. 2006. Т. 175. №. 2. С. 1229-1234.

4. Gülsu M., Sezer M. The approximate solution of high-order linear difference equations with variable coefficients in terms of Taylor polynomials //Applied mathematics and computation. 2005. Т. 168. №. 1. С. 76-88.

5. Ghasemi M., Kajani M. T., Babolian E. Numerical solutions of the nonlinear Volterra–Fredholm integral equations by using homotopy perturbation method // Applied Mathematics and Computation. 2007. Т. 188. №. 1. С. 446-449.

6. Ghasemi M., Kajani M. T., Babolian E. Numerical solutions of the nonlinear Volterra–Fredholm integral equations by using homotopy perturbation method // Applied Mathematics and Computation. 2007. Т. 188. №. 1. С. 446-449.

7. Abbasbandy S. Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method // Applied Mathematics and Computation. 2006. Т. 173. №. 1. С. 493-500.

8. Nasir A. N. K., Tokhi M. O. Novel metaheuristic hybrid spiral-dynamic bacteria-chemotaxis algorithms for global optimisation //Applied Soft Computing. 2015. Т. 27. С. 357-375.

9. Hu Y. C. Flow-based tolerance rough sets for pattern classification //Applied Soft Computing. 2015. Т. 27. С. 322-331.

10. Livi L., Rizzi A., Sadeghian A. Granular modeling and computing approaches for intelligent analysis of non-geometric data //Applied Soft Computing. 2015. Т. 27. С. 567-574.

11. Bildik N., Konuralp A., Yalçınbaş S. Comparison of Legendre polynomial approximation and variational iteration method for the solutions of general linear Fredholm integro-differential equations //Computers and Mathematics with Applications. 2010. Т. 59. №. 6. С. 1909-1917.

12. Saneifard R. Extended artificial neural networks approach for solving two-dimensional fractional-order Volterra-type integro-differential equations //Information Sciences. 2022. Т. 612. С. 887-897.

13. Jadoon I. Integrated meta-heuristics finite difference method for the dynamics of nonlinear unipolar electrohydrodynamic pump flow model //Applied Soft Computing. 2020. Т. 97. С. 106-791.

14. Livi L., Rizzi A., Sadeghian A. Granular modeling and computing approaches for intelligent analysis of non-geometric data //Applied Soft Computing. 2015. Т. 27. С. 567-574.

15. Lagaris I. E., Likas A., Fotiadis D. I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations //IEEE transactions on neural networks. 1998. Т. 9. №. 5. С. 987-1000.

16. Koryagin A., Khudorozkov R., Tsimfer S. PyDEns: A python framework for solving differential equations with neural networks // ArXiv preprint arXiv: 1909.11544. 2019.

17. Guan Y. Solving Fredholm integral equations using deep learning //International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2022. Т. 8. №. 2. С. 87.

18. Effati S., Buzhabadi R. A neural network approach for solving Fredholm integral equations of the second kind //Neural Computing and Applications. 2012. Т. 21. С. 843-852.

19. Jafarian A., Measoomy S., Abbasbandy S. Artificial neural networks based modeling for solving Volterra integral equations system //Applied Soft Computing. 2015. Т. 27. С. 391-398.

20. Zhang J.B., Yu D.M., Pan X.M. Physics-Informed Neural Networks For the Solution of Electromagnetic Scattering by Integral Equations //2022 International Applied Computational Electromagnetics Society Symposium (ACES-China). IEEE, 2022. С. 1-2.

## REFERENCES

1. Hosseini, S.M., Shahmorad, S. 2025, "Numerical piecewise approximate solution of Fredholm integro-differential equations by the Tau method", *Applied Mathematical Modelling.*, T. 29, no. 11, pp. 1005–1021.

2. Maleknejad, K., Nouri, K., Yousefi, M. 2007, "Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations", *Applied Mathematics and Computation.*, T. 193, no. 2. pp. 335–339.

3. Maleknejad, K., Aghazadeh, N., Rabbani, M. 2006, "Numerical solution of second kind Fredholm integral equations system by using a Taylor-series expansion method", *Applied Mathematics and Computation.*, T. 175, no 2, pp. 1229–1234.

4. Gülsu, M., Sezer, M. 2005, "The approximate solution of high-order linear difference equations with variable coefficients in terms of Taylor polynomials", *Applied mathematics and computation.*, T. 168, no. 1, pp. 76–88.

5. Ghasemi, M., Kajani, M.T., Babolian, E. 2007, "Numerical solutions of the nonlinear Volterra–Fredholm integral equations by using homotopy perturbation method", *Applied Mathematics and Computation.*, T. 188, no. 1, pp. 446–449.

6. Ghasemi, M., Kajani, M.T., Babolian, E. 2007, "Numerical solutions of the nonlinear Volterra–Fredholm integral equations by using homotopy perturbation method", *Applied Mathematics and Computation.*, T. 188, no. 1, pp. 446–449.

7. Abbasbandy, S. 2006, "Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method", *Applied Mathematics and Computation.*, T. 173, no. 1, pp. 493–500.

8. Nasir, A.N.K., Tokhi, M.O. 2015, "Novel metaheuristic hybrid spiral-dynamic bacteria-chemotaxis algorithms for global optimisation", *Applied Soft Computing.*, T. 27, pp. 357–375.

9. Hu, Y.C. 2015, "Flow-based tolerance rough sets for pattern classification", *Applied Soft Computing.*, T. 27, pp. 322–331.

10. Livi, L., Rizzi, A., Sadeghian, A. 2015, "Granular modeling and computing approaches for intelligent analysis of non-geometric data", *Applied Soft Computing.*, T. 27, pp. 567–574.

11. Bildik, N., Konuralp, A., Yalçınbaş, S. 2010, "Comparison of Legendre polynomial approximation and variational iteration method for the solutions of general linear Fredholm integro-differential equations", *Computers and Mathematics with Applications.*, T. 59, no. 6, pp. 1909–1917.

12. Saneifard, R. 2022, "Extended artificial neural networks approach for solving two-dimensional fractional-order Volterra-type integro-differential equations", *Information Sciences.*, T. 612, pp. 887–897.

13. Jadoon, I. 2020, "Integrated meta-heuristics finite difference method for the dynamics of nonlinear unipolar electrohydrodynamic pump flow model", *Applied Soft Computing.*, T. 97, pp. 106–791.

14. Livi, L., Rizzi, A., Sadeghian, A. 2015, "Granular modeling and computing approaches for intelligent analysis of non-geometric data", *Applied Soft Computing.*, T. 27, pp. 567–574.

15. Lagaris, I. E., Likas, A., Fotiadis, D. I. 1998, "Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations". *IEEE transactions on neural networks.*, T. 9, no. 5, pp. 987–1000.

16. Koryagin, A., Khudorozkov, R., Tsimfer, S. 2019, "PyDEns: A python framework for solving differential equations with neural networks", *arXiv preprint arXiv:1909.11544.*

17. Guan, Y. 2022, "Solving Fredholm integral equations using deep learning", *International Journal of Applied and Computational Mathematics.*, T. 8, no 2, pp. 87.

18. Effati, S., Buzhabadi, R. 2012, "A neural network approach for solving Fredholm integral equations of the second kind", *Neural Computing and Applications.*, T. 21, pp. 843–852.

19. Jafarian, A., Measoomy, S., Abbasbandy, S. 2015, "Artificial neural networks based modeling for solving Volterra integral equations system", *Applied Soft Computing.*, T. 27, pp. 391–398.

20. Zhang, J. B., Yu, D. M., Pan, X. M. 2022, "Physics-Informed Neural Networks For the Solution of Electromagnetic Scattering by Integral Equations", *2022 International Applied Computational Electromagnetics Society Symposium (ACES-China).*, IEEE, pp. 1–2.

Получено: 17.05.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-140-163

# О рациональных аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке суммами Абеля – Пуассона[1]

П. Г. Поцейко

**Поцейко Павел Геннадьевич** — кандидат физико-математических наук, Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (г. Гродно, Республика Беларусь).
*e-mail: paha-mat@yandex.ru*

**Аннотация**

Изучаются рациональные аппроксимации на отрезке $[-1,\ 1]$ сингулярных интегралов вида

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \qquad x \in [-1,\ 1].$$

Аппаратом приближений являются суммы Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва, ассоциированные с системой рациональных функций Чебышёва – Маркова, с произвольным фиксированным количеством геометрически-различных полюсов. Установлено интегральное представление приближений. В случае, когда плотность сингулярного интеграла имеет степенную особенность, найдены оценки поточечных приближений, равномерных приближений с определенной мажорантой, ее асимптотическое выражение и оптимальные значения параметров, при которых мажоранта имеет наибольшую скорость убывания.

Следствием полученных результатов являются оценки приближений сингулярных интегралов с плотностью, имеющей степенную особенность, суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

Получены оценки приближений сингулярных интегралов с плотностью, удовлетворяющей на отрезке $[-1,\ 1]$ условию Липшица, суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Особенностью найденных оценок является их зависимость от положения точки на отрезке. Причем на концах отрезка скорость является выше, чем в целом на отрезке.

Установлено, что классы изучаемых сингулярных интегралов с плотностью, имеющей степенную особенность, в некоторых случаях отражают особенности рациональной аппроксимации в том смысле, что при специальном выборе параметров скорости равномерных рациональных приближений оказываются выше соответствующих полиномиальных аналогов.

*Ключевые слова:* сингулярный интеграл на отрезке, рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, суммы Абеля – Пуассона, функции со степенной особенностью, условие Липшица, равномерные оценки, асимптотические оценки.

*Библиография:* 25 названий.

**Для цитирования:**
Поцейко, П.Г. О рациональных аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке суммами Абеля – Пуассона // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 140–163.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», №20162269 (Республика Беларусь).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-140-163

# On rational approximations of a singular integral on a segment by Abel — Poisson sums

P. G. Potseiko

**Potseiko Pavel Gennad'evich** — candidate of physical and mathematical sciences, Yanka Kupala State University of Grodno (Grodno, Belarus).
*e-mail: paha-mat@yandex.ru*

**Abstract**

Rational approximations on the segment $[-1,\ 1]$ are studied of singular integrals of the form

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x \in [-1,\ 1].$$

The approximation apparatus is the Abel – Poisson sums of rational integral Fourier operators – Chebyshev associated with a system of rational Chebyshev – Markov functions, with an arbitrary fixed number of geometrically different poles. An integral representation of the approximations is established. In the case when the density of the singular integral has a power-law singularity, estimates are found pointwise approximations, uniform approximations with a certain majorant, its asymptotic expression and optimal values of parameters at which the majorant has the highest rate of decrease.

A consequence of the results obtained are estimates of approximations of singular integrals with density having a power-law singularity by Abel – Poisson sums of the polynomial Fourier – Chebyshev series.

Estimates of approximations of singular integrals with a density satisfying the Lipschitz condition on the segment $[-1,\ 1]$ by Abel – Poisson sums of the polynomial Fourier series – Chebyshev are established. The peculiarity of the estimates found is their dependence on the position of the point on the segment. Moreover, at the ends of the segment, the speed is higher than in the whole segment.

It is established that the classes of studied singular integrals with a density having a power-law singularity in some cases reflect the features of rational approximation in the sense that with a special choice of the velocity parameters of uniform rational approximations they turn out to be higher than the corresponding polynomial analogues.

*Keywords:* Singular integral on a segment, Rational integral Fourier – Chebyshev operator, Abel – Poisson sums, functions with power singularity, Lipschitz condition, uniform estimates, asymptotic estimates.

*Bibliography:* 25 titles.

**For citation:**
Potseiko, P.G. 2024, "On rational approximations of a singular integral on a segment by Abel — Poisson sums" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 140–163.

## 1. Введение

При решении многих задач математики и физики встречаются сингулярные интегралы с ядром типа Коши следующего вида:

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \qquad x \in [-1,\ 1], \tag{1}$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, где плотность $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица любого порядка [1, 2]. Известно, что сингулярные интегралы вида (1) в явном виде вычисляются в очень редких случаях. Поэтому как в теоретических исследованиях, так в особенности для различных приложений важное значение имеет разработка приближенных методов их вычисления.

Полиномиальные аппроксимации сингулярных интегралов вида (1) исследовались многими авторами (см., напр., [3, 4]). Отметим исследования в этом направлении методами численного анализа [5, 6, 7, 8].

В работах известного белорусского математика В. Н. Русака [9], а также его учеников [10] и совместных работах [11] были изучены рациональные аппроксимации сингулярных интегралов вида (1), с плотностью принадлежащей различным классам непрерывных функций на отрезке. В работе [12] исследованы рациональные аппроксимации сингулярных интегралов вида (1) интегральным оператором Фурье – Чебышёва [13], ассоциированным с системой рациональных функций Чебышёва – Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. В частности, установлено что при специальном выборе полюсов аппроксимирующей рациональной функции скорость равномерных рациональных приближений сингулярных интегралов вида (1) с плотностью, имеющей степенную особенность, является выше соответствующих полиномиальных аналогов.

Аппроксимационные свойства сумм Абеля – Пуассона рядов Фурье в полиномиальной аппроксимации хорошо известны как в периодическом [14, 15, 16, 17], так и в алгебраическом [18, 19] случаях. В 1963 году А. А. Китбалян [20] предложил подход к построению сумм Абеля – Пуассона тригонометрических рядов Фурье, введенных М. М. Джрбашяном [21], а также им сопряженных. В частности, установлен ряд теорем о равномерной сходимости при $r \to 1$ сумм Абеля – Пуассона рациональных рядов Фурье к функции $f \in L_p(-\pi,\ \pi), p > 1$. В работе [22] были введены суммы Абеля – Пуассона рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва [13] с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов и исследованы его аппроксимационные свойства на классах функций представимых функцией Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$.

Целью настоящей работы является изучение аппроксимационных свойств сумм Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва на классах функций, задаваемых сингулярным интегралом вида (1). Представляет интерес получить соответствующие оценки равномерных приближений суммами Абеля – Пуассона и выяснить зависимость оценок от выбора полюсов аппроксимирующей функции.

## 2. Суммы Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и интегральное представление приближений

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где $a_k$ либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на

отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [13]:

$$s_n(f,\ x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}f(\cos v)\frac{\sin\left(\dfrac{v-u}{2}+\lambda_n(v,\ u)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv,\quad x=\cos u, \tag{2}$$

где

$$\lambda_n(v,\ u)=\int\limits_{u}^{v}\lambda_n(y)\,dy,\quad \lambda_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2}, \tag{3}$$

$$z_k=\frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |z_k|<1.$$

Оператор $s_n: f\to\mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n\,(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_kx)},$$

$A$ – множество параметров $(a_1,\ldots,a_n)$, $p_n\,(x)$ – некоторый многочлен степени не выше $n$, коэффициенты которого зависят от $a_k$, является точным на константах. В частности, если положить $a_k=0,\ k=1,\ldots,n$, то $s_n(f,\ x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье–Чебышева.

Пусть $q\in(0,\ n)$ – произвольное натуральное число. $A_q\subset A$ – есть множество параметров таких, что среди чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$, ровно $q$ различных и кратность каждого параметра равна $m,\ n=mq$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с $q$ геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости. Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К. Н. Лунгу [23, 24].

Выражение

$$P_{r,q}(f,\ x)=(1-r)\sum_{k=0}^{+\infty}r^ks_{kq}(f,\ x),\quad x\in[-1,1],\ r\in(0,\ 1), \tag{4}$$

назовем суммами Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов типа Фурье – Чебышева с $q$ геометрически различными полюсами (см. [22]). Отметим, что из представления (4) и свойств рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва следует $P_{r,q}(1,\ x)=1$.

Введём обозначения:

$$\varepsilon_{r,q}(\hat f,\ x,\ A_q)=\hat f(x)-P_{r,q}(\hat f,\ x),\quad x\in[-1,\ 1], \tag{5}$$

$$\varepsilon_{r,q}(\hat f,\ A_q)=\left\|\hat f(x)-P_{r,q}(\hat f,\ x)\right\|_{C[-1,\ 1]},\quad r\in(0,\ 1). \tag{6}$$

Теорема 1. *Для приближений сингулярного интеграла $\hat f(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля – Пуассона* (4) *имеет место интегральное представление*

$$\varepsilon_{r,q}(\hat f,\ x,\ A_q)=-\frac{1-r}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\sin v\frac{\cos\dfrac{v-u}{2}-r\cos\left(\dfrac{v-u}{2}-\lambda_q(v,\ u)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}(1-2r\cos\lambda_q(v,\ u)+r^2)}\,dv, \tag{7}$$

*где величина $\lambda_q(v,\ u)$ из* (3), $x=\cos u$.

Доказательство. В работе [12] установлено интегральное представление приближений на отрезке $[-1,1]$ сингулярного интеграла (1) рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2)

$$\delta_n(\hat{f},\ x,\ A) = \hat{f}(x) - s_n(\hat{f},\ x) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\sin v \frac{\cos\left(\dfrac{v-u}{2} + \lambda_n(v,\ u)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv, \tag{8}$$

где $x = \cos u,\ x \in [-1,\ 1]$.
Отметим, что интеграл справа является сингулярным и понимается в смысле главного значения по Коши. Для его существования достаточно, чтобы плотностью удовлетворяла условию Липшица любого порядка. В случае $q$ геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции, представление (8) примет вид

$$\delta_{mq}(\hat{f},\ x,\ A_q) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\sin v \frac{\cos\left(\dfrac{v-u}{2} + m\lambda_q(v,\ u)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv,$$

где $n = mq,\ x = \cos u,\ x \in [-1,\ 1]$.
Из последнего представления, учитывая, что (см. [21, лемма 5])

$$\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)} = \mathrm{e}^{i\lambda_q(v,\ u)}, \quad \omega_q(\zeta) = \prod_{k=1}^{q}\frac{\zeta + z_k}{1 + \overline{z}_k\zeta}, \quad \xi = \mathrm{e}^{iu}, \zeta = \mathrm{e}^{iv},$$

нетрудно получить

$$\delta_{mq}(\hat{f},\ x,\ A_q) = -\frac{i}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos v)\sin v}{\zeta - \xi}\left(\zeta\frac{\omega_q^m(\zeta)}{\omega_q^m(\xi)} + \xi\frac{\omega_q^m(\xi)}{\omega_q^m(\zeta)}\right)dv. \tag{9}$$

С другой стороны, умножим правую и левую части равенства

$$\delta_{kq}(\hat{f},\ x,\ A_q) = \hat{f}(x) - s_{kq}(\hat{f},\ x), \quad x \in [-1,1],\ k = 0,1,\ldots$$

на $(1-r)r^k,\ r \in (0,\ 1),\ k = 0,1,2,\ldots$, и просуммируем по $k$ от 0 до $+\infty$. Тогда

$$(1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k\delta_{kq}(\hat{f},\ x,\ A_q) = \hat{f}(x) - (1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k s_{kq}(\hat{f},\ x) = \varepsilon_{r,q}(\hat{f},\ x,\ A_q), \quad x \in [-1,\ 1]. \tag{10}$$

Подставим соотношение (9) в (10) и заменим порядки суммирования и интегрирования. Тогда

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f},\ x,\ A_q) = -\frac{(1-r)i}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos v)\sin v}{\zeta - \xi}\left[\zeta\sum_{k=0}^{+\infty}\left(r\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k + \xi\sum_{k=0}^{+\infty}\left(r\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k\right]dv.$$

Отметим, что справа находится сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши. Ряды в квадратных скобках представляют собой суммы геометрических прогрессий с соответствующими знаменателями $|r\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(\zeta)| < 1$ и $|r\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}| < 1$, где $\xi = \mathrm{e}^{iu}$, $\zeta = \mathrm{e}^{iv}$, $r \in (0,\ 1)$. Следовательно,

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}(\hat{f},\ x,\ A_q) = -\frac{(1-r)i}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos v)\sin v}{\zeta - \xi}\left[\frac{\zeta}{1 - r\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)}} + \frac{\xi}{1 - r\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}}\right]dv. \tag{11}$$

После соответствующих алгебраических преобразований, последнее интегральное представление приводится к виду

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f},\ x,\ A_q) = -\frac{(1-r)i}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\sin v \frac{\zeta+\xi-r[\xi\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)}+\zeta\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}]}{(\zeta-\xi)(1-r[\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)}+\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}]+r^2)}\,dv.$$

Умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $2\sqrt{\xi\zeta}$ и заметив, что $\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)} = \mathrm{e}^{i\lambda_q(v,\ u)}$, где $\lambda_q(v,\ u)$ из (3), придем к (7). Теорема 1 доказана. □

В теореме 1 положим значения параметров $z_k = 0,\ k = 1,\ 2,\dots,q$. Тогда величина $\varepsilon_{r,0}(\hat{f},\ x,\ O) = \varepsilon_r^{(0)}(\hat{f},\ x)$ представляет собой приближения сингулярного интеграла (1) суммами Абеля – Пуассона полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Отсюда получим

Следствие 1. *Имеет место интегральное представление*

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f},\ x) = -\frac{(1-r)^2}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\sin v \frac{dv}{\operatorname{tg}\dfrac{v-u}{2}(1-2r\cos(v-u)+r^2)},\quad x=\cos u. \tag{12}$$

## 3. Приближения сингулярных интегралов с плотностью, удовлетворяющей условию Липшица (полиномиальный случай)

Рассмотрим класс $\hat{H}^{(\gamma)}[-1,\ 1]$, $\gamma\in(0,\ 1]$, функций, задаваемых сингулярными интегралами (1), с плотностью $f$, удовлетворяющей на отрезке $[-1,\ 1]$ условию Липшица степени $\gamma$, $\gamma\in(0,\ 1]$, с константой равной единице, то есть условию

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le |x_1-x_2|^{\gamma},\quad x_1,x_2\in[-1,\ 1].$$

Получим оценку сверху величины (12) уклонений сумм Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва от функции $\hat{f}(x)\in\hat{H}^{(\gamma)}[-1,\ 1]$, $\gamma\in(0,\ 1]$.

Теорема 2. *Если $\hat{f}(x)\in\hat{H}^{(\gamma)}[-1,\ 1]$, $\gamma\in(0,\ 1]$, то при $r\to 1$ равномерно относительно $x\in[-1,1]$ справедлива оценка*

$$|\varepsilon_r^{(0)}(f,\ x)| \le \frac{\pi(\sqrt{1-x^2})^{\gamma+1}(1-r)^{\gamma}}{(\sqrt{r})^{\gamma}\sin\dfrac{\pi\gamma}{2}} + \mu_r^{(\gamma)}(x) + \delta_r^{(\gamma)}(x),\quad \gamma\in(0,\ 1], \tag{13}$$

*где*

$$\mu_r^{(\gamma)}(x) = \begin{cases} O\left(|x|(\sqrt{1-x^2})^{\gamma}(1-r)^{\gamma+1}\right) + O\left(|x|^{\gamma}\sqrt{1-x^2}(1-r)^{2\gamma}\right),\quad \gamma\in(0,\ 1), \\ O\left(|x|\sqrt{1-x^2}(1-r)^2\ln\dfrac{1}{1-r}\right),\quad \gamma=1,\quad r\to 1, \end{cases} \tag{14}$$

$$\delta_r^{(\gamma)}(x) = \begin{cases} O(|x|^{\gamma+1}(1-r)^{2\gamma+1}),\quad \gamma\in(0,\ 1/2), \\ O\left(|x|^{\frac{3}{2}}(1-r)^2\ln\dfrac{1}{1-r}\right),\quad \gamma=1/2, \\ O(|x|^{\gamma+1}(1-r)^2),\quad \gamma\in(1/2,\ 1). \end{cases} \tag{15}$$

*При этом:*

$$\delta_r^{(\gamma)}(\pm 1)=\begin{cases}\dfrac{\pi(1-r)^{2\gamma+1}}{2^{\gamma}(\sqrt{r})^{2\gamma+1}\sin\pi\gamma}, & \gamma\in(0,\ 1/2),\\ \dfrac{\sqrt{2}}{r}(1-r)^2\ln\dfrac{1}{1-r}, & \gamma=1/2,\\ \dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma-1/2)}{2^{2-\gamma}\Gamma(1+\gamma)}(1-r)^2, & \gamma\in(1/2,\ 1],\end{cases}\tag{16}$$

*где* $\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера.*

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением приближений (12). Применив очевидное тождество

$$\varepsilon_r^{(0)}(1,\ x)=0,\quad x\in[-1,\ 1],$$

получим

$$|\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f},\ x)|\le\frac{(1-r)^2}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\cos v-\cos u|^{\gamma}|\sin v|\frac{dv}{\left|\operatorname{tg}\dfrac{v-u}{2}\right|(1-2r\cos(v-u)+r^2)},\quad x=\cos u.$$

Заметив, что подынтегральная функция в интеграле справа является $2\pi$-периодической по переменному интегрирования, приходим к оценке

$$|\varepsilon_r^{(0)}(f,\ x)|\le\frac{(1-r)^2}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\cos(v+u)-\cos u|^{\gamma}|\sin(v+u)|\frac{dv}{\left|\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\right|(1-2r\cos v+r^2)},\quad x=\cos u.$$

Представим интеграл в последней оценке в виде суммы двух интегралов так, что

$$|\varepsilon_r^{(0)}(f,\ x)|\le\frac{1}{2}\left[I_r(+u)+I_r(-u)\right],\quad r\in(0,\ 1),\tag{17}$$

где

$$I_r(\pm u)=(1-r)^2\int\limits_{0}^{\pi}|\cos(u\pm v)-\cos u|^{\gamma}|\sin(u\pm v)|\frac{dv}{\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}(1-2r\cos v+r^2)},\quad x=\cos u.\tag{18}$$

Исследуем асимптотическое поведение интеграла $I_r(\pm u)$ при $r\to 1$ в зависимости от значения $\gamma\in(0,\ 1]$. Имеем

$$I_r(\pm u)=(1-r)^2\int\limits_{0}^{\pi}|\sin u\sin v\pm 2\cos u\sin^2\frac{v}{2}|^{\gamma}\frac{|\sin u\cos v\pm\cos u\sin v|\,dv}{\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}(1-2r\cos v+r^2)},\quad x=\cos u.$$

Учитывая, что

$$|A\pm B|^{\gamma}=|A|^{\gamma}+\theta|B|^{\gamma},\quad \theta\in[-1,\ 1],$$

получим

$$I_r(\pm u)=(1-r)^2\Big(|\sin u|^{\gamma+1}I_r^{(1)}(u)+|\cos u||\sin u|^{\gamma}\theta_1 I_r^{(2)}(u)+$$

$$+2^{\gamma}|\cos u|^{\gamma}|\sin u|\theta_2 I_r^{(3)}(u)+2^{\gamma}|\cos u|^{\gamma+1}\theta_3 I_r^{(4)}(u)\Big),\quad x=\cos u,\ r\in(0,\ 1),\tag{19}$$

где

$$I_r^{(1)}(u)=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\sin v)^{\gamma}|\cos v|\,dv}{\operatorname{tg} v/2(1-2r\cos v+r^2)},\quad I_r^{(2)}(u)=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\sin v)^{\gamma+1}\,dv}{\operatorname{tg} v/2(1-2r\cos v+r^2)},$$

$$I_r^{(3)}(u)=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\sin v/2)^{2\gamma}|\cos v|\,dv}{\operatorname{tg} v/2(1-2r\cos v+r^2)},\quad I_r^{(4)}(u)=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\sin v/2)^{2\gamma}\sin v\,dv}{\operatorname{tg} v/2(1-2r\cos v+r^2)}.$$

Проведём исследование каждого интеграла по отдельности. Рассмотрим интеграл $I_r^{(1)}(u)$. После соответствующих преобразований он приводится к виду

$$I_r^{(1)}(u)=2^{\gamma+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos v)^{\gamma+1}(\sin v)^{\gamma-1}}{(1-r)^2+(2\sqrt{r}\sin v)^2}\,dv+2^{\gamma+2}\theta_4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos v)^{\gamma+1}(\sin v)^{\gamma+1}}{(1-r)^2+(2\sqrt{r}\sin v)^2}\,dv,\ \theta_4\in[-1,\ 1].$$

Воспользовавшись асимптотическим равенством [18, с. 138], получим, что при $r\to 1$

$$I_r^{(1)}(u)=\frac{2^{\gamma+1}}{(1-r)^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{v^{\gamma-1}\,dv}{1+\left(\dfrac{2\sqrt{r}}{1-r}v\right)^2}+\frac{2^{\gamma+2}\theta_4}{(1-r)^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{v^{\gamma+1}\,dv}{1+\left(\dfrac{2\sqrt{r}}{1-r}v\right)^2}+O(1)=$$

$$=\frac{2(1-r)^{\gamma-2}}{(\sqrt{r})^{\gamma}}\int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}}\frac{v^{\gamma-1}\,dv}{1+v^2}+\frac{\theta_4(1-r)^{\gamma}}{(\sqrt{r})^{\gamma+2}}\int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}}\frac{v^{\gamma+1}\,dv}{1+v^2}+O(1).$$

Заметив, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}}\frac{v^{\gamma+1}\,dv}{1+v^2}=O((1-r)^{-\gamma}),\quad r\to 1,$$

находим

$$I_r^{(1)}(u)=\frac{2(1-r)^{\gamma-2}}{(\sqrt{r})^{\gamma}}\int\limits_0^{\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}}\frac{v^{\gamma-1}\,dv}{1+v^2}+O(1),\quad r\to 1.$$

Теперь с учетом того, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{v^{\gamma-1}\,dv}{1+v^2}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sin\dfrac{\pi\gamma}{2}}, & \gamma\in(0,\ 1),\\ \dfrac{\pi}{2}, & \gamma=1,\end{cases}$$

будем иметь

$$I_r^{(1)}(u)=\frac{\pi}{(\sqrt{r})^{\gamma}\sin\dfrac{\pi\gamma}{2}}(1-r)^{\gamma-2}+O(1),\quad \gamma\in(0,\ 1]. \tag{20}$$

Применив аналогичные методы для исследования асимптотического поведения остальных интегралов, заключаем, что

$$I_r^{(2)}(u)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{(\sqrt{r})^{\gamma+1}\cos\dfrac{\pi\gamma}{2}}(1-r)^{\gamma-1}+O(1), & \gamma\in(0,\ 1),\\ \dfrac{2}{r}\ln\dfrac{1}{1-r}+O(1), & \gamma=1,\end{cases} \tag{21}$$

$$I_r^{(3)}(u) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2^{2\gamma} r^{\gamma} \sin \pi\gamma}(1-r)^{2\gamma-2} + O(1), & \gamma \in (0,\ 1), \\ \dfrac{1}{4r} \ln \dfrac{1}{1-r} + O(1), & \gamma = 1, \end{cases} \tag{22}$$

$$I_r^{(4)}(u) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2^{2\gamma} \sqrt{r}^{2\gamma+1} \sin \pi\gamma}(1-r)^{2\gamma-1} + O(1), & \gamma \in (0,\ 1/2), \\ \dfrac{1}{r} \ln \dfrac{1}{1-r} + O(1), & \gamma = 1/2, \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma - 1/2)}{4\Gamma(1+\gamma)}, & \gamma \in (1/2,\ 1). \end{cases} \tag{23}$$

Из равенства (19) с учетом найденных асимптотических соотношений (20), (21), (22) и (23) следует, что

$$I_r(\pm u) = \frac{\pi(\sqrt{1-x^2})^{\gamma+1}(1-r)^{\gamma}}{(\sqrt{r})^{\gamma} \sin \dfrac{\pi\gamma}{2}} + \mu_r^{(\gamma)}(x) + \delta_r^{(\gamma)}(x), \quad \gamma \in (0,\ 1], \quad r \to 1,$$

где величина $\mu_r^{(\gamma)}(x)$ определена в (14), $\delta_r^{(\gamma)}(x)$ определена в (15). Из последнего равенства и (17) непосредственно следует (13) Теорема 2 доказана. □

## 4. Приближения сингулярного интеграла с плотностью, имеющей степенную особенность

Изучим приближения суммами Абеля – Пуассона (4) сингулярного интеграла (1) с плотностью $f_s(x) = |x|^s$, $s \in (0,\ +\infty)$, то есть класса функций

$$\hat{f}_s(x) = 2x \int_0^1 \frac{t^s}{t^2 - x^2} \sqrt{1-t^2}\, dt, \quad x \in [-1,\ 1].$$

Для дальнейших рассуждений необходимо определенным образом выбрать параметры аппроксимирующей рациональной функции. При известном $s \in (0, +\infty)$ положим $n \mapsto 2n + 2p$, $p = \left[\frac{s}{2}\right] + 1$, и $A_{2q}$ – множество параметров $\{z_k\}_{k=1}^{2n}$, имеющих следующий вид:

$$z_k = -z_{q+k},\ z_k = i\alpha_k,\ \alpha_k \in [0,\ 1), \quad k = 1, 2, \ldots, q, \qquad n = mq,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

остальные $2p$ параметров положим равными нулю.

Теорема 3. *Для приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$, $s \in (0, +\infty)$, на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с $q$ геометрически различными полюсами имеют место:*

*1) интегральное представление:*

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s,\ x,\ A_{2q}) = \frac{(-1)^p(1-r)}{2^{s-1}} \sin \frac{\pi s}{2} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s(1+t^2)t^{2p-s-1} \cos \psi_r(x,\ t)\, dt}{\sqrt{1 + 2t^2 \cos 2u + t^4} \sqrt{1 - 2(-1)^q r \chi_q(t) M_q(x) + r^2 \chi_q^2(t)}}, \quad x = \cos u, \tag{25}$$

*где*

$$\psi_r(x,\ t) = \arg \frac{\xi^{2p+1}}{(1+t^2\xi^2)(1-(-1)^q r \omega_q(\xi)\chi_q(t))}, \quad \chi_q(t) = \prod_{k=1}^{q} \frac{t^2 - \alpha_k^2}{1 - \alpha_k^2 t^2},$$

$$M_q(x) = \frac{1}{2}\left(\omega_q(\xi) + \overline{\omega_q(\xi)}\right),\ \xi = \mathrm{e}^{iu},\ x = \cos u,$$

*– рациональная функция Чебышёва – Маркова порядка $q$;*

*2) поточечная оценка сверху*

$$|\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s,\ x,\ A_{2q})| \le \frac{1-r}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s(1+t^2)t^{2p-s-1}\,dt}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u + t^4}\sqrt{1-2(-1)^q r\chi_q(t)M_q(x) + r^2\chi_q^2(t)}}; \tag{26}$$

*3) равномерная оценка сверху*

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s,\ A_{2q}) \le \varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s,\ A_{2q}), \quad r \in (0,\ 1), \tag{27}$$

*где*

$$\varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s,\ A_{2q}) = \frac{1-r}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-1}(1+t^2)t^{2p-s-1}}{1-r|\chi_q(t)|}\,dt. \tag{28}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (10). В работе [12] установлено интегральное представление приближений функции $\hat{f}_s(x)$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2)

$$\delta_{2n-1}(\hat{f}_s,\ x,\ A) = \frac{(-1)^n}{2^s}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1 (1-t^2)^s(1+t^2)t^{1-s}\left[\frac{\xi^3\omega_{2n-2}(\xi)}{1+t^2\xi^2} + \frac{\overline{\xi\omega_{2n-2}(\xi)}}{\xi^2+t^2}\right]\chi_{2n-2}(t)\,dt,$$

где

$$\omega_{2n-2}(\xi) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\xi^2+\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2\xi^2}, \quad \chi_{2n-2}(t) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{t^2-\alpha_k^2}{1-\alpha_k^2t^2}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

В случае, когда полюсы аппроксимирующей функции удовлетворяют условию (24), последнее интегральное представление примет вид

$$\delta_{2kq+2p}(\hat{f}_s,\ x,\ A_{2q}) = \frac{((-1)^q)^k(-1)^p}{2^s}\sin\frac{\pi s}{2}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 (1-t^2)^s(1+t^2)t^{2p-s-1}\left[\frac{\xi^{2p+1}\omega_q^k(\xi)}{1+t^2\xi^2} + \frac{\xi\overline{\xi^{2p}\omega_q^k(\xi)}}{\xi^2+t^2}\right]\chi_q^k(t)\,dt, \quad \xi = \mathrm{e}^{iu},\ x = \cos u.$$

где $\omega_q(\xi)$ определена в (25).

Умножим правую и левую части в последнем интегральном представлении на $(1-r)r^k,\ r \in \in (0,\ 1)$, и просуммируем по $k$ от 0 до $+\infty$. Тогда

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s,\ x,\ A_{2q}) = \frac{(-1)^p(1-r)}{2^s}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1 (1-t^2)^s(1+t^2)t^{2p-s-1}\times$$

$$\times\left[\frac{\xi^{2p+1}}{1+t^2\xi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}((-1)^q r\omega_q(\xi)\chi_q(t))^k + \frac{\xi\overline{\xi^{2p}}}{\xi^2+t^2}\sum_{k=0}^{+\infty}((-1)^q r\overline{\omega_q(\xi)}\chi_q(t))^k\right]dt.$$

Ряды в подынтегральной функции представляют собой суммы геометрических прогрессий со знаменателями соответственно $|(-1)^q r\omega_q(\xi)\chi_q(t)| < 1$ и $|(-1)^q r\overline{\omega_q(\xi)}\chi_q(t)| < 1$ поэтому сходятся равномерно. Отсюда находим

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s,\ x,\ A_{2q}) = \frac{(-1)^p(1-r)}{2^s}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1 (1-t^2)^s(1+t^2)t^{2p-s-1}\times$$

$$\times\left[\frac{\xi^{2p+1}}{(1+t^2\xi^2)(1-(-1)^q r\omega_q(\xi)\chi_q(t))} + \frac{\xi\overline{\xi^{2p}}}{(\xi^2+t^2)(1-(-1)^q r\overline{\omega_q(\xi)}\chi_q(t))}\right]dt,\ \xi = \mathrm{e}^{iu},\ x = \cos u.$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках подынтегрального выражения являются взаимно комплексно-сопряженными, чтобы прийти к (25) достаточно выполнить соответствующие преобразования и воспользоваться представлением косинус-дроби Чебышёва – Маркова (см., напр., [25]):

$$M_q(x) = \frac{1}{2}\left(\omega_q(\xi) + \overline{\omega_q(\xi)}\right),\quad \xi = \mathrm{e}^{iu},\ x = \cos u.$$

Оценка сверху (26) легко следует из интегрального представления (25).

Для доказательства третьего утверждения теоремы 3 в поточечной оценке (26) воспользуемся легко проверяемыми неравенством

$$\sqrt{1 - 2(-1)^q r\chi_q(t)M_q(x) + r^2\chi_q^2(t)} \geq 1 - r|\chi_q(t)|,\quad r \in (0,\ 1).$$

Теорема 3 доказана. □ В теореме 3 положим значения параметров $\alpha_k = 0, k = 1,\ 2, \ldots, q$. Тогда величина $\varepsilon_{r,0}(\hat{f}_s,\ x,\ O) = \varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s,\ x)$ представляет собой приближения сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

Следствие 2. *Для приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x),\ s \in (0,\ +\infty)$, на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва имеют место: 1) интегральное представление:*

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s,\ x) = \frac{(-1)^p(1-r)}{2^{s-1}}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s(1+t^2)t^{2p-s-1}\cos\psi_r^{(0)}(x,\ t)\,dt}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u + t^4}\sqrt{1+2rt^2\cos 2u + r^2t^4}},\ p = [\frac{s}{2}] + 1,$$

*где*

$$\psi_r^{(0)}(x,\ t) = (2p+1)u - \arg(1+t^2\xi^2)(1+r\xi^2t^2),\quad \xi = \mathrm{e}^{iu},\ x = \cos u;$$

*2) поточечная оценка сверху*

$$|\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s,\ x)| \leq \frac{1-r}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s(1+t^2)t^{2p-s-1}\,dt}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u + t^4}\sqrt{1+2rt^2\cos 2u + r^2t^4}},$$

*3) равномерная оценка сверху*

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s) \leq \frac{1-r}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-1}(1+t^2)t^{2p-s-1}\,dt}{1-rt^2},\quad r \in (0,\ 1). \tag{29}$$

## 5. Асимптотическое выражение мажоранты приближений

Исследуем асимптотическое поведение мажоранты (28) равномерной оценки (27) при $r \to 1$. Для решения поставленной задачи в правой части (28) выполним замену переменного по формуле $t^2 = (1-u)/(1+u)$, $dt = -du/((1+u)^{3/2}(1-u)^{1/2})$. Тогда

$$\varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s,\ A_{2q}) = 2(1-r)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{du}{1-r|\pi_q(u)|}, \tag{30}$$

где

$$\pi_q(u) = \prod_{k=1}^{q} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}, \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2}.$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $r \in (0,\ 1)$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$. То есть, в общем случае $\beta_k = \beta_k(r),\ k = 1, 2, \ldots, q$. При этом будем полагать, что параметры $\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, q$, удовлетворяют следующему условию

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{1-r} \sum_{k=1}^{q} \beta_k = \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, q, \tag{31}$$

и учитывать его в дальнейших рассуждениях. Без нарушения общности пусть параметры $\beta_k,\ k = 1,\ 2, \ldots, q$, упорядочены следующим образом:

$$0 < \beta_q \le \beta_{q-1} \le \ldots \le \beta_1 \le 1.$$

Теорема 4. *При любом $s \in (0,\ +\infty)$ для мажоранты равномерных приближений* (30) *при $r \to 1$ имеют место асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s,\ A_{2q}) \sim \left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \begin{cases} \dfrac{2^{1-s}\pi(1-r)^s}{\sin\pi s \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\beta_k}\right)^s} + (1-r)\Psi_r^{(s)}(A_q), & s \in (0,\ 1), \\ \dfrac{1-r}{\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\beta_k}} \ln(1+\varphi(r,\ A_q)) + (1-r)\Psi_r^{(1)}(A_q), & s = 1, \\ (1-r)\left(\Theta_r^{(s)}(A_q) + \Psi_r^{(s)}(A_q)\right), & s \in (1,\ +\infty), \end{cases} \tag{32}$$

*где*

$$\Theta_r^{(s)}(A_q) = 2\int\limits_0^{\beta_q} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{du}{1-\pi_q(u)},$$

$$\Psi_r^{(s)}(A_q) = 2\sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{du}{1-\prod\limits_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod\limits_{k=j+1}^{q} \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}} +$$

$$+2\int\limits_{\beta_1}^{1} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{du}{1-\prod\limits_{k=1}^{q} \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}}.$$

Доказательство. Задача сводится к изучению асимптотического поведения интеграла в правой части представления (30) при $r \to 1$. Мажоранту (30) представим в виде суммы

$$\varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s,\ A_{2q}) = 2(1-r)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left(I_r^{(1)} + I_r^{(2)} + I_r^{(3)}\right), \quad r \in (0,\ 1), \tag{33}$$

где

$$I_r^{(1)} = \int\limits_0^{\beta_q} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{du}{1-r\pi_q(u)},$$

$$I_r^{(2)} = \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{du}{1-r|\pi_q(u)|},$$

$$I_r^{(3)} = \int\limits_{\beta_1}^{1} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{du}{1-r|\pi_q(u)|}.$$

Выясним, как ведет себя при $r \to 1$ каждый из $(q+1)$ интегралов по отдельности.

Изучим интеграл $I_r^{(1)}$. Пусть $s \in (0,\ 1]$. Заметим, в этом случае что параметр $\beta_q$ целесообразно выбирать сколь угодно близким к нулю. Ввиду этого асимптотика интеграла $I_r^{(1)}$ будет определяться поведением подынтегральной функции в непосредственной близости нуля переменного интегрирования. Воспользуемся приемом Ю. И. Русецкого [18, с. 138]. Учитывая, что

$$\pi_q(u) = 1 - 2\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)u + O\left(2\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^2 u^2\right), \quad u \to 0,$$

равномерно по $r \in [0,\ 1)$ при $u \in (0,\ \beta_q)$ будет

$$\frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{1}{1-r\pi_q(u)} - \frac{u^{s-1}}{1-r\left(1-2u\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)} =$$

$$= O\left(\frac{2ru^{s+1}\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^2}{\left(1-r\left(1-2u\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)\right)^2}\right) + O\left(\frac{u^s}{1-r\left(1-2u\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)}\right).$$

Из последнего порядкового соотношения находим, что

$$I_r^{(1)} = \frac{1}{1-r}\int\limits_0^{\beta_q}\frac{u^{s-1}\,du}{1+\dfrac{2ru}{1-r}\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}} +$$

$$+O\left(\frac{2r}{(1-r)^2}\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^2\int\limits_0^{\beta_q}\frac{u^{s+1}\,du}{\left(1+\dfrac{2ru}{1-r}\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^2}\right) + O\left(\frac{1}{1-r}\int\limits_0^{\beta_q}\frac{u^s\,du}{1+\dfrac{2ru}{1-r}\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}}\right).$$

После замены переменного интегрирования по формуле $2ru(\sum_{k=1}^{q} 1/\beta_k)/(1-r) \mapsto u$, в каждом из интегралов справа получим

$$I_r^{(1)} = \frac{(1-r)^{s-1}}{\left(2r\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s} \int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)} \frac{u^{s-1}\,du}{1+u} +$$

$$+O\left(\frac{(1-r)^s}{(2r)^{s+1}\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s} \int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)} \frac{u^{s+1}\,du}{(1+u)^2}\right) + O\left(\frac{(1-r)^s}{(2r)^{s+1}\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{s+1}} \int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)} \frac{u^s\,du}{1+u}\right), \quad (34)$$

где в силу условия (31) $\varphi(r,\ A_q) = ((2r\beta_q)/(1-r))\sum_{k=1}^{q} 1/\beta_k \to \infty,\ r \to 1$.
Учитывая, что

$$\int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)} \frac{u^{s+1}\,du}{(1+u)^2} = O\left([\varphi(r,\ A_q)]^s\right), \qquad \int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)} \frac{u^s\,du}{1+u} = O\left([\varphi(r,\ A_q)]^s\right), \quad r \to 1,$$

а также

$$\int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)} \frac{u^{s-1}\,du}{1+u} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin \pi s} + O\left([\varphi(r,\ A_q)]^{s-1}\right), & s \in (0,\ 1), \\ \ln(1+\varphi(r,\ A_q)), & s = 1, \end{cases}$$

из (34) получим при $r \to 1$

$$I_r^{(1)} \sim \begin{cases} \dfrac{\pi(1-r)^{s-1}}{\sin \pi s \left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s}, & s \in (0,\ 1), \\ \dfrac{\ln(1+\varphi(r,\ A_q))}{2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}, & s = 1. \end{cases}$$

Последние асимптотическое оценки интеграла $I_r^{(1)}$ были получены для $s \in (0,\ 1]$. Если же $s > 1$, то интеграл (см. (33)) существует при любом значении $r \in (0,\ 1]$. Переходя к пределу при $r \to 1$ под знаком интеграла получим

$$I_r^{(1)} = \int\limits_0^{\beta_q} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{du}{1-\pi_q(u)}, \quad s > 1.$$

Следовательно,

$$I_r^{(1)} \sim \begin{cases} \dfrac{\pi(1-r)^{s-1}}{\sin \pi s \left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s}, & s \in (0,\ 1), \\ \dfrac{\ln(1+\varphi(r,\ A_q))}{2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}, & s = 1, \\ \int\limits_0^{\beta_q} \dfrac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\dfrac{1-u}{1+u}\right)^p \dfrac{du}{1-\pi_q(u)}, & s > 1, \quad r \to 1. \end{cases} \quad (35)$$

Займемся исследованием величины $I_r^{(2)}$ (см. (33)). Подынтегральные функции в каждом из $q-1$ слагаемых в сумме справа на соответствующих интервалах $[\beta_{j+1},\ \beta_j]$, $j=1,2,\ldots,q-1$, непрерывны по переменному $u$ и соответствующие интегралы представляют собой функции параметров $\beta_k \in (0,\ 1]$, $k=1,2,\ldots,q$. Выполнив, в каждом из $q-1$ интегралов предельный переход при $r\to 1$, приходим к асимптотическому равенству

$$I_r^{(2)} \sim \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{u^{s-1}\,du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}\left(1-\prod\limits_{k=1}^{j}\dfrac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod\limits_{k=j+1}^{q}\dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)}, \quad r\to 1. \tag{36}$$

Рассуждая аналогичным образом, находим, что

$$I_r^{(3)} \sim \int\limits_{\beta_1}^{1} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \frac{u^{s-1}\,du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}\left(1-\prod\limits_{k=1}^{q}\dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)}, \quad r\to 1. \tag{37}$$

Теперь из равенства (33) на основании асимптотических соотношений (35) и (36), (37) придем к (32). Теорема 3 доказана. □ Положив в теореме 4 значения параметров $\alpha_k=0$, $k=1,\ 2,\ldots,q$, где $\beta_k=(1-\alpha_k)/(1-\alpha_k)$, величина $\varepsilon^*_{r,q}(\hat f_s,\ O)=\varepsilon_r^{(0)}(\hat f_s)$ представляет собой мажоранту равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat f_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. В этом случае из теоремы 4 получим

Следствие 3. *Для равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat f_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва справедливы оценки*

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat f_s) \le \begin{cases} \left|\sin\dfrac{\pi s}{2}\right| \dfrac{2^{1-s}\pi(1-r)^s}{\sin\pi s}, & s\in(0,\ 1),\\[2ex] (1-r)\ln\dfrac{2}{1-r}, & s=1,\\[2ex] (1-r)\left|\sin\dfrac{\pi s}{2}\right| \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{u^{s-2}\,du}{(1-u)^{\frac{s}{2}+1-p}(1+u)^{\frac{s}{2}+p}}, & s\in(1,\ +\infty). \end{cases} \tag{38}$$

В теореме 4 положим значение $q=1$. В этом случае аппроксимирующая функция имеет два взаимно комплексно-сопряженных полюса в расширенной комплексной плоскости. Тогда

Следствие 4. *При любом $s\in(0,\ +\infty)$ для мажоранты равномерных приближений (30) суммами Абеля – Пуассона с двумя геометрически различными полюсами при $r\to 1$ имеют место асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{r,1}(\hat f_s,\ A_2) \sim \left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \begin{cases} \dfrac{2^{1-s}\pi(1-r)^s\beta^s}{\sin\pi s} + \dfrac{1-r}{\beta}\displaystyle\int\limits_\beta^1 \frac{u^{s-1}(u+\beta)}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)du, & s\in(0,\ 1),\\[2ex] (1-r)\beta\ln\dfrac{2}{1-r} + \dfrac{1-r}{\beta}\displaystyle\int\limits_\beta^1 \frac{(u+\beta)}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)du, & s=1,\\[2ex] (1-r)F_{s,1}(\beta), & s\in(1,+\infty), \end{cases} \tag{39}$$

*где*

$$F_{s,1}(\beta) = \int\limits_0^\beta \frac{u^{s-2}(\beta+u)}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p du + \frac{1}{\beta}\int\limits_\beta^1 \frac{u^{s-1}(\beta+u)}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p du.$$

## 6. Наилучшая оценка приближений суммами Абеля – Пуассона

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношений (32) посредством выбора оптимального для этой задачи набора параметров $(\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_q^*)$, то есть найти наилучшую мажоранту равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона (4). Положим

$$\varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s) = \inf_{A_{2q}} \varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s,\ A_{2q}), \quad \varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s) = \inf_{A_{2q}} \varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s,\ A_{2q})$$

где $\varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s,\ A_{2q})$ асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона (4), определенное в (32). Отметим, что из (27) очевидным образом следует, что

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s) \le \varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s), \quad r \in (0,\ 1).$$

Теорема 5. *Для любого $s \in (0,\ +\infty)$ при $r \to 1$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s) \sim \begin{cases} \mu(q,\ s)(1-r)^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}}, & s \in (0,\ 1), \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}(1-r)\sqrt{1+\ln_q \dfrac{2}{1-r}}, & s = 1, \\ 2\left|\sin\dfrac{\pi s}{2}\right| \inf\limits_{A_{2q}} F_{s,q}(A_{2q})(1-r), & s \in (1, +\infty,) \end{cases} \tag{40}$$

*где*

$$\mu(q,\ s) = \sin\frac{\pi s}{2}\,(c_1(s))^{\frac{s}{1+s}}\,\frac{1+s}{s^{1-\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}}(1-s)^{\frac{1-(1+s)(1-s)^{q-1}}{s(1+s)}}}\left(\frac{2^{1-s}\pi}{\sin\pi s}\right)^{\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}},$$

$$c_1(s) = \int\limits_0^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)du = \frac{1}{\sqrt{\pi}(s+2)}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right), \tag{41}$$

$$\ln_q \frac{2}{1-r} = \underbrace{\ln\left(1+\dots\ln\left(1+\ln\ln\frac{2}{1-r}\right)\right)}_{q\ раз},$$

$$F_{s,q}(A_{2q}) = \int\limits_0^{\beta_q} \nu_s(u)\frac{du}{1-\prod\limits_{k=1}^{q}\dfrac{\beta_k-u}{\beta_k+u}} + \sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \nu_s(u)\frac{du}{1-\prod\limits_{k=1}^{j}\dfrac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod\limits_{k=j+1}^{q}\dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}} +$$

$$+\int\limits_{\beta_1}^{1} \nu_s(u)\frac{du}{1-\prod\limits_{k=1}^{q}\dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}}, \quad \nu_s(u) = \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p.$$

Доказательство. Исследуем асимптотические равенства (32). Пусть $s \in (0,\ 1]$. При постоянных значениях параметров $\beta_k,\ k = 1, 2, \dots, q$, порядок в указанных соотношениях, очевидно, не отличается от полиномиального, найденного в следствии 3. Наряду с выполнением условий (31), будем полагать, что параметры удовлетворяют следующим условиям $\beta_k = \beta_k(r) \to 0$ и

$\beta_{k+1}(r) = o(\beta_k(r))$ при $r \to 1$. В этом случае нетрудно получить, что при $r \to 1$ справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\beta_k} \sim \frac{1}{\beta_q},$$

$$1 - \prod_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^{q} \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \sim \frac{2u}{\beta_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, q, \ u \in [\beta_{j+1}, \ \beta_j],$$

$$1 - \prod_{k=1}^{q} \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \sim \frac{2\beta_1}{u}, \quad u \in [\beta_1, \ 1].$$

При этом (32) примет вид

$$\varepsilon^*_{r,q}(\hat{f}_s, \ A_{2q}) \sim (1 - r)\Phi^{(s)}_r(A_q), \quad r \to 1, \tag{42}$$

где

$$\Phi^{(s)}_r(A_q) = \frac{1}{1-s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left(\frac{2^{1-s}\pi(1-s)(1-r)^{s-1}\beta_q^s}{\sin \pi s} + \sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j}{\beta_{j+1}^{1-s}} + \frac{(1-s)c_1(s)}{\beta_1}\right), \ s \in (0, \ 1),$$

$$\Phi^{(1)}_r(A_q) = \beta_q \ln\frac{2}{1-r} + \sum_{j=1}^{q-1}\beta_j \ln\frac{\beta_j}{\beta_{j+1}} + \frac{1}{3\beta_1}, \quad s = 1,$$

$c_1(s)$ из (41).

При каждом фиксированном $s \in (0, \ 1]$ правые части асимптотических равенств (42) представляют собой функции переменных $\beta_k, \ k = 1, 2, \ldots, q$, непрерывные в каждой точке $q$-мерного куба $[\delta, 1]^q$, где $\delta = \delta(r) > 0$ – некоторая величина, зависящая от $r$, и при любом $r$ ограничивающая множество параметров $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ слева. Согласно теореме Вейерштрасса эти функции имеют строгий минимум при некотором $\beta^* = (\beta_1^*, \ \beta_2^*, \ldots, \beta_q^*)$. Причем поскольку $\beta_k = 1, k = 1, \ldots, q$, соответствует полиномиальному случаю, а при $\beta_k = \beta_k(r) \to 0, \ r \to 1$, достаточно большой скоростью эти функции неограниченно растут, то можно предположить, что $\beta^*$ – внутренняя точка куба $[\delta, 1]^q$. Для того, чтобы найти оптимальный набор $\beta^*$ для соответствующего асимптотического равенства решим экстремальную задачу

$$\Phi^{(s)}_r(A_q) \underset{A_q}{\longrightarrow} \inf.$$

Так, для случая $s \in (0, \ 1)$ приходим к задаче

$$\Phi^{(s)}_r(A_q) = \frac{1}{1-s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left(c_q\beta_q^s + \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{1-s}} + \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{1-s}} + \cdots + \frac{\beta_1}{\beta_2^{1-s}} + \frac{(1-s)c_1(s)}{\beta_1}\right) \underset{A_q}{\longrightarrow} \inf, \tag{43}$$

где для краткости положено

$$c_q = c_q(r, s) = \frac{2^{1-s}\pi(1-s)(1-r)^{s-1}}{\sin \pi s} \underset{r \to 1}{\longrightarrow} \infty.$$

Функция $\Phi^{(s)}_r(A_q)$ переменных $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ непрерывно дифференцируема в кубе $(0, 1)^q$. Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие

экстремума: $\partial\Phi_r^{(s)}(A_q)/\partial\beta_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} sc_q\beta_q^{s-1} - (1-s)\dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-s}} = 0, \\ \dfrac{1}{\beta_q^{1-s}} - (1-s)\dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{2-s}} = 0, \\ \dfrac{1}{\beta_{q-1}^{1-s}} - (1-s)\dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}^{2-s}} = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{1}{\beta_3^{1-s}} - (1-s)\dfrac{\beta_1}{\beta_2^{2-s}} = 0, \\ \dfrac{1}{\beta_2^{1-s}} - (1-s)\dfrac{c_1(s)}{\beta_1^2} = 0, \end{cases} \tag{44}$$

из которой последовательно находим:

$$\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{1-s}} = \frac{sc_q\beta_q^s}{1-s},\ \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{1-s}} = \frac{sc_q\beta_q^s}{(1-s)^2}, \ldots, \frac{\beta_1}{\beta_2^{1-s}} = \frac{sc_q\beta_q^s}{(1-s)^{q-1}},\ \frac{(1-s)c_1(s)}{\beta_1} = \frac{sc_q\beta_q^s}{(1-s)^{q-1}}.$$

Подставив последние соотношения в правую часть (43), получим

$$\Phi_r^{(s)}(A_q^*) = \frac{1+s}{(1-s)^q}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|(\beta_q^*)^s c_q. \tag{45}$$

Осталось найти оптимальный параметр $\beta_q^*$. С этой целью снова обратимся к системе (44). Последовательно находим

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = \dfrac{sc_q}{1-s}, \\ \dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = \dfrac{1}{1-s}\left(\dfrac{sc_q}{1-s}\right)^{1-s} = \dfrac{(sc_q)^{1-s}}{(1-s)^{1+(1-s)}}, \\ \dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = \dfrac{1}{1-s}\left(\dfrac{1}{1-s}\left(\dfrac{sc_q}{1-s}\right)^{1-s}\right)^{1-s} = \dfrac{(sc_q)^{(1-s)^2}}{(1-s)^{1+(1-s)+(1-s)^2}}, \\ \ldots \\ \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{(sc_q)^{(1-s)^{(q-2)}}}{(1-s)^{\frac{1-(1-s)^{(q-1)}}{s}}}. \end{cases} \tag{46}$$

С другой стороны, из последнего уравнения в (44) получим

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \left(\frac{(1-s)c_1(s)}{\beta_1^{1+s}}\right)^{\frac{1}{1-s}}.$$

Отсюда и из последнего уравнения системы (46) будем иметь

$$\beta_1 = (c_1(s))^{\frac{1}{1+s}}\frac{(1-s)^{\frac{1-(1-s)^q}{s(1+s)}}}{(sc_q)^{\frac{(1-s)^{(q-1)}}{1+s}}}.$$

Учитывая, что

$$\beta_q^s = \frac{(1-s)^q c_1(s)}{\beta_1 s c_q},$$

найдем

$$(\beta_q^*)^s = (c_1(s))^{\frac{s}{1+s}} \frac{(1-s)^{q-\frac{1-(1-s)^{q-1}}{s(1+s)}}}{(sc_q)^{1-\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}}}.$$

Из соотношений (42) и (45) с учетом полученного представления параметра $\beta_q^*$ после необходимых алгебраических преобразований, придем к первому асимптотическому равенству в (40).

Исследуем случай $s = 1$ (см. (42)). Тут приходим к задаче оптимизации

$$\Phi_r^{(1)}(A_q) = \beta_q \ln \frac{2}{1-r} + \sum_{j=1}^{q-1} \beta_j \ln \frac{\beta_j}{\beta_{j+1}} + \frac{1}{3\beta_1} \underset{A_q}{\longrightarrow} \inf. \tag{47}$$

Для поиска оптимальных значений параметров $\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, q$, запишем систему необходимых условий экстремума

$$\begin{cases} \ln \dfrac{2}{1-r} - \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = 0, \\ \ln \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} + 1 - \dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 0, \\ \ln \dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} + 1 - \dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = 0, \\ \quad \ldots \\ \ln \dfrac{\beta_2}{\beta_3} + 1 - \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = 0, \\ \ln \dfrac{\beta_1}{\beta_2} + 1 - \dfrac{1}{3\beta_1^2} = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Из (47) и полученной системы находим, что

$$\Phi_r^{(1)}(A_q^*) = \beta_q^* \ln \frac{2}{1-r} + \beta_{q-1} \left( \frac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*} - 1 \right) + \beta_{q-2}^* \left( \frac{\beta_{q-3}^*}{\beta_{q-2}^*} - 1 \right) + \ldots$$

$$\ldots + \beta_2^* \left( \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} - 1 \right) + \beta_1^* \left( \frac{1}{3(\beta_1^*)^2} - 1 \right) + \frac{1}{3(\beta_1^*)^2} = \frac{2}{3\beta_1^*}. \tag{49}$$

Осталось найти оптимальный параметр $\beta_1^*$. С этой целью снова обратимся к системе (48).

Имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = \ln\dfrac{2}{1-r}, \\ \dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 1 + \ln\dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = 1 + \ln\ln\dfrac{2}{1-r}, \\ \dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = 1 + \ln\dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 1 + \ln\left(1 + \ln\ln\dfrac{2}{1-r}\right), \\ \quad \dots \\ \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = 1 + \ln_{q-1}\dfrac{2}{1-r}, \\ \dfrac{1}{3\beta_1^2} = 1 + \ln_q\dfrac{2}{1-r}, \end{cases}$$

где величина $\ln_q 2/(1-r)$ определена в формулировке настоящей теоремы. Следовательно,

$$\beta_1^* = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1 + \ln_q\dfrac{2}{1-r}}}, \quad r \to 1.$$

Из асимптотического равенства (42), соотношения (49) и найденного оптимального параметра $\beta_1^*$ получим второе асимптотическое равенство в (40).

Пусть $s \in (1, +\infty)$. Тогда из (32) находим, что

$$\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s,\ A_{2q}) \sim 2\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|(1-r)F_{s,q}(A_{2q}), \quad r \to \infty,$$

где величина $F_{s,q}(A_{2q})$ определена в формулировке настоящей теоремы. На основании этого представления заключаем, что в рассматриваемом случае оптимальный набор параметров $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ не зависит от $r$ и не влияет на скорость убывания мажоранты. Следовательно, приходим к третьему асимптотическому равенству в (40). Теорема 5 доказана. □

Пусть $q = 1$. Другими словами аппроксимирующая функция имеет два геометрически-различных комплексно-сопряженных полюса в расширенной комплексной плоскости. В этом случае мы находимся в условиях следствия 4. Тогда для наилучшей мажоранты равномерных приближений справедливы асимптотические равенства

$$\varepsilon_{r,1}^*(\hat{f}_s) \sim \begin{cases} (1+s)\sin\dfrac{\pi s}{2}\left(\dfrac{(c_1(s))^s 2^{1-s}\pi}{s^s \sin\pi s}\right)^{\frac{1}{1+s}}(1-r)^{\frac{2s}{1+s}}, & s \in (0,\ 1), \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}(1-r)\sqrt{\ln\dfrac{2}{1-r}}, & s = 1, \\ 2\left|\sin\dfrac{\pi s}{2}\right|\inf\limits_{\beta} F_{s,1}(\beta)(1-r), & s \in (1, +\infty), \end{cases}$$

где величина $c_1(s)$ определена в теореме 5, функция $F_{s,1}(A_2)$ определена в следствии 4. Поскольку величина $2s/(1+s) > s$, $s \in (0,\ 1)$, то полученная скорость равномерных приближений в этом случае является большей в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом (см. следствие (3)). Аналогичный вывод следует и в случае $s = 1$. При $s \in (1, +\infty)$ скорость убывания наилучшей мажоранты имеет тот же порядок малости, что и в полиномиальном случае, а набор параметров является оптимальным в том смысле, что он минимизирует константу.

## 7. Заключение

Исследованы рациональные аппроксимации класса функций на отрезке $[-1,\ 1]$, задаваемых сингулярным интегралом вида (1). Аппаратом приближений выступают суммы Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Установлено интегральное представление приближений.

Изучены рациональные аппроксимации на отрезке $[-1,\ 1]$ сингулярных интегралов вида (1) с плотностью $|x|^s$, $s \in (0,\ +\infty)$, введенными суммами Абеля – Пуассона. Получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлено ее асимптотическое выражение при $r \to 1$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты. Следствием полученных результатов являются оценки приближений и асимптотическое выражение мажоранты приближений сингулярных интегралов вида (1) с плотностью $|x|^s$, $s \in (0,\ +\infty)$, на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля – Пуассона полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при специальном выборе параметров аппроксимирующей функции в некоторых случаях возможно добиться скорости равномерных приближений рациональными суммами Абеля – Пуассона выше в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. Этот результат справедлив уже в случае аппроксимирующей функции с двумя комплексно-сопряженными полюсами.

Автор выражает особую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Ровбе Евгению Алексеевичу за помощь при написании настоящей статьи.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи // М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. 543 с.

2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. // М.: Наука, 1968. 513 с.

3. Моторный В. П. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // Укр. мат. жур. 2001. Т. 53, № 3. С. 331-345.

4. Elliott D., Paget D. On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain Cauchy principal value integrals // Numer. Math. 1975. Vol. 23, № 4. P. 311-319.

5. Шешко М. А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла // Изв. вузов. Матем. 1976. № 12. С. 108-118.

6. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши // Владикавказский матем. жур. 2008. Т. 10, № 4. С. 61-75.

7. Саакян А. В. Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов // Проблемы механики тонких деформируемых тел, посв. 80-летию акад. С. А. Амбарцумяна. Ереван. 2002. С. 259-265.

8. Габдулхаев Б. Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1980. Т. 18. С. 251-307.

9. Русак В. Н. Равномерная рациональная аппроксимация сингулярных интегралов // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1993. № 2. С. 22–26.

10. Бокша А. Н. Приближение сингулярных интегралов рациональными функциями в равномерной метрике // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физ. Мат. Инф. 1997. № 3. С. 68-71.

11. Русак В. Н., Уазис А. Х. Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов с дифференцируемой плотностью // Изв. БГПУ. Сер 3. Физ. Матем. Инф. Биол. Геогр. 2009. № 1(59). С. 8-11.

12. Поцейко, П. Г., Ровба Е. А. О приближениях одного сингулярного интеграла на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье-Чебышева // Математический сборник. 2024. Т. 215. № 7. С. 96– 137.

13. Ровба Е. А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968-971.

14. Натансон И. П. О порядке приближения непрерывной $2\pi$-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Доклады АН СССР. 1950. Т. 72, № 1. С. 11-14.

15. Тиман А. Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Доклады АН СССР. 1950. Т. 74, № 1. С. 17-20.

16. Жук В. В. О порядке приближения непрерывной $2\pi$-периодической функции при помощи средних Фейера и Пуассона ее ряда Фурье // Математические заметки. – 1968. – Т. 4, № 1. – С. 21–32.

17. Штарк Э. Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip 1 от сингулярного интеграла Абеля – Пуассона // Математические заметки. 1973. Т. 13, № 1. С. 21–28.

18. Русецкий Ю. И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона // Сибирский математический журнал. 1968. Т. 9, № 1. С. 136-144.

19. Жигалло Т. В. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона – Чебышёва // Проблемы управления и информатики. 2018. Т. 3. С. 1-14.

20. Китбалян, А. А. Разложения по обобщенным тригонометрическим системам // Известия АН АССР. 1963. Т. XVI, № 6. С. 3-24.

21. Джрбашян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Известия АН Армянской ССР. Сер. Математика. 1956. Т. 9, № 7. С. 1-27.

22. Поцейко, П. Г., Ровба Е. А. О рациональных суммах Абеля – Пуассона на отрезке и аппроксимациях функций Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2021. Т. 3. С. 6-24.

23. Лунгу К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Математический сборник. 1971. Т. 86(128), № 2(10). С. 314-324.

24. Лунгу К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 15, № 2. С. 151-160.

25. Русак В. Н. Рациональный функции как аппарат приближения // Минск: БГУ, 1979. 178 с.

## REFERENCES


1. Gakhov, F. D. 1958, "Boundary value problems", *M.: State Publishing House of Physics and Mathematics. lit.*, 543 p., (in russian).

2. Muskhelishvili, N. I. 1968, "Singular integral equations. 3rd ed", *M.: Science*, 513 p., (in russian).

3. Motorny, V. P., 2001, "Approximation of some classes of singular integrals by algebraic polynomials", *Ukr. mat. Journal*, vol. 53, no. 3, pp. 331-345, (in russian).

4. Elliott, D., Paget, D., 1975, "On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain Cauchy principal value integrals" *Numer. Math.*, vol. 23, no 4. pp. 311-319.

5. Sheshko, M. A., 1976, "On the convergence of quadrature processes for a singular integral", *Izv. vuzov. Matem.*, no. 12, pp. 108-118, (in russian).

6. Hubezhty, Sh. S., 2008, "Quadrature formulas for singular integrals with Cauchy kernel", *Vladikavkazsky math. Jour.*, vol. 10, no. 4, pp. 61-75, (in russian).

7. Sahakyan, A. V., 2002, "Quadrature formulas of the Gauss type for singular integrals", *«Problems of mechanics of thin deformable bodies», dedicated to the 80th anniversary of Academician S.A.Ambartsumyan. Yerevan*, pp. 259-265, (in russian).

8. Gabdulkhaev, B. G., 1980, "Finite-dimensional approximations of singular integrals and direct methods for solving special integral and integro-differential equations", *Results of science and technology. Mat. anal.*, vol. 18, pp. 251-307, (in russian).

9. Rusak, V. N., 1993, "Uniform rational approximation of singular integrals", *Izv. NAS of Belarus. Ser. phys.-mat. sciences*, no. 2, pp. 22–26, (in russian).

10. Boksha, A. N. 1997, "Approximation of singular integrals by rational functions in a uniform metric", *Vestn. Bel. gos. un. Ser. 1, Phys. Mat. Inf.*, no. 3, pp. 68-71, (in russian).

11. Rusak, V. N., Uasis, A. H., 2009, "Rational approximation of singular integrals with differentiable density", *Izv. BSPU. Ser 3. Phys. Math. Inf. Biol. Geogr.*, no. 1(59), pp. 8-11, (in russian).

12. Potseiko, P. G., Rovba, E. A., 2024, "Approximations of one singular integral on an interval by Fourier– Chebyshev rational integral operators", *Sb. Math.*, vol. 215, no. 7, pp. 953–992.

13. Rovba, E. A., 1979, "On one direct method in rational approximation", *Dokl. AN OF the BSSR*, vol. 23, no. 11, pp. 968-971, (in russian).

14. Natanson, I. P., 1950, "On the order of approximation of a continuous $2\pi$-periodic function using its Poisson integral" *Reports of the USSR Academy of Sciences*, vol. 72, no. 1, pp. 11-14, (in russian).

15. Timan, A. F., 1950, "An accurate estimation of the remainder when approximating periodic differentiable functions by Poisson integrals", *Reports of the USSR Academy of Sciences* vol. 74, no. 1, pp. 17-20, (in russian).

16. Zhuk, V. V., 1968, "On the order of approximation of a continuous $2\pi$-periodic function using Feyer and Poisson averages of its Fourier series", *Mathematical Notes*, vol. 4, no. 1, pp. 21-32, (in russian).

17. Stark, E. L., 1973, "Complete asymptotic decomposition for the upper face of the deviation of functions from Lip 1 from the singular integral of Abel – Poisson", *Mathematical notes*, vol. 13, no. 1. pp. 21–28, (in russian).

18. Rusetsky, Yu. I., 1968, "On the approximation of continuous functions on a segment by Abel – Poisson sums", *Siberian Mathematical Journal* vol. 9, no. 1, pp. 136-144, (in russian).

19. Zhigallo, T. V., 2018, "Approximation of functions satisfying the Lipschitz condition on a finite segment of the real axis by Poisson – Chebyshev integrals", *Problems of management and computer science*, vol. 3. pp. 1-14, (in russian).

20. Kitbalyan, A. A., 1963, "Decompositions by generalized trigonometric systems", *Izvestiya AN ASSR*, Vol. XVI, no. 6, pp. 3-24, (in russian).

21. Djrbashyan, M. M., 1956, "On the theory of Fourier series for rational functions", *Izvestiya AN of the Armenian SSR, Ser. matematika*, vol. 9, no. 7, pp. 1-27, (in russian).

22. Potseiko, P. G., Rovba, E. A., 2021, "On rational Abel – Poisson sums on a segment and approximation of Markov functions", *Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Computer science*, vol. 3, pp. 6-24, (in russian).

23. Lungu, K. N., 1971 "On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles", *Mathematical collection*, vol. 86(128), no 2(10), pp. 314-324, (in russian).

24. Lungu, K. N., 1984, "On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 15, no. 2, pp. 151-160.

25. Rusak, V. N., 1979, "Rational functions as an approximation apparatus", Mn.: BSU, 178 p.

Получено: 10.06.24
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-164-182

# Полная классификация двух классов двумерных $PI$-алгебр над любым основным полем

И. Рахимов, Х. Джамиль, Р. Н. Мохд Насир

**Рахимов Исамиддин Саттарович** — доктор физико-математических наук, профессор, Колледж вычислительных технологий, информатики и математики; Университет Технологии МАРА (г. Шах-Алам, Малайзия); Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Узбекистан).
*e-mail: isamiddin@uitm.edu.my*
**Джамиль Хаким** — доктор физико-математических наук, Колледж вычислительных технологий, информатики и математики; Университет Технологии МАРА (г. Шах-Алам, Малайзия).
*e-mail: mohdhakim@uitm.edu.my*
**Мохд Насир Рини Нарини** — доктор физико-математических наук, информатики и математики; Университет Технологии МАРА (г. Шах-Алам, Малайзия).
*e-mail: rinie@uitm.edu.my*

**Аннотация**

В статье дана полная классификация двух классов двумерных $PI$-алгебр над любым основным полем. Выбор этих двух классов обусловлен полиномиальными тождествами классов: тождество одного из них дается с помощью бинарной операции алгебры, а другого - с помощью скобочной операции в тождестве. Приведен список представителей классов изоморфизма. Мы сравниваем наш список со списком, полученным ранее, где подобная классификация была дана при определенных ограничениях на основное поле.

*Ключевые слова:* алгебра с правильно определёнными кубами, смещенная ассоциативная алгебра, изоморфизм, классификация.

*Библиография:* 21 названий.

**Для цитирования:**
Рахимов, И., Джамиль, Х., Мохд Насир, Р. Н. Полная классификация двух классов двумерных $PI$-алгебр над любым основным полем // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 164–182.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-164-182

# Complete classification of two classes of two-dimensional PI-algebras over any basic field

I. Rakhimov, H. Jamil, R. N. Mohd Nasir

**Rakhimov Isamiddin Sattarovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, College of Computing, Informatics and Mathematics; Universiti Teknologi MARA (Shah Alam, Malaysia); V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Uzbekistan).
*e-mail: isamiddin@uitm.edu.my*
**Jamil Hakim** — doctor of physical and mathematical sciences, College of Computing, Informatics and Mathematics; Universiti Teknologi MARA (Shah Alam, Malaysia).
*e-mail: mohdhakim@uitm.edu.my*
**Mohd Nasir Rinie Narinie** — doctor of physical and mathematical sciences, College of Computing, Informatics and Mathematics; Universiti Teknologi MARA (Shah Alam, Malaysia).
*e-mail: rinie@uitm.edu.my*

**Abstract**

In the paper we give complete classification of two classes of two-dimensional $PI$-algebras over any basic field. The choice of these two classes is predicted by the polynomial identities of the classes: the identity of one of them is given by using the binary operation of the algebra another one involves the bracket operation in the identity. The list of the representatives of isomorphism classes are provided. We compare our list with that obtained earlier, where such a classification was given under certain constraints on the basic field.

*Keywords:* well-defined cube algebra, mixed associative algebra, isomorphism, classification.

*Bibliography:* 21 titles.

**For citation:**
Rakhimov, I., Jamil, H., Mohd Nasir, R. N. 2024, "Complete classification of two classes of two-dimensional PI-algebras over any basic field" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 164–182.

## 1. Introduction

The classification problem of a given class of algebras is a challenging and significant task in algebra. It is well-known that complete solution to the classification problem of finite-dimensional algebras remains open. Currently, two approaches have been identified for solving this problem. One approach is the structural (basis-free, invariant) method. Examples of this approach include the classification of finite-dimensional simple and semi-simple associative algebras by Wedderburn, as well as the classification of simple and semi-simple Lie algebras by Cartan. However, it becomes increasingly difficult to apply this approach when dealing with more general types of algebras. Another method to solving the problem is a coordinate base approach. Many researchers have employed this approach to classify various classes of algebras, primarily finite-dimensional ones. For example, Leibniz algebras see [4], [6], [7], [13], Lie algebras see [9], [15], [16], [17], [18], Jordan algebras see [10], and associative algebras refer to [12], [14]. The previous attempts have been

made to classify algebras of fixed dimensions under a very strict condition on basic field (most of the results obtained were over algebraic closed fields). In [19], the method of classification of 2-dimensional algebras was based on the basis-free approach. One drawback of the basis-free approach is its limited applicability to the classification of specific classes of algebras. In this regard, the coordinate-based classification approach has an advantage. For the coordinate-based approach, one can refer to [1], [8], [11] for the classification of all 2-dimensional algebras over fields with certain constraints, and [2], [3] for its different applications. Recently, we encountered (see [5]) a result on complete classification of all 2-dimensional algebras over any basic field. We make use the result of [5] to classify two classes of two-dimensional algebras over any basic field.

The outline of the paper is as follows. Section 2 gives preliminaries on classification of two-dimensional algebras over any basic field. This section contains as well as the idea that was used in the classification of all two-dimensional Well-defined cube (WDC) and Mixed-associative (MAA) algebras. In Section 3 we provide computations to classify WDC over an arbitrary basic field $\mathbb{F}$. The results are given as Theorems 4,5 and 6 for $\mathbb{F}$ of $Char(\mathbb{F}) \neq 2, 3$, $Char(\mathbb{F}) = 2$ and $Char(\mathbb{F}) = 3$, respectively. Then in Section 4 we give a complete classification of MAA over any basic field $\mathbb{F}$. The results here are given as Theorems 7,8 an 9 over the field $\mathbb{F}$ of $Char(\mathbb{F}) \neq 2, 3$, $Char(\mathbb{F}) = 2$ and $Char(\mathbb{F}) = 3$, respectively.

## 2. Preliminaries

### 2.1. Algebras

Definition 1. *A vector space $\mathbb{V}$ over a field $\mathbb{F}$ with a function $\cdot : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ $((\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto \mathrm{x} \cdot \mathrm{y})$ such that*

$$(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) \cdot \mathrm{z} = \alpha(\mathrm{x} \cdot \mathrm{z}) + \beta(\mathrm{y} \cdot \mathrm{z}), \quad \mathrm{z} \cdot (\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{z} \cdot \mathrm{x}) + \beta(\mathrm{z} \cdot \mathrm{y})$$

*whenever $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{V}$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, is said to be an algebra $\mathbb{A} = (\mathbb{V}, \cdot)$.*

Definition 2. *Two algebras $\mathbb{A} = (\mathbb{V}, \cdot_{\mathbb{A}})$ and $\mathbb{B} = (\mathbb{V}, \cdot_{\mathbb{B}})$ are said to be isomorphic if there is an invertible linear map $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ such that*

$$f(\mathrm{x} \cdot_{\mathbb{A}} \mathrm{y}) = f(\mathrm{x}) \cdot_{\mathbb{B}} f(\mathrm{y})$$

*for all $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{A}$.*

Let $\mathbb{A}$ be an $n$-dimensional algebra over $\mathbb{F}$ and $\mathbf{e} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ be its basis. Then the bilinear map $\cdot$ is represented by a $n \times n^2$ matrix (called the matrix of structure constant, shortly MSC)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & ... & a_{1n}^1 & a_{21}^1 & a_{22}^1 & ... & a_{2n}^1 & ... & a_{n1}^1 & a_{n2}^1 & ... & a_{nn}^1 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 & ... & a_{1n}^2 & a_{21}^2 & a_{22}^2 & ... & a_{2n}^2 & ... & a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & ... & a_{nn}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{11}^n & a_{12}^n & ... & a_{1n}^n & a_{21}^n & a_{22}^n & ... & a_{2n}^n & ... & a_{n1}^n & a_{n2}^n & ... & a_{nn}^n \end{pmatrix}$$

as follows

$$\mathrm{e}_i \cdot \mathrm{e}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \mathrm{e}_k, \text{ where } i, j = 1, 2, ..., n.$$

Therefore, the product on $\mathbb{A}$ with respect to the basis $\mathbf{e}$ is written as follows

$$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \mathbf{e} A (x \otimes y) \tag{1}$$

for any $\mathrm{x} = \mathbf{e}x, \mathrm{y} = \mathbf{e}y$, where $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, and $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ are column coordinate vectors of x and y, respectively, $x \otimes y$ is the tensor(Kronecker) product of the vectors $x$ and $y$. Now

and onward for the product "$\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$" on $\mathbb{A}$ we use the juxtaposition "xy". Further we assume that the basis $\mathbf{e}$ is fixed and we do not make a difference between the algebra $\mathbb{A}$ and its MSC $A$.

Recently in [5] the following result on the classification of two-dimensional algebras over any basic field was obtained.

THEOREM 1. *Any non-trivial 2-dimensional algebra over a field $\mathbb{F}$ ($Char(\mathbb{F}) \neq 2,3$) is isomorphic to only one of the following listed, by their matrices of structure constants, such algebras:*

- $A_1(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$,
- $A_2(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$ *and* $\alpha_4 \neq 0$,
- $A_3(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,
- $A_4(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^2$,
- $A_5(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = \alpha_1 \in \mathbb{F}$,
- $A_6(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ *and* $\alpha_4 \neq 0$,
- $A_7(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,
- $A_8(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = \beta_1 \in \mathbb{F}$,
- $A_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,
- $A_{10}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = \beta_1 \in \mathbb{F}$, *the polynomial* $(\beta_1 t^3 - 3t - 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1^2 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)$ *has no root in* $\mathbb{F}$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$,
- $A_{11}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *where the polynomial* $\beta_1 - t^3$ *has no root in* $\mathbb{F}$, $a, \mathrm{c} = \beta_1 \in \mathbb{F}$ *and* $a, \beta_1 \neq 0$,
- $A_{12}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2\beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *where* $a, \mathrm{c} = \beta_1 \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,
- $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

THEOREM 2. *Any non-trivial 2-dimensional algebra over a field $\mathbb{F}$ ($Char(\mathbb{F}) = 2$) is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants, such algebras:*

- $A_{1,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1+\alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$,
- $A_{2,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$ *and* $\alpha_4 \neq 0$,
- $A_{2,2}(\alpha_1, 0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\alpha_1 \in \mathbb{F}$,
- $A_{3,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,
- $A_{4,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + (1+\beta_2)a + a^2 & \beta_2 & 1+\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$,
- $A_{5,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ *and* $\alpha_4 \neq 0$,
- $A_{5,2}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- $A_{6,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,
- $A_{7,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a\alpha_1 + a + a^2 & 1+\alpha_1 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{F}^2$ *and* $a \in \mathbb{F}$,
- $A_{8,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *where the polynomial* $(\beta_1 t^3 + t + 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)$ *has no root in* $\mathbb{F}$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 t + \beta_1)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$,
- $A_{9,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $a, \mathrm{c} = \beta_1 \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$, *the polynomial* $\beta_1 + t^3$ *has no root in* $\mathbb{F}$,
- $A_{10,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a + a^2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $a, \mathrm{c} = \beta_1 \in \mathbb{F}$,
- $A_{11,2}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2(\beta_1 + a^2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $a, b \in \mathbb{F}$ *and* $b \neq 0$,
- $A_{12,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Theorem 3. *Any non-trivial* 2*-dimensional algebra over a field* $\mathbb{F}$ $(Char(\mathbb{F}) = 3)$ *is isomorphic to only one of the following, listed by their matrices of structure constants, such algebras:*

- $A_{1,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 + 1 & \alpha_4 \\ \beta_1 & 2\alpha_1 & 1 + 2\alpha_1 & +2\alpha_2 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$,

- $A_{2,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1+2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, *and* $\alpha_4 \neq 0$,
- $A_{3,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1+2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,
- $A_{4,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^2$,
- $A_{5,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1+2 & 1+2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = \alpha_1 \in \mathbb{F}$,
- $A_{6,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1+2\alpha_1 & 2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ *and* $\alpha_4 \neq 0$,
- $A_{7,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1+2\alpha_1 & 2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1+2\alpha_1 & 2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,
- $A_{8,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = \beta_1 \in \mathbb{F}$,
- $A_{9,3}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *where the polynomial* $(\beta_1 - t^3)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 + 1)$ *has no root in* $\mathbb{F}$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 + 1)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$,
- $A_{10,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *where the polynomial* $\beta_1 + 2t^3$ *has no root,* $a, \mathrm{c} = \beta_1 \in \mathbb{F}$ *and* $a, \beta_1 \neq 0$,
- $A_{11,3}(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2\beta_1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *where* $a, \mathrm{c} = \beta_1 \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$,
- $A_{12,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,
- $A_{13,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

The next sections are devoted to the classification of all two-dimensional WDC and MA-algebras over any basic field relying on the theorems above.

## 2.2. Well-defined cube algebras

Definition 3. *An algebra* $(\mathbb{A}, \cdot)$ *is said to be a well-defined-cube (WDC) algebra if*

$$\mathrm{x}^2\mathrm{x} = \mathrm{x}\mathrm{x}^2, \quad \forall \mathrm{x} \in \mathbb{A}. \tag{2}$$

Consider two-dimensional case, i.e., $\mathbb{A}$ is represented by a $2 \times 4$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

as a matrix of structure constants (MSC) of $\mathbb{A}$ on the basis $\mathbf{e} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$, i.e.,

$$\mathrm{xy} = \mathbf{e}A(x \otimes y)$$

for any $\mathrm{x} = \mathbf{e}x, \mathrm{y} = \mathbf{e}y$, where $\mathbf{e} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$ is a basis of $\mathbb{A}$, $x = (x_1, x_2)^T$, and $y = (y_1, y_2)^T$ as above with $n = 2$.

Let write

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{x}^2 & = & \mathbf{e}Ax^{\otimes 2} \\ \mathrm{x}^2\mathrm{x} & = & \mathbf{e}A((Ax^{\otimes 2}) \otimes x) \\ \mathrm{x}\mathrm{x}^2 & = & \mathbf{e}A(x \otimes (Ax^{\otimes 2})) \end{array} \tag{3}$$

Then, the WDC algebra axiom

$$\mathrm{x}^2\mathrm{x} = \mathrm{x}\mathrm{x}^2$$

is written as

$$\mathbf{e}A((Ax^{\otimes 2}) \otimes x) = \mathbf{e}A(x \otimes (Ax^{\otimes 2}))$$

and in terms of the elements of $A$ it can be rewritten as follows

$$\begin{array}{rcl} \beta_1(\alpha_2 - \alpha_3) & = & 0 \\ (\alpha_1 - \beta_2 - \beta_3)(\alpha_2 - \alpha_3) & = & 0 \\ (\alpha_2 + \alpha_3 - \beta_4)(\alpha_2 - \alpha_3) & = & 0 \\ \alpha_4(\alpha_2 - \alpha_3) & = & 0 \\ \beta_1(\beta_2 - \beta_3) & = & 0 \\ (\alpha_1 - \beta_2 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_3) & = & 0 \\ (\alpha_2 + \alpha_3 - \beta_4)(\beta_2 - \beta_3) & = & 0 \\ \alpha_4(\beta_2 - \beta_3) & = & 0 \end{array} \tag{4}$$

So, we use this system of equations to classify two-dimensional well-defined-cube algebras.

### 2.3. Mixed-associative algebras

Definition 4. *An algebra $(\mathbb{A}, \cdot)$ is said to be a mixed-associative algebra (MAA) if*

$$[\mathrm{x}, \mathrm{y}]\mathrm{z} = \mathrm{x}[\mathrm{y}, \mathrm{z}], \quad \forall \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{A}, \tag{5}$$

*where* $[\mathrm{u}, \mathrm{v}] = \mathrm{uv} - \mathrm{vu}$, *for* $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{A}$.

Let $\mathbb{A}$ be a two-dimensional MA-algebra and

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

be its MSC on a basis $\mathbf{e} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$. Then

$$\mathrm{xy} = \mathbf{e}A(x \otimes y)$$

for any $\mathrm{x} = \mathbf{e}x, \mathrm{y} = \mathbf{e}y$, $x = (x_1, x_2)^T$ and $y = (y_1, y_2)^T$. Hence, one has

$$\begin{array}{rcllcl} [\mathrm{x}, \mathrm{y}] & = & \mathrm{xy} - \mathrm{yx} & = & \mathbf{e}A((x \otimes y) - (y \otimes x)) \\ [\mathrm{y}, \mathrm{z}] & = & \mathrm{yz} - \mathrm{zy} & = & \mathbf{e}A((y \otimes z) - (z \otimes y)) \\ [\mathrm{x}, \mathrm{y}]\mathrm{z} & = & (\mathrm{xy} - \mathrm{yx})\mathrm{z} & = & \mathbf{e}A(A((x \otimes y) - (y \otimes x)) \otimes z) \\ \mathrm{x}[\mathrm{y}, \mathrm{z}] & = & \mathrm{x}(\mathrm{yz} - \mathrm{zy}) & = & \mathbf{e}A(x \otimes A((y \otimes z) - (z \otimes y))) \end{array} \tag{6}$$

Therefore, the MAA axiom

$$[\mathrm{x}, \mathrm{y}]\mathrm{z} = \mathrm{x}[\mathrm{y}, \mathrm{z}]$$

in terms of the elements of $A$ turns to

$$\begin{array}{rcl}
(2\alpha_1+\beta_2-\beta_3)\alpha_2-\alpha_3(2\alpha_1-\beta_2+\beta_3) & = & 0\\
\alpha_2^2-\alpha_2\alpha_3+\alpha_4(\beta_2-\beta_3) & = & 0\\
(\alpha_1+\beta_2-\beta_3)\alpha_2-\alpha_3\alpha_1 & = & 0\\
\alpha_2\alpha_3-\alpha_3^2+\alpha_4(\beta_2-\beta_3) & = & 0\\
\alpha_1\alpha_2-\alpha_3(\alpha_1-\beta_2+\beta_3) & = & 0\\
\alpha_2^2-\alpha_3^2+2\alpha_4(\beta_2-\beta_3) & = & 0\\
(\alpha_2-\alpha_3+2\beta_4)\beta_2+\beta_3(\alpha_2-\alpha_3-2\beta_4) & = & 0\\
\beta_2\beta_3-\beta_3^2+\beta_1(\alpha_2-\alpha_3) & = & 0\\
\beta_2\beta_4+\beta_3(\alpha_2-\alpha_3-\beta_4) & = & 0\\
\beta_2^2-\beta_2\beta_3+\beta_1(\alpha_2-\alpha_3) & = & 0\\
(\alpha_2-\alpha_3+\beta_4)\beta_2-\beta_3\beta_4 & = & 0\\
\beta_2^2-\beta_3^2+2\beta_1(\alpha_2-\alpha_3) & = & 0
\end{array} \tag{7}$$

So, this is a system of equations which we make use to classify two-dimensional MA-algebras.

Further, for the sake of simplification, $W_b^a$ and $M_b^a$ stand for two-dimensional WDC-algebra and MA-algebra (MAA), respectively, where $a$ is the number of the class from [5] and $b$ is the enumeration in this paper.

## 3. Classification of two-dimensional WDC-algrbras

### 3.1. The characteristic is not 2 and 3

THEOREM 4. *Any non-trivial 2-dimensional well-defined-cube algebra over a field* $\mathbb{F}$, ($\mathrm{Char}(\mathbb{F}\neq\neq 2,3)$) *is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants algebras:*

1. $W_1^1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
2. $W_2^2(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c}=(\alpha_1,\alpha_4)\in\mathbb{F}^2$,
3. $W_3^3(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c}=(\alpha_1,\alpha_4)\in\mathbb{F}^2$,
4. $W_3^4(\alpha_1) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1-1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\alpha_1\in\mathbb{F}$,
5. $W_4^5(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, *where* $\beta_1\in\mathbb{F}$,
6. $W_5^6 := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,
7. $W_7^7 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,
8. $W_{10}^8(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *where* $\beta_1\in\mathbb{F}$,
9. $W_{11}^9(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\beta_1\in\mathbb{F}$,

*10.* $W_{12}^{10}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *where* $\beta_1 \in \mathbb{F}$,

*11.* $W_{13}^{11} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proof.

We check each algebra from Theorem 1 one by one to be a WDC algebra.

$A_1(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$ is WDC if $\alpha_1 = 1/3,\ \alpha_2 = -1/3,\ \alpha_4,\ \beta_1 = 0$.

$A_2(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$ is WDC if $\beta_2 = 1-\alpha_1,\ \mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$.

$A_3(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$ is WDC algebra in the following two cases:

- $\beta_2 = 1-\alpha_1$
- $\beta_2 = 1-2\alpha_1$ and $\alpha_4 = 0$.

$A_4(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ is WDC algebra if and only if $\beta_2 = 1$.

$A_5(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, is WDC algebra if $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ .

$A_7(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$, gives a WDC algebra only for $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ and $\alpha_4 = 0$.

$A_{10}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $\beta_1 \in \mathbb{F}$, the polynomial $(\beta_1 t^3 - 3t - 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1^2 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)$ has no root in $\mathbb{F}$, $a \in \mathbb{F}$ and $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$, is WDC.

$A_{11}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where the polynomial $\beta_1 - t^3$ has no root in $\mathbb{F}$, $a,\ \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a, \beta_1 \neq 0$, is WDC.

$A_{12}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2\beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $a,\ \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$, is a WDC.

$A_{13} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ is a WDC algebra.

Note that the last four cases all the equations of (4) become identities. □

### 3.2. Comparison

In this section we compare the list of Theorem 4 with that of Theorem 4.7 ($I_5$) from [2].

| | WDC algebra from [2] | Isomorphism | WDC algebra from this paper |
|---|---|---|---|
| Char $(\mathbb{F}) \neq 2,3$ | $A_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0\right)$ | $=$ | $W_1^1$ |
| | $A_2\left(\alpha_1, \beta_1, 1-\alpha_1\right)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_1} \end{pmatrix}$ | $W_2^2(\alpha_1, \alpha_4)$, $\alpha_4 = \beta_1^2$ |
| | $A_3\left(\beta_1, 1\right)$ | $=$ | $W_4^5(\beta_1)$ |
| | $A_4\left(\alpha_1, 1-\alpha_1\right)$, $\alpha_1 \neq \frac{2}{3}$ | $\cong$ | $W_3^3(\mathrm{c})$, $\mathrm{c} = (\alpha_1, 0) \in \mathbb{F}^2, \alpha_1 \neq \frac{2}{3}$ |
| | $A_4\left(\alpha_1, 2\alpha_1 - 1\right)$ | $\cong$ | $W_3^4(\alpha_1)$ |
| | $A_5\left(\frac{2}{3}\right)$ | $\cong$ | $W_5^6$ |
| | $A_8\left(\frac{1}{3}\right)$ | $\cong$ | $W_7^7$ |
| | $A_{10}$ | $\cong$ | $W_{12}^{10}(0)$ |
| | $A_{11}$ | $\cong$ | $W_{12}^{10}(1)$ |
| | $A_{12}$ | $\cong$ | $W_{13}^{11}$ |

### 3.3. The characteristic is two

The following result holds true.

THEOREM 5. *Any non-trivial 2-dimensional well-defined-cube algebra over a field* $\mathbb{F}$, *(*$\mathrm{Char}(\mathbb{F} = 2)$*) is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants algebras:*

1. $W_{12,2}^1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

2. $W_{11,2}^2(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2(\beta_1 + a^2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $a, b, \beta_1 \in \mathbb{F}$ *and* $b \neq 0$,

3. $W_{10,2}^3(\beta_1) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $\beta_1 \in \mathbb{F}$,

4. $W_{9,2}^4(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\beta_1 \in \mathbb{F}$,

5. $W_{8,2}^5(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $\beta_1 \in \mathbb{F}$,

6. $W_{6,2}^6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

7. $W_{4,2}^7(\alpha_1, \beta_1) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 + 1 & \alpha_1 + 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + (\alpha_1 + 2)a + a^2 & \alpha_1 + 1 & \alpha_1 + 1 & 1 \end{pmatrix}$
*where* $a, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{F}$,

8. $W_{3,2}^8(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 + 1 & \alpha_1 + 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 + 1 & \alpha_1 + 1 & 0 \end{pmatrix}$,
*where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2, a \in \mathbb{F}, a \neq 0$,

*9.* $W^9_{3,2}(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\alpha_1 \in \mathbb{F}$,

*10.* $W^9_{2,2}(\alpha_1) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1+1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\alpha_1 \in \mathbb{F}$,

*11.* $W^{10}_{2,2}(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \alpha_1+1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2, \alpha_4 \neq 0$,

*12.* $W^{11}_{2,2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

*13.* $W^{12}_{1,2} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proof.

Let check each algebra from Theorem 2 one by one to be a WDC algebra.

$A_{12,2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ is a WDC algebra.

$A_{11,2} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2(\beta_1+a^2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where $a, b \in \mathbb{F}$ and $b \neq 0$ is a WDC algebra.

$A_{10,2} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, where $\beta_1 \in \mathbb{F}$ is a WSC algebra.

$A_{9,2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where $\beta_1 \in \mathbb{F}$ is a WDC algebra.

$A_{8,2} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where $\beta_1 \in \mathbb{F}$ is a WDC algebra.

$A_{6,2}$ is WDC if $\alpha_1 = 1$ and $\alpha_4 = 0$, i.e.,

$A_{6,2} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ is WDC algebra.

$A_{4,2} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1+a+a^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$. $A_{3,2}$ is WDC if $\beta_2 = \alpha_1 + 1$, i.e., $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1+1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1, \alpha_4 \in \mathbb{F}$ is MSC of a WDC algebra.

$A_{2,2}$ is WDC if $\beta_2 = \alpha_1 + 1$, i.e.,

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1+1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$ is MSC of a WDC algebra.

$A_{2,2}(\alpha_1, 0, 1) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$ is WDC if $\alpha_1 = 0$, i.e., $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ is MSC of a WDC algebra.

$A_{1,2}(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1+\alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, where $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$ is WDC if $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,$ $\alpha_4 = 0,\ \beta_1 = 0$, i.e., $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ is a MSC of a WDC algebra.

□

### 3.4. Comparison

This section is a comparison of the result of Theorem 5 with that of Theorem 4.9 ($I_5$) from [2].

| | WDC algebra from [2] | Isomorphism | WDC algebra from this paper |
|---|---|---|---|
| Char $(\mathbb{F}) = 2$ | $A_{1,2}(1,1,0,0)$ | $\cong$ | $W^{12}_{1,2}$ |
| | $A_{2,2}(\alpha_1, \beta_1, 1+\alpha_1)$ | $\cong$ | $W^{10}_{2,2}(\alpha_1, \beta_1)$ |
| | $A_{3,2}(\alpha_1, 1+\alpha_1)$ | $\cong$ | $W^{7}_{4,2}(\alpha_1, 0)$ |
| | $A_{4,2}(\alpha_1, 1+\alpha_1),\ \alpha_1 \neq \frac{2}{3}$ | $\cong$ | $W^{8}_{3,2}(\alpha_1, 0),\ \mathrm{c} = (\alpha_1, 0) \in \mathbb{F}^2, \alpha_1 \neq \frac{2}{3}$ |
| | $A_{4,2}(\alpha_1, 1)$ | $\cong$ | $W^{9}_{3,2}(\alpha_1)$ |
| | $A_{5,2}(0)$ | $\cong$ | $W^{11}_{2,2}$ |
| | $A_{8,2}(1)$ | $\cong$ | $W^{6}_{6,2}$ |
| | $A_{10,2}$ | $\cong$ | $W^{2}_{11,2}(0)$ |
| | $A_{11,2}$ | $\cong$ | $W^{3}_{10,2}(0)$ |
| | $A_{12,2}$ | $\cong$ | $W^{1}_{12,2}$ |

### 3.5. The characteristic is three

In this case WDC algebras come out from the following classes of Theorem 3. It is immediate that the algebras $A_{9,3}$ - $A_{13,3}$ are WDC algebras. In these cases all the equations of the system (4) turn into identities. The algebra $A_{7,3}$ is WDC if $\alpha_1 = 1$ and $\alpha_4 = 0$ and the algebra $A_{4,3}$ is WDC if $\beta_2 = 1$. Finally, the algebras $A_{3,3}$ and $A_{2,3}$ are WDC if $\beta_2 = 1 - \alpha_1$. The other classes of algebras in Theorem 3 do not produce WDC algebras. Thus, we get the following theorem.

THEOREM 6. *Any non-trivial 2-dimensional well-defined-cube algebra over a field* $\mathbb{F}$, $(Char(\mathbb{F}) = 3)$ *is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants algebras:*

1. $W^1_{2,3}(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, *and* $\alpha_4 \neq 0$,

2. $W^2_{3,3}(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,
*where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,

3. $W^3_{3,3}(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 2\alpha_1+2 & 2\alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 2\alpha_1+2 & 2\alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$,
*where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,

4. $W^4_{4,3}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *where* $\beta_1 \in \mathbb{F}$,

5. $W^5_{4,3} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

6. $W^6_{7,3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

7. $W^7_{9,3}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *where the polynomial*
$(\beta_1 - t^3)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 - 2)$ *has no root in* $\mathbb{F}$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$,

8. $W^8_{10,3}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
*where the polynomial* $\beta_1 - t^3$ *has no root,* $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$ *and* $a, \beta_1 \neq 0$,

*9.* $W^9_{11,3}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2\beta_1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *where* $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$,

*10.* $W^{10}_{12,3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

*11.* $W^{11}_{13,3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

### 3.6. Comparison

Now we compare the list of Theorem 6 with that of Theorem 4.10 ($I_5$) from [2].

| | WDC algebra from [2] | Isomorphism | WDC algebra from this paper |
|---|---|---|---|
| Char $(\mathbb{F}) = 3$ | $A_{2,3}(\alpha_1, \beta_1, 1-\alpha_1)$ | $\ncong$ | $W^1_{2,3}$ |
| | $A_{3,3}(\beta_1, 1)$ | $\ncong$ | $W^4_{4,3}(\beta_1)$ |
| | $A_{3,3}(0, -1)$ | $\ncong$ | $W^5_{4,3}$ |
| | $A_{4,3}(\alpha_1, 1-\alpha_1)$ | $\ncong$ | $W^2_{3,3}(\alpha_1, 0)$ |
| | $A_{4,3}(\alpha_1, 2\alpha_1 - 1)$ | $\ncong$ | $W^3_{3,3}(\alpha_1, 0)$ |
| | $A_{9,3}$ | $\ncong$ | $W^9_{11,3}(1)$ |
| | $A_{10,3}$ | $\ncong$ | $W^9_{11,3}(0)$ |
| | $A_{11,3}$ | $\ncong$ | $W^{10}_{12,3}$ |
| | $A_{12,3}$ | $\ncong$ | $W^{11}_{13,3}$ |

## 4. Classification of two-dimensional mixed-associative algebras

### 4.1. The characteristic is not two and three

The following classes from Theorem 1 produce MAA as follows:

$A_2(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $\alpha_4 \neq 0$,

$A_3(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,

where $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}, a \neq 0$,

$A_4(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, and $A_5(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,

under the conditions $\beta_2 = 1 - \alpha_1$ (in $A_2(\mathrm{c})$), $\beta_2 = 1 - \alpha_1$ (in $A_3(\mathrm{c})$), $\beta_2 = 1$ (in $A_4(\mathrm{c})$) and $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ (in $A_5(\mathrm{c})$) respectively, i.e.,

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } \mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^3, \ \alpha_4 \neq 0,$$

$A_3(\mathrm{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}, a \neq 0$,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{where } \beta_1 \in \mathbb{F}$$

and

$$A_5 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

are mixed-associative algebras.

It is immediate to check that the algebras

- $A_{10}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ where $\beta_1 \in \mathbb{F}$,
- $A_{11}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ where $\beta_1 \in \mathbb{F}$,
- $A_{12}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ where $\beta_1 \in \mathbb{F}$,
- $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

from Theorem 1 also are mixed associative. Thus, we get the following result.

Theorem 7. *Any non-trivial* 2*-dimensional mixed-associative algebra over a field* $\mathbb{F}, (Char(\mathbb{F}) \neq \neq 2, 3)$ *is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants algebras:*

1. $M_2^1(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2,\ \alpha_4 \neq 0$,
2. $M_3^2(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2,\ a \in \mathbb{F},\ a \neq 0$,
3. $M_4^3(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,
4. $M_5^4 := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,
5. $M_{10}^5(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
6. $M_{11}^6(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
7. $M_{12}^7(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
8. $M_{13}^8 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

### 4.2. Comparison

Let compare the list of Theorem 7 with that of Theorem 7.4 from [2] as below.

| | MMA from [2] | Isomorphism | MMA from this paper |
|---|---|---|---|
| Char $(\mathbb{F}) \neq 2,3$ | $A_2(\alpha_1, \beta_1, 1-\alpha_1)$ | $\cong$ | $M_2^1(\mathrm{c}),\ \ \mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ $\alpha_4 \neq 0$ |
| | $A_3(\beta_1, 1)$ | $\ncong$ | $M_4^3(\beta_1)$ |
| | $A_4(\alpha_1, 1-\alpha_1),\ \alpha_1 \neq \frac{2}{3}$ | $\ncong$ | $M_3^2(\alpha_1, 0),\ \alpha_1 \neq \frac{2}{3}$, |
| | $A_5\left(\frac{2}{3}\right)$ | $\ncong$ | $M_5^4$ |
| | $A_{10}$ | $\ncong$ | $M_{12}^7(0)$ |
| | $A_{11}$ | $\ncong$ | $M_{12}^7(1)$ |
| | $A_{12}$ | $\cong$ | $M_{13}^8$ |

### 4.3. The characteristic is two

The list of MA-algebras appear among the classes of Theorem 2 as follows. For the classes

$A_{12,2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_{11,2} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2(\beta_1 + a^2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where $a, b \in \mathbb{F}$ and $b \neq 0$,

$A_{10,2} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, where $\beta_1 \in \mathbb{F}$,

$A_{9,2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where $\beta_1 \in \mathbb{F}$,

$A_{8,2} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where $\beta_1 \in \mathbb{F}$,

all the equations of (7) become identities.

$A_{3,2}$ is MAA if $\beta_2 = \alpha_1 + 1$, i.e., $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1+1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1, \alpha_4 \in \mathbb{F}$ is MAA.

$A_{2,2}$ is MAA if $\beta_2 = \alpha_1 + 1$, i.e., $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1+1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$ is MAA.

THEOREM 8. *Any non-trivial 2-dimensional mixed-associative algebra over a field* $\mathbb{F}$, *(Char*$(\mathbb{F} = 2)$*) is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants algebras:*

1. $M_{12,2}^1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

2. $M_{11,2}^2(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2(\beta_1 + a^2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $a, b \in \mathbb{F}$ *and* $b \neq 0$,

3. $M_{10,2}^3(\beta_1) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a + a^2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *where* $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$,

4. $M_{9,2}^4(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, *and the polynomial* $\beta_1 + t^2$ *has no root in* $\mathbb{F}$,

5. $M^5_{8,2}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
*where the polynomial* $\beta_1 t^3 + t + 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)$ *has no root in* $\mathbb{F}$ *and* $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 t + \beta_1)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$,

6. $M^6_{4,2} := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1+a_1 & 1+a_1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + \alpha_1 a + a^2 & 1+\alpha_1 & 1+\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{F}^2$,

7. $M^7_{3,2}(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1+1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a\alpha_4 \\ 0 & \alpha_1+1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\alpha_1, a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,

8. $M^8_{2,2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

9. $M^9_{2,2}(\alpha_1) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \alpha_1+1 & \alpha_1+1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\alpha_1, \alpha_4 \in \mathbb{F}$ *and* $\alpha_4 \neq 0$,

### 4.4. Comparison

Below is a comparison of the list of Theorem 8 with that of Theorem 4.9 ($I_8$) from [2].

| | MMA from [2] | Isomorphism | MMA from this paper |
|---|---|---|---|
| Char $(\mathbb{F}) = 2$ | $A_{2,2}(\alpha_1, \beta_1, 1+\alpha_1)$ | $\cong$ | $M^1_{2,2}(\mathrm{c}),\ \mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ |
| | $A_{3,2}(\alpha_1, 1+\alpha_1)$ | $\ncong$ | $M^6_{4,2}(\beta_1)$ |
| | $A_{4,2}(\alpha_1, 1+\alpha_1),\ \alpha_1 \neq \frac{2}{3}$ | $\ncong$ | $M^7_{3,2}(\alpha_4 = 0),\ \alpha_1 \neq \frac{2}{3}$, |
| | $A_{5,2}(0)$ | $\ncong$ | $M^8_{2,2}$ |
| | $A_{10,2}$ | $\ncong$ | $M^2_{11,2}(0)$ |
| | $A_{11,2}$ | $\ncong$ | $M^3_{10,2}(0)$ |
| | $A_{12,2}$ | $\ncong$ | $M^1_{12,2}$ |

### 4.5. The characteristic is three

In this case MAA come out from the following classes of Theorem 3. It is immediate that the algebras $A_{9,3}$ - $A_{13,3}$ are MAA algebras. In these cases all the equations of the system (4) turn into identities. The algebra $A_{4,3}$ is MAA if $\beta_2 = 1$. Finally, the algebras $A_{3,3}$ and $A_{2,3}$ are MAA if $\beta_2 = 1 - \alpha_1$. The other classes of algebras of Theorem 3 do not produce MAA algebras. Thus, we get the following theorem.

Theorem 9. *Any non-trivial 2-dimensional mixed-associative algebra over a field* $\mathbb{F}, (Char(\mathbb{F}) = 3)$ *is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants algebras:*

1. $M^1_{2,3}(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1+2\alpha_1 & 1+2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, *where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, *and* $\alpha_4 \neq 0$,

2. $M^2_{3,3}(\mathrm{c}) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1+2\alpha_1 & 1+2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1+2\alpha_1 & 1+2\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,
*where* $\mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $a \neq 0$,

3. $M^3_{4,3}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *where* $\beta_1 \in \mathbb{F}$,

4. $M^4_{9,3}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *where the polynomial* $(\beta_1 - t^3)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 - 2)$ *has no root in* $\mathbb{F}$, $a \in \mathbb{F}$ *and* $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$,

5. $M^5_{10,3}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *where the polynomial* $\beta_1 - t^3$ *has no root,* $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$ *and* $a, \beta_1 \neq 0$,

6. $M^6_{11,3}(\beta_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2\beta_1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *where* $a, \beta_1 \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$,

7. $M^7_{12,3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

8. $M^8_{13,3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

### 4.6. Comparison

Here is a comparison of the list of Theorem 9 with that of Theorem 4.9 ($I_8$) from [2].

| | MMA from [2] | Isomorphism | MMA from this paper |
|---|---|---|---|
| Char $(\mathbb{F}) = 3$ | $A_{2,3}(\alpha_1, \beta_1, 1 + 2\alpha_1)$ | $\cong$ | $M^1_{2,3}(\mathrm{c}),\ \mathrm{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ |
| | $A_{3,3}(\beta_1, 1)$ | $\cong$ | $M^3_{4,3}(\beta_1)$ |
| | $A_{4,3}(\alpha_1, 1 + 2\alpha_1),\ \alpha_1 \neq \frac{2}{3}$ | $\cong$ | $M^7_{3,2}(\alpha_4 = 0),\ \alpha_1 \neq \frac{2}{3}$, |
| | $A_{9,3}$ | $\cong$ | $M^6_{11,3}(1)$ |
| | $A_{10,3}$ | $\cong$ | $M^6_{11,3}(0)$ |
| | $A_{11,3}$ | $\cong$ | $M^7_{12,3}$ |
| | $A_{12,3}$ | $\cong$ | $M^8_{13,3}$ |

## Acknowledgment

Authors acknowledge the Ministry of Higher Education (MOHE) for funding under the Fundamental Research Grant Early Career Researchers (FRGS-EC) (FRGS-EC/1/2024/STG06/UiTM/02/24).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахмед Х., Бекбаев У., Рахимов И. Полная классификация двумерных алгебр // AIP Conference Proceedings. 2017. Т. 1830. С. 070016. URL: https://arxiv.org/abs/1702.08616.

2. Ахмед, Х., Бекбаев, У., Рахимов, И. О некоторых тождественных выражениях для двумерных алгебр // Лобачевский журнал математики. 2020. Т. 41. № 9. С. 1615–1629.

3. Ахмед, Х., Бекбаев, У., Рахимов, И. Подалгебры, идемпотенты, идеалы и квази-единицы двумерных алгебр // Международный журнал алгебры и вычислений. 2020. Т. 30. № 5. С. 903–929.

4. Альбеверио, С., Омиров, Б.А., Рахимов И. Классификация 4-мерных нилпотентных комплексных лейбницевых алгебр // Extracta Mathematicae. 2006. Т. 21. № 3. С. 197–210.

5. Бекбаев, У. Классификация двумерных алгебр над любым базовым полем // Труды конференции AIP. 2023. Т. 2880. С. 030001. DOI: 10.1063/5.0165726.

6. Касас, Х.-М., Инсуа, М., Ладра, М., Ладра, С. Алгоритм классификации 3-мерных комплексных лейбницевых алгебр // Линейная алгебра и её приложения. 2012. Т. 9. С. 3747–3756.

7. Демир, И., Мисра, К.Ч., Штицингер, Э. Классификация некоторых разрешимых лейбницевых алгебр // Алгебры и теории представлений. 2016. Т. 19. С. 405–417.

8. Гозе, М., Ремм, Э. 2-мерные алгебры // Африканский журнал математической физики. 2011. Т. 10. С. 81–91.

9. Джекобсон, Н. Алгебры Ли // Нью-Йорк: Издательство Интерсайенс. 1962.

10. Кашуба, И., Мартин, М. Э. Геометрическая классификация нильпотентных алгебр Жордана размерности пять // Журнал чистой и прикладной алгебры. 2017. DOI: 10.1016/j.jpaa.2017.04.018.

11. Кайгородов, И., Волков, Ю. Разнообразие 2-мерных алгебр над алгебраически замкнутым полем // Канадский журнал математики. 2019. 71(4). С. 819–842.

12. Кобаяси, Я., Шираянаги, К., Цукада, М., Такахаси, С.Э. Полная классификация трехмерных алгебр над $R$ // Азиатско-европейский журнал математики. 2021. Т. 14. № 8. С. 2150131. DOI: 10.1142/S179355712150131X.

13. Худойбердиев, А.Х., Рахимов, И.С., Сайд Хусейн, Ш.К. О классификации 5-мерных разрешимых лейбницевых алгебр // Линейная алгебра и её приложения. 2014. Т. 457. С. 428–454.

14. Маццола, Г. Алгебраическая и геометрическая классификация ассоциативных алгебр размерности пять // Математическая рукопись. 1979. Т. 27. С. 1–21.

15. Морозов, В.В. Классификация нилпотентных ли-алгебр размерности 6 // Изв. высш. учебн. зав. Мат. 1958. № 4:5. С. 161–170.

16. Мубаракджанов, Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. зав. Мат. 1963. № 32(1). С. 114–123.

17. Мубаракджанов, Г.М. Классификация вещественных структур ли-алгебр пятого порядка // Изв. высш. учебн. зав. Мат. 1963. № 34(3). С. 99–106.

18. Мубаракджанов, Г.М. Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с ненилпотентными базисными элементами // Изв. высш. учебн. зав. Мат. 1963. № 35(4). С. 104–116.

19. Петерссон, Х.П. Классификация двумерных неассоциативных алгебр // Result. Math. 2000. Т. 3. С. 120–154.

## REFERENCES

1. Ahmed, H., Bekbaev, U., Rakhimov, I. 2017, “Complete classification of two-dimensional algebras”, *AIP Conference Proceedings*, 1830, pp. 070016. https://arxiv.org/abs/1702.08616.

2. Ahmed, H., Bekbaev, U., Rakhimov, I. 2020, “On identities on two-dimensional algebras”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41(9), pp. 1615–1629.

3. Ahmed, H., Bekbaev, U., Rakhimov, I. 2020, "Subalgebras, idempotents, ideals and quasi-units of two-dimensional algebras", *International Journal of Algebra and Computation*, 30(5), pp. 903–929.

4. Albeverio, S., Omirov, B.A., Rakhimov, I. 2006, "Classification of 4-dimensional nilpotent complex Leibniz algebras", *Extracta Mathematicae*, 21(3), pp. 197–210.

5. Bekbaev, U. 2023, "Classification of two-dimensional algebras over any basic field", *AIP Conference Proceedings*, 2880, pp. 030001, https://doi.org/10.1063/5.0165726.

6. Casas, J.-M., Insua, M., Ladra, M., Ladra, S. 2012, "An algorithm for the classification of 3-dimensional complex Leibniz algebras", *Linear Algebra and its Applications*, 9, pp. 3747–3756.

7. Demir, I., Misra, K.C., Stitzinger, E. 2016, "Classification of Some Solvable Leibniz Algebras", *Algebras and Representation Theory*, 19, pp. 405–417.

8. Goze, M., Remm, E. 2011, "2-dimensional algebras", *African Journal of Mathematical Physics*, 10, pp. 81–91.

9. Jacobson, N. 1962, *Lie Algebras*, (Interscience Publishers, Wiley, New York).

10. Kashuba, I., Martin, M.E. 2017, "Geometric classification of nilpotent Jordan algebras of dimension five", *Journal of Pure and Applied Algebra*, DOI:10.1016/j.jpaa.2017.04.018.

11. Kaygorodov, I., Volkov, Y. 2019, "The variety of 2-dimensional algebras over an algebraically closed field", *Canadian Journal of Mathematics*, 71(4), pp. 819–842.

12. Kobayashi, Y., Shirayanagi, K., Tsukada, M., Takahasi, S.E. 2021, "A complete classification of three-dimensional algebras over R", *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(8), pp. 2150131, DOI:10.1142/S179355712150131X.

13. Khudoyberdiyev, A.Kh., Rakhimov, I.S., Said Husain, Sh.K. 2014, "On classification of 5-dimensional solvable Leibniz algebras", *Linear Algebra and its Applications*, 457, pp. 428–454.

14. Mazzola, G. 1979, "The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five", *Manuscripta Math.*, 27, pp. 1–21.

15. Morozov, V.V. 1958, "Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 6", *Isv. Vysch. Uchebn. Zaved. Mat.*, 4:5, pp. 161–17 (in Russian).

16. Mubarakzjanov, G.M. 1963, "On solvable Lie algebras", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 32(1), pp. 114–123 (in Russian).

17. Mubarakzjanov, G.M. 1963, "Classification of real structures of Lie algebras of fifth order", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 34(3), pp. 99–106 (in Russian).

18. Mubarakzjanov, G.M. 1963, "Classification of solvable Lie algebras of sixth order with non-nilpotent basis elements", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 35(4), pp. 104–116 (in Russian).

19. Petersson, H.P. 2000, "The classification of two-dimensional nonassociative algebras", *Result. Math.*, 3, pp. 120–154.

Получено: 28.07.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-183-194

# Наилучшее совместное приближение некоторых классов функций в пространстве Бергмана $B_2$

Х. М. Хуромонов

**Хуромонов Хуромон Мамадамонович** — кандидат физико-математических наук, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана (г. Душанбе).
*e-mail: khuromon@mail.ru*

**Аннотация**

В работе изучается ряд экстремальных задач, связанных с наилучшим совместным приближением некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков в пространстве Бергмана $B_2$. Отметим, что впервые задача совместного приближения периодических дифференцируемых функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными в равномерной метрике была исследована А.Л.Гаркави [1]. Полученные в [1] результаты были обобщены А.Ф.Тиманом [2] на классе целых функций экспоненциального типа на всей прямой. В монографии [3] задачи совместного приближения обобщены на некоторых классических теоремах теории аппроксимации функций. Однако в перечисленных работах получены только асимптотически точные результаты. В данной работе доказан ряд точных теорем совместного приближения аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана $B_2$, дополняющих результаты М.Ш.Шабозова [4].

*Ключевые слова:* совместное приближение, модуль непрерывности, $n$-поперечники, мажоранта, пространство Бергмана.

*Библиография:* 23 названий.

**Для цитирования:**
Хуромонов, Х. М. Наилучшее совместное приближение некоторых классов функций в пространстве Бергмана $B_2$ // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 183–194.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-183-194

# The best joint approximation of some classes of functions in the Bergman space $B_2$

Kh. M. Khuromonov

**Khuromonov Khuromon Mamadamonovich** — candidate of physical and mathematical sciences, International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan (Dushanbe).
*e-mail: khuromon@mail.ru*

**Abstract**

In this paper, we study several extreme problems related to the best joint approximation of certain classes of analytical functions in the unit circle given by higher-order continuity modules in the Bergman space $B_2$. It should be noted that for the first time the problem of joint approximation of periodic differentiable functions and their consecutive derivatives by trigonometric polynomials and their corresponding derivatives in a uniform metric was investigated by A.L.Garkavi [1]. The results obtained in [1] were generalized by A.F.Timan [2] for a class of integer functions of exponential type on the entire line. In the monograph [3]. The problems of joint approximation are generalized to some classical theorems of the theory of approximation of functions. However, in the listed works, only asymptotically accurate results were obtained. In this paper, we prove a number of exact theorems for the joint approximation of analytic functions in the unit circle belonging to the Bergman space $B_2$, complementing the results of M.Sh.Shabozov [4].

*Keywords:* joint approximation, modulus of continuity, $n$-diameters, majorant, Bergman spaces.

*Bibliography:* 23 titles.

**For citation:**
Khuromonov, Kh. M. 2024, "The best joint approximation of some classes of functions in the Bergman space $B_2$" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 183–194.

## 1. Введение и предварительные факты

В ряде работ, например [5]–[14], изучаются экстремальные задачи теории наилучшего полиномиального приближения функций в пространствах Харди и Бергмана. В данной статье изучаются некоторые экстремальные задачи полиномиального приближения аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Бергмана $B_2$. Полученные здесь результаты дополняют ряд точных теорем совместного приближения функций и их промежуточных производных, недавно опубликованных в работе М.Ш.Шабозова [4]. Отметим, что ряд точных теорем совместного приближения периодических функций получены С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [15], а для некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди доказаны в работах [16] и [17].

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и вещественных чисел. Пусть далее $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество функций, аналитических в круге $U$.

Говорят [10], что аналитическая в единичном круге $U$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \ 0 \leqslant \rho < 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \tag{1}$$

принадлежит пространству Бергмана $B_2$, если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left( \frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty. \tag{2}$$

Производную $r$-го порядка функции $f \in A(U)$ определим, как обычно,

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1) c_k(f) z^{k-r}, \ r \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Ради краткости, введём обозначение

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1) = k!/(k-r)!,\ k,r\in\mathbb{N},\ k>r. \tag{4}$$

Всюду далее символом $B_2^{(r)}$ ($r\in\mathbb{Z}_+,\ B_2^{(0)}=B_2$) обозначим множество функций $f\in A(U)$, принадлежащих пространству $B_2$, производная $r$-го порядка $f^{(r)}(z)$ которых также принадлежит $B_2$, то есть

$$B_2^{(r)} := \big\{f\in B_2 : \|f^{(r)}\|_2<\infty\big\}.$$

Пусть $\mathscr{P}_n$ — подпространство комплексных алгебраических многочленов степени $n$ вида

$$p_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\quad a_k\in\mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f)_2 := E(f,\mathscr{P}_n)_{B_2} = \inf\big\{\|f-p_n\|_2 : p_n\in\mathscr{P}_n\big\} \tag{5}$$

называют наилучшим полиномиальным среднеквадратическим приближением функции $f\in B_2$ подпространством $\mathscr{P}_n$.

Хорошо известно, что для произвольной функции $f\in B_2$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f_2) = \|f-T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\}^{1/2}, \tag{6}$$

где $T_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда (1).

Запишем норму (1) в более удобном виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^2\rho d\rho dt\right)^{1/2},$$

и символом

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) := \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} f\big(\rho e^{i(t+kh)}\big)$$

обозначим конечную разность $m$-го порядка функции $f\in B_2$ по аргументу $t$ с шагом $h$. Равенством

$$\|\Delta_h^m(f)\|_2 := \left(\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}|\Delta_h^m f(\rho e^{it})|^2\rho d\rho dt\right)^{1/2}$$

обозначим норму разности $m$-го порядка функции $f\in B_2$.

Модуль непрерывности $m$-го порядка функции $f\in B_2$ определим, как обычно, равенством

$$\omega_m(f,\tau)_2 := \sup\big\{\|\Delta_h^m(f)\|_2 : |h|\leqslant\tau\big\}. \tag{7}$$

Пользуясь соотношениями (3) и (4), для любого $r\in\mathbb{Z}_+$ имеем

$$\Delta_h^m f^{(r)}(\rho e^{it}) = \sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}c_k(f)\rho^{k-r}e^{i(k-r)t}\big(1-e^{i(k-r)h}\big)^m. \tag{8}$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, получаем

$$\|\Delta_h^m f^{(r)}\|^2 = 2^m\sum_{k=r+1}^{\infty}\alpha_{k,r}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}\big(1-\cos(k-r)h\big)^m \tag{9}$$

и, следовательно,

$$\omega_m^2(f^{(r)},\tau)_2 = 2^m \sup_{|h|\leqslant\tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}\big(1-\cos(k-r)h\big)^m. \tag{10}$$

Поскольку для функции $f \in B_2^{(r)}$, наравне с функциями $f$ и $f^{(r)}$, последовательные производные $f^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$ также принадлежат пространству $B_2$ [4], то представляет интерес отыскание точных значений совместных приближений функций и их производных

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 := \inf\big\{\|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\|_2 : p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\big\}, \tag{11}$$

на некотором подмножестве $\mathfrak{M}^{(r)} \subset B_2^{(r)}$ или на самом классе $B_2^{(r)}$. Точнее, требуется найти значение величины

$$E_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup\big\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\big\}. \tag{12}$$

В [18] доказано, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geqslant s$ для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ справедливы соотношения

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1}\right\}^{1/2}, \tag{13}$$

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 \leqslant \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_2, \tag{14}$$

причём неравенство (14) обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r \geqslant s$.

Неравенствами (13) и (14) воспользуемся в дальнейшем. Для нас определённый интерес представляет изучение следующей экстремальной аппроксимационной характеристики

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s}(h) := \sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\left(\displaystyle\int_0^h (h-t)\omega_m^{m/2}(f^{(r)},t)_2 dt\right)^{m/2}} \tag{15}$$

содержащей осреднённый с весом $h-t$ $(0 \leqslant t \leqslant h)$ модуль непрерывности $m$-го порядка $\omega_m^{m/2}(f^{(r)},t)$. Ещё одним аргументом в пользу такого выбора характеристики (15), является работа С.Фокарта, Ю.Крякина и А.Щадрина [19], в которой сделано существенное продвижение в решении задачи о точной константе в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $C := C[0, 2\pi]$. При этом ключевую роль сыграл указанный вес, с помощью которого осреднялась сама конечная разность (8), а не её норма.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geqslant s$. Тогда для любого $h$, удовлетворяющего условию $0 < h \leqslant \pi/(n-r)$ справедливо равенство*

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s}(h) = h^{-m}\left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-r)h/2)}{(n-r)h}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место следующее неравенство [4]

$$E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cos kt \leqslant E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)_2 \cdot \frac{1}{2}\omega_m^{2/m}(f,t)_2. \tag{17}$$

Умножив обе части неравенства (17) на функцию $h-t$ и проинтегрировав полученный результат по переменной $t$ в пределах от 0 до $h$, имеем

$$\frac{h^2}{2}E_{n-1}^2(f)_2 \leqslant \frac{h^2}{2}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\left(\frac{2\sin(kh/2)}{kh}\right)^2 +$$

$$+E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)_2\cdot\frac{1}{2}\int_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f,t)dt. \tag{18}$$

Поскольку [20]

$$\sup\left\{\frac{\sin x}{x}:\frac{nh}{2}\leqslant x<\infty\right\}=\frac{2\sin(nh/2)}{nh},$$

то из неравенства (1) получаем

$$h^2E_{n-1}^2(f)_2\leqslant h^2\left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2E_{n-1}^2(f)+E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)_2\int_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f,t)dt$$

или

$$E_{n-1}(f)_2\leqslant h^{-m}\left\{1-\left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-m/2}\left(\int_0^h(h-t)\omega_m^{m/2}(f,t)_2dt\right)^{m/2}. \tag{19}$$

Если $f\in B_2^{(r)}$, то заменяя в (19) число $n$ на $n-r$ и функцию $f$ на производную $f^{(r)}$, запишем

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_2\leqslant$$

$$\leqslant h^{-m}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-r)h/2)}{(n-r)h}\right)^2\right\}^{-m/2}\left(\int_0^h(h-t)\omega_m^{m/2}(f^{(r)},t)_2dt\right)^{m/2} \tag{20}$$

и, учитывая (1) из неравенства (14), получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2\leqslant\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}E_{n-r-1}(f^{(r)})_2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot h^{-m}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-r)h/2)}{(n-r)h}\right)^2\right\}^{-m/2}\times$$

$$\times\left(\int_0^h(h-t)\omega_m^{m/2}(f^{(r)},t)_2dt\right)^{m/2}. \tag{21}$$

Из (1) следует, что

$$\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^h(h-t)\omega_m^{m/2}(f^{(r)},t)_2dt\right)^{m/2}}\leqslant$$

$$\leqslant h^{-m}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-r)h/2)}{(n-r)h}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{22}$$

Так как неравенство (1) верно для любой функции $f\in B_2^{(r)}$, то переходя к верхней грани по всем функциям $f\in B_2^{(r)}$ из (1), получаем

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s}(h)\leqslant h^{-m}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-r)h/2)}{(n-r)h}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{23}$$

Для получения оценки снизу величины $\mathcal{K}_{m,n,r,s}(h)$ рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$. Поскольку

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}}, \quad \omega_m(f_0^{(r)}, t) = 2^m \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} \big(\sin((n-r)t/2)\big)^m,$$

где $0 \leqslant t \leqslant \pi/(n-r)$, то нетрудно убедится, что

$$\left(\int_0^h (h-t)\omega_m^{m/2}(f_0^{(r)}, t)_2 dt\right)^{m/2} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}} \sqrt{\frac{n-s+1}{n-r+1}} \cdot h^m \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-r)h/2)}{(n-r)h}\right)^2\right\}^{m/2}.$$

Учитывая равенство (14), запишем оценку снизу

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s}(h) \geqslant \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2}{\left(\int_0^h (h-t)\omega_m^{m/2}(f_0^{(r)}, t)_2 dt\right)^{m/2}} =$$

$$= h^{-m} \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-r)h/2)}{(n-r)h}\right)^2\right\}^{-m/2}. \tag{24}$$

Требуемое равенство (16) следует из сопоставления оценки сверху (23) с оценкой снизу (1), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

## 2. Точные значения $n$-поперечников класса $W_m^{(r)}(\Phi)$

Пусть $S := \{\varphi \in B_2 : \|\varphi\| \leqslant 1\}$ — единичный шар в $B_2$, $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из $B_2$, $\mathcal{L}_n \subset B_2$ — $n$-мерное подпространство, $\mathcal{L}^n \subset B_2$ — подпространство коразмерности $n$; $\Lambda : B_2 \to \mathcal{L}_n$ — непрерывный линейный оператор, $\Lambda^\perp : B_2 \to \mathcal{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, B_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{N}\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset B_2\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf\{\sup\{\inf\{\|\varphi - g\|_2 : g \in \mathcal{L}_n\} : \varphi \in \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}_n \subset B_2\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf\{\inf\{\sup\{\|\varphi - \Lambda\varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M}\} : \Lambda B_2 \subset \mathcal{L}_n\} : \mathcal{L}_n \subset B_2\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf\{\sup\{\|\varphi\|_2 : f \in \mathfrak{N} \cap \mathcal{L}_n\} : \mathcal{L}_n \subset B_2\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|\varphi - \Lambda^\perp\varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda^\perp B_2 \subset \mathcal{L}_n\right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным $n$-поперечниками*. Выше перечисленные $n$-поперечники в $B_2$ связаны соотношениями [21, 22]:

$$b_n(\mathfrak{M}, B_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, B_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, B_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, B_2). \tag{25}$$

Полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M}\} -$$

наилучшее приближение множества $\mathfrak{M}$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Непрерывную возрастающую на полусегменте $[0,\infty)$ функцию $\Phi$, такую, что $\Phi(0)=0$, будем назвать мажорантой. Множество всех мажорант обозначим символом $\mathfrak{N}$. Через $\mathfrak{N}_k$, где $k\in\mathbb{N}$, обозначим множество мажорант $\Phi\in\mathfrak{N}$, для которых выполняется условия

1) $t_1^{-k}\Phi(t_1)\leqslant t_2^{-1}\Phi(t_2)$, если $0<t_1<t_2\leqslant\pi$;

2) $\lim\limits_{t\to 0+} t^{-k}\Phi(t)=0$.

Для произвольных чисел $r\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{N}$, $n>r$ и $h\in(0,2\pi]$ введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_{m,2}^{(r)}(\Phi):=\left\{f\in B_2^{(r)}:\int_0^h(h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\leqslant\Phi(h)\right\},$$

где $\Phi\in\mathfrak{N}_2$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть мажоранта $\Phi\in\mathfrak{N}_2$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(n-r))}\geqslant\frac{1}{\pi^2-4}\begin{cases}((n-r)h)^2-2(1-\cos(n-r)h), & \text{если } 0\leqslant h\leqslant\pi/(n-r),\\ \pi^2-4+((n-r)h-\pi)^2, & \text{если } h\geqslant\pi/(n-r).\end{cases}\tag{26}$$

*Тогда для любых чисел $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ справедливы равенства*

$$\gamma_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi);B_2)=E_{n-1}(W_{m,2}^{(r)}(\Phi))_{B_2}=$$

$$=\frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2},\tag{27}$$

*где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из $n$-поперечников, перечисленных ранее. Множество мажорант, удовлетворяющих условию* (26)*, не пусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в неравенстве (1) $s=0$, $h=\pi/(n-r)$ и используя определение класса $W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$, получаем

$$E_{n-1}(f)\leqslant\frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2}.\tag{28}$$

Учитывая неравенства (25) и (28), запишем оценки сверху для перечисленных выше $n$-поперечников

$$\gamma_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi);B_2)\leqslant d_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi);B_2)\leqslant E_{n-1}(W_{m,2}^{(r)}(\Phi))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2}.\tag{29}$$

Для получения оценки снизу указанных $n$-поперечников рассмотрим в множестве $\mathcal{P}_n\cap B_2$ $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$\sigma_{n+1}:=\left\{p_n\in\mathcal{P}_n:\|p_n\|\leqslant\frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2}\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$. Для этого нам понадобится следующая

ЛЕММА. *Для произвольного полинома $p_n\in\mathcal{P}_n$ при любых $n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство*

$$\omega_m^2(p_n^{(r)},t)\leqslant 2^m\alpha_{n,r}^2\sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}}(1-\cos(n-r)t)_*^m\|p_n\|^2,\tag{30}$$

*где*

$$(1-\cos(n-r)t)_*^m := \begin{cases} (1-\cos(n-r)t)^m, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \pi/(n-r); \\ 2^m, & \text{если } t \geqslant \pi/(n-r). \end{cases} \tag{31}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая формулу (10), запишем

$$\omega_m^2(p_n^{(r)},t)_2 = 2^m \sup_{|h|\leqslant t} \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(p_n)|^2}{k-r+1}\big(1-\cos(k-r)h\big)^m. \tag{32}$$

Пользуясь тем, что при всех $r+1 \leqslant k \leqslant n$

$$(1-\cos(k-r)h)^m \leqslant (1-\cos(n-r)h)_*^m, \quad \text{где } 0 \leqslant h \leqslant \pi/(n-r)$$

и

$$\max_{r+1\leqslant k\leqslant n} \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} = \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1},$$

из (32) получаем

$$\omega_m^2(p_n^{(r)},t) = 2^m \sup_{|h|\leqslant t} \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1}\big(1-\cos(k-r)h\big)^m \leqslant$$

$$\leqslant 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1}(1-\cos(n-r)h)_*^m \sum_{k=r+1}^{n} \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} =$$

$$= 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1}(1-\cos(n-r)h)_*^m \|p_n\|^2$$

и неравенство (30) и вместе с ним лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. Из (30), при $0 < h \leqslant \pi/(n-r)$ с учётом первого из неравенств (26), получаем

$$\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(p_n^{(r)},t)dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\alpha_{n,r}^{2/m}\left(\frac{n+1}{n-r+1}\right)^{1/m} \|p_n\|^{2/m} \int_0^h (h-t)(1-\cos(n-r)t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \big[((n-r)h)^2 - 2(1-\cos(n-r)h)\big](\pi^2-4)^{-1}\Phi(\pi/(n-r)) \leqslant \Phi(h). \tag{33}$$

Если же $h \geqslant \pi/(n-r)$, то используя второе из ограничений (26) и соотношение (30), для произвольного полинома $p_n \in \sigma_{n+1}$ получаем

$$\int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(p_n^{(r)},t)dt \leqslant 2\alpha_{n,r}^{2/m}\left(\frac{n+1}{n-r+1}\right)^{1/m} \|p_n\|^{2/m} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\pi/(n-r)} \left(\frac{\pi}{n-r} - t\right)(1-\cos(n-r)t)dt + 2\int_{\pi/(n-r)}^h (h-t)dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \big\{\pi^2 - 4 + ((n-r)h-\pi)^2\big\}(\pi^2-4)^{-1}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \leqslant \Phi(h). \tag{34}$$

Из неравенств (2), (2) следует включение $\sigma_{n+1} \subset W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$.

Используя соотношение (25) и определение бернштейновского $n$-поперечника, запишем оценки снизу вышеперечисленных $n$-поперечников

$$\gamma_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi);B_2)\geqslant b_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi);B_2)\geqslant b_n(\sigma_{n+1},B_2)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2}. \tag{35}$$

Сопоставляя оценки сверху (2) и снизу (2), получаем требуемые равенства (2).

В [23] доказано, что множество мажорант, принадлежащих $\mathfrak{N}_2$ и удовлетворяющих ограничению (26), не пусто. Этому ограничению удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(t)=t^\alpha$, где $\alpha=2\pi^2/(\pi^2-4)$. Теорема 2 доказана.

## 3. Решение экстремальной задачи (12) для класса функций $W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$

Доказанные в предыдущих пунктах теоремы 1 и 2 представляют возможность найти решение экстремальной задачи (12) для класса $W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$.

ТЕОРЕМА 3. *При любых* $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geqslant s$ *и* $h\in(0,\pi/(n-r)]$ *имеют место равенства*

$$E_{n-s-1}(W_{m,2}^{(r)}(\Phi))=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2}. \tag{36}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (1) для произвольной функции $f\in W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$ при $h=\pi/(n-r)$ получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})\leqslant\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2},$$

откуда и следует оценка сверху для величины, расположенной в левой части равенства (36):

$$E_{n-s-1}(W_{m,2}^{(r)}(\Phi))\leqslant\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2}. \tag{37}$$

Для получения аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение функцию

$$f_1(z)=\frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}}\cdot\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2}z^n.$$

Так как

$$\|f_1\|=\frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\frac{\sqrt{n-r+1}}{n+1}\cdot\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2},$$

то функция $f_1\in\sigma_{n+1}$, а значит $f_1\in W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$. С другой строны, для производной $f_1^{(s)}$ $(s=0,1,\ldots,r)$ имеем

$$f_1^{(s)}(z)=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{n-r+1}\cdot\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2}z^{n-s},$$

$$E_{n-s-1}(f_1^{(s)})=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\left\{\frac{(n-r)^2}{\pi^2-4}\Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right)\right\}^{m/2}. \tag{38}$$

Используя равенство (38), получаем оценку снизу

$$E_{n-s-1}(W^{(r)}_{m,2}(\Phi)) \geqslant E_{n-s-1}(f^{(s)}_1) =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2}. \tag{39}$$

Требуемое равенство (36) получаем из сопоставления оценки сверху (38) с оценкой снизу (3), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Гаркави А. Л. О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1960. Т. 24. № 1, С. 103–128.

2. Тиман А. Ф. К вопросу об одновременной аппроксимации функций и их производных на всей числовой оси // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1960. Т. 24. № 3. С. 421–430.

3. Малоземов Н. В. Совместное приближение функции и ее производных // ЛГУ. 1973.

4. Шабозов М. Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана $B_2$ // Матем. заметки. 2023. Т. 114. Вып. 3. С. 435–446.

5. Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. 1958. Т. 22. № 5. С. 631–640.

6. Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 155–162.

7. Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 2. С. 285–295.

8. Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. Киев. ИМ АН УССР. 1983.

9. Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 2. С. 171–174.

10. Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 30–39.

11. Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 2. С. 186–193.

12. Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 8. С. 3–22.

13. Шабозов М. Ш., Кадамшоев Н. У. Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // Матем. заметки. 2021. Т. 10. № 2. С. 266–281.

14. Шабозов М. Ш., Шабозова А. А. О совместном приближении некоторых классов функций в пространстве Бергмана $B_2$ // Изв. вузов. Матем. 2024. № 6. С. 80–88.

15. Вакарчук С. Б., Забутная В. И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в $L_2$ и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 3. С. 328–336.

16. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Заргаров Дж. Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Труды ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 240–256.

17. Шабозов М. Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29. № 4. С. 283–291.

18. Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 258–272.

19. Foucart S., Kryakin Yu., Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 2009. V. 29. PP. 157–179.

20. Тайков Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из $L_2$ // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 433–438.

21. Pinkus A. $n$-Widths by Approximation Theory. Berlin: Springer. 1985.

22. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений // М: МГУ. 1976. 325 С.

23. Шабозов М. Ш., Вакарчук С. Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в $L_2$ // Analysis Mathematica. 2012. V. 38. PP. 147–159.

## REFERENCES

1. Garkavi, A. L. 1960, “On the joint approximation of a periodic function and its derivatives trigonometric polynomials”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol. 24, no. 1, pp. 103–128 (In Russian).

2. Timan, A. F. 1960, “On the issue of simultaneous approximation of functions and their derivatives on the entire number line”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol. 24, no. 3, pp. 421–430 (In Russian).

3. Malozemov N. V. 1973, “Joint approximation of a function and its derivatives”. – LGU. 1973 (In Russian).

4. Shabozov, M. Sh. 2023, “On the Best Simultaneous Approximation in the Bergman Space $B_2$”, *Math. Notes.* vol. 114. issue. 3. pp. 435–446.

5. Babenko, K. I. 1985, “On the best approximations of one class of analytic functions”, *Izv. Acad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol. 22, no. 5, pp. 631–640 (In Russian).

6. Taikov L. V. 1967, “Best approximation in the mean of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, vol. 1. no 2. pp. 104-109.

7. Taikov L. V. 1977, “Diameters of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, vol. 22, no 2, C. 650–656.

8. Dveyrin, M. Z. & Chebanenko, I. V. 1983, “On polynomial approximation in Banach spaces analytical functions”, Theory of mappings and approximation of functions. *Inst. Math. Acad. Nauk Ukrain. SSR*, pp. 62–73 (In Russian).

9. Shabozov, M. Sh. 2002, "Widths of some classes of analytic functions in space Bergman", *Dokl. RAN.* vol. 383, no 2, pp. 171–174 (In Russian).

10. Vakarchuk, S. B. 1995, "Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk", *Math. Notes*, vol. 57, no 1. pp. 21–27.

11. Vakarchuk, S. B. 1999, "On the best linear approximation methods and the widths of certain classes of analytic functions", *Math. Notes*, vol. 65. no 2. pp. 153–158.

12. Vakarchuk S. B. & Shabozov M. Sh. 2010, "The widths of classes of analytic functions in a disc", *Sb. Math.*, vol. 201, no 8. pp. 1091–1110.

13. Shabozov, M. Sh. & Kadamshoev, N. U. 2021, Sharp Inequalities between the Best Root-Mean-Square Approximations of Analytic Functions in the Disk and Some Smoothness Characteristics in the Bergman Space, *Math. Notes*, vol. 10. no 2. pp. 248–260.

14. Shabozov, M. Sh. & Shabozova, A. A. 2024, "On simultaneous approximation of certain classes of functions in the Bergman space $B_2$", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, no. 6, pp. 80–88.

15. Vakarchuk, S. B. & Zabutnaya, V. I. 2009, "A Sharp Inequality of Jackson–Stechkin type in $L_2$ and the Widths of Functional Classes", *Math. Notes*, vol. 86, no 3. pp. 306–313.

16. Shabozov, M. Sh. & Yusupov, G. A. & Zargarov, J. J. 2021, "On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, vol. 27, no 4. pp. 239–254.

17. Shabozov, M. Sh. 2023, "On the best simultaneous approximation of functions in the Hardy space", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 29. no 4. pp. 283–291.

18. Shabozov, M. Sh. & Saidusaynov, M. S. 2019, "Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 25, no 2. pp. 258–272.

19. Foucart, S. & Kryakin, Yu.& Shadrin. 2009, "A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric", *Constr. Approx.*, vol. 29. pp. 157–179.

20. Taikov, L. V. 1976, "Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in $L_2$", *Math. Notes*, vol. 20, no 3, pp. 797–800.

21. Pinkus,A. 1985, "$n$-Widths by Approximation Theory", Berlin: Springer.

22. Tikhomirov, V. M. 1976, "Some questions of approximation theory", MGU., 325 p (In Russian).

23. Shabozov, M. Sh. & Vakarchuk, S. B. 2012, "On the best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials and the exact values of widths of function classes in $L_2$", *Analysis Mathematica*, vol. 38. pp. 147–159.

Получено: 01.07.24
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-195-215

# Об аналоге задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа

А. В. Шутов

**Шутов Антон Владимирович** — доктор физико-математических наук, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).
*e-mail: a1981@mail.ru*

**Аннотация**

А. О. Гельфонд доказал, что при условии взаимной простоты $b-1$ и $d$ суммы цифр разложений натуральных чисел в $b$-ичную систему счисления равномерно распределены по арифметическим прогрессиям с разностью $d$. Также он получил степенную оценку остаточного члена в данной задаче.

Мы рассматриваем аналог задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа натуральных чисел в виде суммы чисел Фибоначчи. Показано, что в данном случае также имеет место равномерная распределенность сумм цифр по арифметическим прогрессиям. Более того, в случае, когда разность арифметической прогрессии $d$ равняется 2, ранее было доказано, что остаточный член задачи является логарифмическим. В настоящей работе показано, что при $d \geq 3$ остаточный член задачи является степенным и найдена неулучшаемая по порядку оценка для него.

В основе доказательства лежит детальное изучение остаточного члена в точках, равных числам Фибоначчи. Показано, что остаточный член в произвольной точке может быть оценен через значения остаточного члена в числах Фибоначчи. Для последних удается получить линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами, и, более того, точную формулу в терминах некоторых определителей Вандермонда, связанных с корнями характеристического многочлена.

Кроме того, достаточно неожиданно линейное рекуррентное соотношение для остаточного члена в точках, равных числам Фибоначчи, оказывается связанным с некоторыми комбинаторными треугольниками, аналогичными треугольнику Паскаля.

*Ключевые слова:* задача Гельфонда, суммы цифр, числа Фибоначчи, представление Цекендорфа, треугольник Паскаля.

*Библиография:* 18 названий.

**Для цитирования:**
Шутов, А.В. Об аналоге задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 195–215.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-195-215

# On some analogue of the Gelfond problem for Zeckendorf representations

A. V. Shutov

**Shutov Anton Vladimirovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (Vladimir).
*e-mail: a1981@mail.ru*

**Abstract**

A.O. Gelfond proved that if $b-1$ and $d$ are coprime, the sums of digits of the $b$-ary expressions of natural numbers are uniformly distributed over arithmetic progressions with difference $d$. He also obtained a power estimate for the remainder term in this problem.

We consider an analogue of Gelfond's problem for Zeckendorf representations of naturals as a sum of Fibonacci numbers. It is shown that in this case we again have the uniform distribution of the sums of digits over arithmetic progressions.

Moreover, in the case when the difference of the arithmetic progression $d$ is equal to 2, it was previously proved that the remainder term of the problem is logarithmic. In the present paper, it is shown that for $d \geq 3$ the remainder term of the problem is a power and an unimprovable in order estimate for it is found.

The proof is based on the detailed study of the remainder term at the Fibonacci numbers. It is shown that the remainder term at an arbitrary point can be estimated through the values of the remainder term in points equal to Fibonacci numbers. For them, it is possible to obtain a linear recurrence relation with constant coefficients, and, moreover, and an exact formula in terms of some Vandermonde determinants connected with the roots of the characteristic polynomial.

Moreover, quite surprisingly, the linear recurrence relation for the remainder term at the Fibonacci points turns out to be connected with some combinatorial triangles, similar to Pascal's triangle.

*Keywords:* Gelfond problem, sum of digits, Fibonacci numbers, Zeckendorf representation, Pascal triangle.

*Bibliography:* 18 titles.

**For citation:**
Shutov, A.V. 2024, "On some analogue of the Gelfond problem for Zeckendorf representations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 195–215.

## 1. Введение

Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{b(n)} n_k(n) b^k,$$

где $n_k(n) \in \{0, 1 \ldots, b-1\}$, $b(n) = \max\{k : b^k \leq n\}$ – разложение $n$ в $b$-ичной системе счисления. Пусть также

$$s_b(n) = \sum_{k=0}^{b(n)} n_k(n)$$

– сумма цифр $b$-ичного разложения $n$. Рассмотрим величину $N_{d,a}^{(b)}(X)$ – количество натуральных чисел $n$, меньших $X$, для которых $s_b(n) \equiv a \pmod d$.

А.О. Гельфонд показал [1], что при условии взаимной простоты $d$ и $b-1$ существует постоянная $\mu < 1$ (зависящая от $b$) такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(n^{\mu}).$$

В случае, когда $d$ – простое, аналогичный результат чуть ранее был получен в [2]. Данный результат означает равномерную распределенность сумм цифр $b$-ичных разложений натуральных чисел по арифметическим прогрессиям с разностью $d$ (взаимно простой с $b-1$).

Одним из возможных направлений для обобщения данного результата стало рассмотрение его аналогов для других представлений натуральных чисел. Наиболее известное из таких представлений связано с числами Фибоначчи.

Как известно, последовательность Фибоначчи задается линейным рекуррентным соотношением

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

и начальными условиями

$$F_1 = F_2 = 1.$$

В этом случае каждое натуральное число имеет единственное представление

$$n = \sum_{k=2}^{f(n)} f_k(n) F_k, \tag{1}$$

где $f_k(n) \in \{0,1\}$, $f_k(n) f_{k+1}(n) = 0$ и

$$f(n) = \max\{k : F_k \le n\}.$$

Данное представление может быть получено при помощи жадного алгоритма. Разложение (1) традиционно называется представлением Цекендорфа, в честь работы [3], хотя это разложение (как и существенно более общие) возникало еще в работе [4].

Пусть теперь

$$s_F(n) = \sum_{k=2}^{f(n)} f_k(N)$$

– сумм цифр представления Цекендорфа натурального числа $n$. Положим

$$N_{d,a}(X) = \sharp\{n \in \mathbb{N} : n < X, s_F(n) \equiv a \pmod d\}.$$

Задачу изучения данной величины можно считать аналогом задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа.

В случае $d = 2$ и $a \in \{0,1\}$ асимптотика

$$N_{2,a}(X) = \frac{X}{2} + O(\log X) \tag{2}$$

по всей видимости является фольклорной. В любом случае она немедленно следует из результатов работы [5], где также был доказан гауссов закон для остаточного члена данной асимптотики и найдено среднее значение этого остатка. Кроме того, в данной работе были получены глубокие результаты о суммах вида $\sum_{n<X, n\equiv i \pmod q} (-1)^{s_F(n)}$ (связанные с аналогом

задачи Гельфонда по модулю 2 для арифметических прогрессий), в частности, было продемонстрировано фрактальное поведение таких сумм при $q = 3$. Простое доказательство формулы (2) можно найти в [6].

В случае $d = 2$ также изучалось поведение $s_F(n) \bmod 2$ по некоторым подпоследовательностям последовательности натуральных чисел [7], [8], а также совместное распределение $s_F(n) \bmod 2$ и $s_F(n+k) \bmod 2$ [6], [9], [10].

В случае произвольного $d \geq 3$ из результатов работ [11]–[13] вытекает асимптотика

$$N_{d,a}(X) \sim \frac{X}{d}.$$

Метод данных работ не позволял дать какой-либо оценки остаточного члена данной формулы. Позднее Тусвальднер и Ламбергер [14] получили степенную оценку остаточного члена. Точнее, ими было показано, что существует значение $\mu_d < 1$, такое, что

$$N_{d,a}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu_d}).$$

Использованный в данной работе метод в принципе позволял найти некоторое значение константы $\mu_d$, однако алгоритм для этого вычисления был очень сложен и конкретные значения констант так и не были найдены. Также не было понятно, являются ли найденные оценки остаточного члена оптимальными.

В работе [15] было показано, что как минимум при $d = 3$ и $a = 0$ действительно должна иметь место степенная оценка остаточного члена. Более точно, был получен следующий результат.

Пусть $\lambda$ – максимум модулей корней уравнения $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$, $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\mu = \log_\tau \lambda$. Тогда

$$\limsup_{X\to\infty} \frac{|N_{3,0}(X) - \frac{X}{3}|}{X^\mu} > 0.$$

В данной работе мы, используя метод, отличный от [14], даем оптимальную оценку остаточного члена в проблеме Гельфонда для представления Цекендорфа.

Пусть

$$\mu_d = \log_\tau \left| \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos\frac{2\pi}{d} + i \sin\frac{2\pi}{d}} \right|. \tag{3}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого $d \geq 3$ и любого $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ имеет место асимптотическая формула*

$$N_{d,a}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu_d}). \tag{4}$$

Замечание 8. *Постоянная в $O(X^{\mu_d})$ в формуле (4) зависит от $d$.*

Теорема 2. *Для любого $d \geq 3$ и любого $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$*

$$\limsup_{X\to\infty} \frac{|N_{d,a}(X) - \frac{X}{d}|}{X^{\mu_d}} > 0. \tag{5}$$

Теорема 2 фактически означает, что оценка остаточного члена в теореме 1 не может быть улучшена.

## 2. Простейшие результаты об остаточном члене

В первую очередь заметим, что при доказательстве теорем 1 и 2 без ограничения общности можно считать, что $X$ – натуральное число и $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Также всюду далее мы предполагаем, что $d \geq 3$.

Пусть

$$\varepsilon_{d,a}(N) = \begin{cases} 1, & s_F(N) \equiv a \pmod d \\ -\frac{1}{d-1}, & s_F(N) \not\equiv a \pmod d \end{cases}.$$

Тогда справедлива явная формула для $N_{d,a}^{(\alpha)}(X)$:

$$N_{d,a}(X) = \frac{d-1}{d} \sum_{N=0}^{X-1} \left( \varepsilon_{d,a}(N) + \frac{1}{d-1} \right).$$

Поэтому для остаточного члена

$$r_{d,a}(X) = N_{d,a}(X) - \frac{X}{d}$$

справедлива явная формула

$$r_{d,a}(X) = \frac{d-1}{d} S_{d,a}(X), \tag{6}$$

где

$$S_{d,a}(X) = \sum_{N=0}^{X-1} \varepsilon_{d,a}(N).$$

Следовательно, задача изучения остаточного члена в проблеме Гельфонда для разложений Цекендорфа эквивалентна изучению сумм $S_{d,a}(X)$.

Величины $S_{d,a}(X)$ не являются независимыми.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\sum_{a=0}^{d-1} S_{d,a}(n) = 0.$$

Доказательство. Данное соотношение немедленно вытекает из определения $S_{d,a}(n)$ и равенства

$$\sum_{a=0}^{d-1} \varepsilon_{d,a}(N) = 0,$$

немедленно следующего из определения $\varepsilon_{d,a}(N)$.

Ключевым для дальнейшего будет изучение величин $S_{d,a}(X)$ в случае, когда $X$ пробегает последовательность Фибоначчи. Рассмотрим величины

$$S_{d,a}^*(n) = S_{d,a}(F_n).$$

Утверждение леммы 1 немедленно переписывается в виде

$$\sum_{a=0}^{d-1} S_{d,a}^*(n) = 0 \tag{7}$$

Рекуррентное соотношение $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для чисел Фибоначчи приводит к рекуррентным соотношениям для $S_{d,a}^*(n)$ Для их формулировки введем обозначение

$$a \ominus l = (a - l) \bmod d,$$

то есть $a \ominus l$ – единственное целое число $k$ такое, что $0 \leq k < d$ и $k \equiv a - l \pmod d$.

Лемма 2. *Для любого $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ имеет место рекуррентное соотношение*

$$S^*_{d,a}(n+1) = S^*_{d,a}(n) + S^*_{d,a\ominus 1}(n-1). \tag{8}$$

Доказательство. Согласно определению,

$$S^*_{d,a}(n+1) = \sum_{N=0}^{F_{n+1}-1} \varepsilon_{d,a}(N).$$

Заметим, что при условии $F_n \le N < F_{n+1}$ в разложении (1) выполняются равенства $f_n(N) = 1$, $f_{n-1}(N) = 0$ и $f_k(N) = f_k(N-F_n)$ для $2 \le k \le n-2$. Поэтому $s_F(N) = s_F(n-F_n)+1$ и $\varepsilon_{d,a}(N) = \varepsilon_{d,a\ominus 1}(N - F_n)$.

С учетом сказанного,

$$S^*_{d,a}(n+1) = \sum_{N=0}^{F_n-1} \varepsilon_{d,a}(N) + \sum_{N=F_n}^{F_{n+1}-1} \varepsilon_{d,a}(N) = S^*_{d,a}(n) + \sum_{N=0}^{F_{n-1}-1} \varepsilon_{d,a\ominus 1}(N) = S^*_{d,a}(n) + S^*_{d,a\ominus 1}(n-1).$$

Соотношения (7), (8) в совокупности представляют собой $d+1$ соотношение на $d$ величин $S^*_{d,a}(n)$. Эти соотношения не являются независимыми и любое из $d$ соотношений (8) может быть получено из (7) и оставшихся $d-1$ соотношений.

## 3. Рекуррентные соотношения для $S^*_{d,a}(n)$

В каждом из полученных нами соотношений (7), (8) одновременно присутствуют $S^*_{d,a}(n)$ с разными $a$. Наша следующая цель состоит в том, чтобы получить рекуррентное соотношение для $S^*_{d,a}(n)$, не включающее других значений $a$.

Вначале для каждого $l \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ выразим последовательность $S^*_{d,a\ominus l}(n)$ через элементы последовательности $S^*_{d,a}(n)$.

В первую очередь заметим, что (8) может быть переписано в виде

$$S^*_{d,a\ominus 1}(n) = S^*_{d,a}(n+2) - S^*_{d,a}(n+1). \tag{9}$$

Применяя (9) сначала для $a \ominus 1$, а затем для $a$, получаем

$$S^*_{d,a\ominus 2}(n) = S^*_{d,a\ominus 1}(n+2) - S^*_{d,a\ominus 1}(n+1) = S^*_{d,a}(n+4) - 2S^*_{d,a}(n+3) + S^*_{d,a}(n+2).$$

Продолжая этот процесс, получаем следующий результат.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$S^*_{d,a\ominus l}(n) = \sum_{t=0}^{l} b_{l,t} S^*_{d,a}(n+l+t), \tag{10}$$

*где коэффициенты $b_{l,t}$ задаются рекуррентными соотношениями*

$$b_{l+1,t} = b_{l,t-1} - b_{l,t} \tag{11}$$

*и начальными условиями*

$$\begin{gathered} b_{l,0} = (-1)^l, \\ b_{l,l} = 1 \end{gathered} \tag{12}$$

Доказательство. Соотношение (10) очевидно выполнено для $l = 0$, когда оно принимает вид $S^*_{d,a}(n) = S^*_{d,a}(n)$. Для $l = 1, 2$ данное соотношение доказано выше.

Покажем, что выполнимость (10) для всех $a$ и некоторого $l$ влечет его выполнимость для $l + 1$. Действительно, по предположению индукции можно записать

$$S^*_{d,a\ominus(l+1)}(n) = \sum_{t=0}^{l} b_{l,t} S^*_{d,a\ominus 1}(n + l + t).$$

Воспользовавшись (9), находим

$$S^*_{d,a\ominus(l+1)}(n) = \sum_{t=0}^{l} b_{l,t}(S^*_{d,a}(n + l + t + 2) - S^*_{d,a}(n + l + t + 1)).$$

Далее, раскрывая скобки и делая замену в индексе суммирования, получим

$$S^*_{d,a\ominus(l+1)}(n) = \sum_{t=1}^{l+1} b_{l,t-1} S^*_{d,a}(n + l + 1 + t) - \sum_{t=0}^{l} b_{l,t} S^*_{d,a}(n + l + 1 + t).$$

Еще раз перегруппировав слагаемые, находим

$$S^*_{d,a\ominus(l+1)}(n) = b_{l,l} S^*_{d,a}(n + 2(l + 1)) + \sum_{t=1}^{l} (b_{l,t-1} - b_{l,t}) S^*_{d,a}(n + l + 1 + t) - b_{l,0} S^*_{d,a}(n + l + 1).$$

Переписав (12) в виде

$$b_{l+1,l+1} = b_{l,l},$$
$$b_{l+1,0} = -b_{l,0}$$

и используя (11), получаем требуемый результат.

Коэффициенты $b_{l,t}$ удобно представлять в виде комбинаторного треугольника, аналогичного треугольнику Паскаля. Первые несколько строк данного треугольника выглядят следующим образом.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
-1 & 1 & & & & & \\
1 & -2 & 1 & & & & \\
-1 & 3 & -3 & 1 & & & \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & &
\end{array}$$

Далее нам потребуются биномиальные коэффициенты $\binom{l}{t} = \frac{l!}{t!(l-t)!}$.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$b_{l,t} = (-1)^{l+t} \binom{l}{t}. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим числа $b'_{l,t} = (-1)^{l+t}\binom{l}{t}$. Так как $\binom{l}{0} = \binom{l}{l} = 1$, имеем

$$b'_{l,0} = (-1)^l,$$
$$b'_{l,l} = 1.$$

Далее, из $\binom{l+1}{t} = \binom{l}{t-1} + \binom{l}{t}$, получаем

$$b'_{l+1,t} = b'_{l,t-1} - b'_{l,t}.$$

Таким образом, начальные условия и рекуррентные соотношения для $b_{l,t}$ и $b'_{l,t}$ совпадают, откуда и следует, что $b_{l,t} = b'_{l,t}$.

Таким образом, треугольник $(b_{l,t})$ является знакочередующимся вариантом треугольника Паскаля.

Теперь мы готовы получить рекуррентное соотношение для $S^*_{d,a}(n)$.

Лемма 5. *Имеет место линейное рекуррентное соотношение*

$$\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{t=0}^{l}(-1)^{l+t}\binom{l}{t}S^*_{d,a}(n+l+t)=0. \tag{14}$$

Доказательство. Для доказательства перепишем (7) в виде

$$\sum_{l=0}^{d-1}S^*_{d,a\ominus l}(n)=0,$$

подставим туда выражения для $S^*_{d,a\ominus l}(n)$ из (10) и выразим $b_{l,t}$ по формуле (13).

Как известно, для понимания асимптотики последовательности, удовлетворяющей линейному рекуррентному соотношению, необходимо знать корни ее характеристического многочлена.

## 4. Характеристический многочлен и его корни

Пусть $P_d(x)$ – характеристический многочлен линейного рекуррентного соотношения (14). Этот многочлен имеет степень $2d-2$ и может быть записан в виде

$$P_d(x)=\sum_{r=0}^{2d-2}a_{d,r}x^r,$$

где

$$a_{d,r}=(-1)^r\sum_{\substack{0\le t\le l\le d-1,\\ l+t=r}}\binom{l}{t}.$$

Последнее соотношение может быть переписано в виде одинарной суммы

$$a_{d,r}=(-1)^r\sum_{t=\max(0,r-(d-1))}^{\left[\frac{r}{2}\right]}\binom{r-t}{t}. \tag{15}$$

Из (15) и хорошо известного соотношения

$$\sum_{t=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}\binom{r-t}{t}=\binom{r}{0}+\binom{r-l}{l}+\binom{r-2}{2}+\ldots=F_{l+1}$$

вытекает, что при $r\le d-1$ для коэффициентов характеристического многочлена $P_d(x)$ справедливо равенство

$$a_{d,r}=(-1)^rF_r.$$

Кроме того, из свойств биномиальных коэффициентов можно вывести, что при $d\le r\le 2d-3$ выполняются рекуррентные соотношения

$$a_{d,r}=a_{d-1,r-2}-a_{d-1,r-1}.$$

Также

$$a_{d,2d-2} = 1.$$

Из вышеизложенного вытекает, что коэффициенты $a_{d,r}$ допускают следующую комбинаторную интерпретацию. Определим комбинаторный треугольник $(A_{dr})$ рекуррентным соотношением

$$A_{d+1,r} = A_{d,r-1} + A_{d,r}$$

и начальными условиями

$$A_{d,0} = F_{d+1},$$

$$A_{d,d} = 1.$$

Первые 6 строк данного треугольника выглядят следующим образом.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & 1 & & & \\ 3 & 4 & 3 & 1 & & \\ 5 & 7 & 7 & 4 & 1 & \\ 8 & 12 & 14 & 11 & 5 & 1 \end{array}$$

Данный треугольник изучался в [16]. Дополнительные ссылки можно найти также в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [17].

Рассмотрим также его знакочередующийся вариант $((-1)^{d+r}A_{dr})$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ 2 & -2 & 1 & & & \\ -3 & 4 & -3 & 1 & & \\ 5 & -7 & 7 & -4 & 1 & \\ -8 & 12 & -14 & 11 & -5 & 1 \end{array}$$

Тогда

$$a_{dr} = \begin{cases} (-1)^r A_{r,0}, & r \le d-1 \\ (-1)^{d+r} A_{d-1,r-(d-1)}, & d \le r \le 2d-2 \end{cases}.$$

Другими словами, коэффициенты $a_{dr}$ образуют $d$-ый по счету угол в знакочередующемся комбинаторном треугольнике $((-1)^{d+r}A_{dr})$.

Предложенная комбинаторная интерпретация коэффициентов характеристического многочлена $P_d(x)$ очень красива, но не помогает вычислить его корни. Для вычисления его корней получим другое представление характеристического многочлена.

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$P_d(x) = \frac{(-1)^{d+1}x^d(1-x)^d + 1}{x(1-x)+1}. \tag{16}$$

Доказательство. Запишем $P_d(x)$ в виде

$$P_d(x) = \sum_{r=0}^{2d-2} (-1)^r \sum_{\substack{0 \le t \le l \le d-1, \\ l+t=r}} \binom{l}{t} x^r.$$

Далее перейдем от суммирования по диагоналям треугольника $(b_{l,t})$ к суммированию по его строкам, сгруппировав члены с одинаковым $l$. Получим

$$P_d(x) = \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{t=0}^{l} (-1)^{l+t} \binom{l}{t} x^{l+t}.$$

Вынося множитель за внутренний знак суммирования и используя бином Ньютона, получаем

$$P_d(x) = \sum_{l=0}^{d-1} (-1)^l x^l \sum_{t=0}^{l} (-1)^t \binom{l}{t} x^t = \sum_{l=0}^{d-1} (-1)^l x^l (1-x)^l.$$

Суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$P_d(x) = \frac{(-1)^d x^d (1-x)^d - 1}{-x(1-x) - 1}.$$

Умножая числитель и знаменатель на -1, получаем требуемый результат.

Равенство (16) позволяет найти все корни характеристического многочлена. Пусть $\zeta_d = \cos\frac{2\pi}{d} + i\sin\frac{2\pi}{d}$ – образующая группы корней степени $d$ из единицы.

Лемма 7. *Корни $P_d(x)$ есть*

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^j},$$

$1 \le j \le d-1$.

Доказательство. Из (16) вытекает, что уравнение $P_d(x) = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} (-1)^{d+1} x^d (1-x)^d + 1 = 0 \\ x(1-x) + 1 \neq 0 \end{cases}.$$

Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2\right)^d = (-1)^d \\ x^2 - x - 1 \neq 0 \end{cases}. \tag{17}$$

При четном $d$ первое уравнение из (17) приобретает вид

$$\left(\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2\right)^d = 1$$

и его корни есть

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \zeta_d^j},$$

$0 \le j \le d-1$. При этом при $j = \frac{d}{2}$ получаем $\zeta_d^j = -1$ и соответствующие корни $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, не удовлетворяют второму условию из (17) и должны быть исключены.

Таким образом, при четном $d$ корни $P_d(x)$ есть

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \zeta_d^j},$$

$0 \le j \le d-1$, $j \neq \frac{d}{2}$. При этом при четном $d$ и $0 \le j < \frac{d}{2}$ выполняется равенство

$$\zeta^{j+\frac{d}{2}} = -\zeta^j,$$

откуда следует, что

$$\left\{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\zeta_d^j}\right\}_{0\le j\le d-1,j\ne\frac{d}{2}}=\left\{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^j}\right\}_{1\le j\le d-1}.$$

При нечетном $d$ первое уравнение из (17) приобретает вид

$$\left(\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\right)^d=-1$$

и его корни есть

$$\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^j},$$

$0\le j\le d-1$. При этом при $j=0$ получаем $\zeta_d^j=1$ и соответствующие корни $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ вновь не удовлетворяют второму условию из (17) и вновь должны быть исключены.

Рассмотрим несколько следствий о корнях характеристического многочлена.

Следствие 1. *При $d\ge 3$ $P_d(x)$ имеет хотя бы один корень, модуль которого больше 1.*

Доказательство. В силу теоремы Виета и формул для коэффициентов $P_d(x)$, произведение корней многочлена $P_d(x)$ равно единице. Поэтому достаточно показать, что $P_d(x)$ имеет хотя бы один корень, модуль которого отличен от 1.

При условии $|x|=1$ из равенства $(-1)^{d+1}x^d(1-x)^d+1=0$ вытекает, что $|1-x|=1$. Геометрически, решения системы

$$\begin{cases}|x|=1\\|1-x|=1\end{cases}$$

представляют собой точки комплексной плоскости, лежащие на пересечении двух окружностей радиуса 1 с центрами в точках 0 и 1, то есть $x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, многочлен $P_d(x)$ имеет не более двух корней, модуль которых равен 1. Поскольку при $d\ge 3$ общее число корней $2d-2\ge 4$, это доказывает требуемое утверждение.

Замечание 9. *На самом деле легко увидеть, что $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ являются корнями $P_d(x)$ тогда и только тогда, когда $d$ четное. В этом случае они соответствуют $j=0$.*

Следствие 2. *Многочлен $P_d(x)$ не имеет кратных корней.*

Доказательство. Пусть имеется два равных корня. Тогда для некоторых $0\le j_1\ne j_2\le$ $\le d-1$ выполняется одно из равенств

$$\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^{j_1}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^{j_2}}$$

или

$$\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^{j_1}}=-\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^{j_2}}.$$

Возводя в квадрат, после преобразований получаем

$$\zeta_d^{j_1}=\zeta_d^{j_2},$$

что невозможно.

Следствие 3. *Все корни многочлена $P_d(x)$ комплексные. Кроме того, для каждого корня многочлена $P_d(x)$ существует еще ровно один корень, имеющий тот же модуль.*

Доказательство. Вначале покажем, что все корни многочлена $P_d(x)$ комплексные. Действительно, из выражения для корней, полученного в лемме 7, вытекает, что для того, чтобы корень мог быть действительным, требуется, чтобы $\frac{1}{2} + \zeta_d^j$ было положительным действительным числом. Однако, в этом случае соответствующий корень был бы равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, что противоречит второму условию в (17).

Пусть $\lambda$ – некоторый комплексный корень $P_d(x)$. Тогда, поскольку все коэффициенты многочлена $P_d(x)$ действительные, его комплексно сопряженное $\overline{\lambda}$ имеет тот же модуль и также является корнем $P_d(x)$.

Остается доказать, для любого корня $\lambda_1$ у $P_d(x)$ может быть не более двух корней, модуль которых равен $|\lambda_1|$.

Если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – два корня $P_d(x)$, их условия $(-1)^{d+1}x^d(1-x)^d + 1 = 0$ вытекает, что

$$\lambda_1^d(1-\lambda_1)^d = \lambda_2^d(1-\lambda_2)^d.$$

Поэтому условие

$$|\lambda_1| = |\lambda_2|$$

влечет за собой равенство

$$|1-\lambda_1| = |1-\lambda_2|.$$

Поэтому, при фиксированном $\lambda_1$, $\lambda_2$ представляют собой точки на комплексной плоскости, являющиеся пересечением окружности с центром 0 и радиусом $|\lambda_1|$ и окружности с центром 1 и радиусом $|1-\lambda_2|$. Так как две окружности могут пересекаться не более, чем в двух точках, утверждение доказано.

Следствие 4. *Максимум модулей корней $P_d(x)$ равен*

$$\eta_d = \left| \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos\frac{2\pi}{d} + i\sin\frac{2\pi}{d}} \right|. \tag{18}$$

*Кроме того*

$$1 < \eta_d < \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение следствия.

Для $\varphi \in [0; 2\pi]$ определим функции $m^{\pm}(\varphi)$ равенствами

$$m^{\pm}(\varphi) = \left| \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (\cos\varphi + i\sin\varphi)} \right|.$$

Корни $P_d(x)$ соответствуют значениям $\varphi = \frac{2\pi j}{d}$, $1 \le j \le d-1$. Непосредственно вычисление показывает, что функция $m^+(\varphi)$ строго убывает при $\varphi \in [0;\pi]$ и строго возрастает при $\varphi \in [\pi; 2\pi]$. Соответственно максимум этой функции достигается в точках $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ и равен $\tau$. Функция $m^-(\varphi)$ строго возрастает при $\varphi \in [0;\pi]$ и строго убывает при $\varphi \in [\pi; 2\pi]$. Кроме того $m^+(\varphi) \ge m^-(\varphi)$, причем равенство достигается только при $\varphi = \pi$. Также имеется симметрия

$$m^{\pm}(2\pi - \varphi) = m^{\pm}(\varphi)$$

для $\varphi \in [0;\pi]$.

В силу сказанного, достаточно найти максимальный из корней вида $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^j}$ Для этого нужно найти значения $\varphi = \frac{2\pi j}{d}$, $1 \le j \le d-1$, наиболее близкие к точкам $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ максимума функции $m^+(\varphi)$. Такими значениями будут $\varphi = \frac{2\pi}{d}$ и $\varphi = \frac{2(d-1)\pi}{d}$, соответствующие

$j = 1$ и $j = d-1$. В силу соотношения симметрии, значения $m^+(\varphi)$ в этих точках будут равны. Выбирая $\varphi = \frac{2\pi}{d}$, получаем, что максимум модулей корней многочлена $P_d(x)$ для нечетного $d$ равен

$$m^+(\frac{2\pi}{d}) = \left|\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos\frac{2\pi}{d} + i\sin\frac{2\pi}{d}}\right| = \eta_d$$

Докажем теперь второе утверждение. Неравенство $\eta_d > 1$ вытекает из следствия 1. Обратное неравенство вытекает из того, что корни многочлена $P_d(x)$ не соответствуют точкам максимума функции $m^+(\varphi)$ и того, что максимальное значение этой функции равно $\tau$.

## 5. Явная формула для $S^*_{d,a}(n)$

С учетом того, что, согласно следствию 2, характеристический многочлен $P_d(x)$ линейной рекуррентной последовательности $S^*_{d,a}(n)$ не имеет кратных корней, из общей теории линейных рекуррентных соотношений вытекает, что

$$S^*_{d,a}(n) = \sum_{m=1}^{2d-2} c_{d,a,m}\lambda_m^n, \tag{19}$$

где $\lambda_m$, $1 \le m \le 2d-2$ – корни характеристического многочлена, а $c_{d,a,m}$ – некоторые комплексные числа.

Далее мы будем считать, что корни $P_d(x)$ упорядочены так, что

$$\lambda_{2k} = \overline{\lambda}_{2k-1}$$

при $1 \le k \le d-1$, а также

$$|\lambda_m| > |\lambda_{m+2}|$$

при $1 \le m \le 2d-4$. Возможность такого упорядочения вытекает из следствия 3.

Из теоремы Виета для $P_d(x)$ получаем, что

$$\prod_{m=1}^{2d-2} \lambda_m = 1. \tag{20}$$

Кроме того, из следствия 4 имеем

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \eta_d$$

и

$$|\lambda_m| < \eta_d$$

при $3 \le m \le 2d-2$.

Ключевым результатом данного раздела является следующая лемма.

Лемма 8. *Все коэффициенты $c_{d,a,m}$ отличны от нуля.*

Доказательство. Подстановка (9) в (19) дает равенства

$$c_{d,a\ominus 1,m} = c_{d,a,m}\lambda_m(\lambda_m - 1). \tag{21}$$

Поскольку $\lambda_m \notin \{0,1\}$, из (21) следует, что достаточно доказать лемму 8 только для одного значения $a$.

Мы будем доказывать лемму для $a = d-1$. Вычислим начальные значения $S^*_{d,d-1}(n)$.

Так как $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, получаем, что

$$S^*_{d,a}(1) = S^*_{d,a}(2) = S_{d,a}(1) = \varepsilon_{d,a}(0)$$

и

$$S^*_{d,a}(3) = S_{d,a}(2) = \varepsilon_{d,a}(0) + \varepsilon_{d,a}(1).$$

Поэтому

$$S^*_{d,a}(1) = S^*_{d,a}(2) = \begin{cases} 1, & a = 0 \\ -\frac{1}{d-1}, & a \neq 1 \end{cases}$$

и

$$S^*_{d,a}(3) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{d-1}, & a = 0, 1 \\ -\frac{2}{d-1}, & 2 \leq a \leq d-1 \end{cases}.$$

Последнее вычисление, разумеется, согласуется с (8). Пусть

$$\kappa_d(a) = \min\{n : S^*_{d,a}(n) \neq -\frac{F_n}{d-1}\}.$$

Проведенные вычисления показывают, что $\kappa_d(0) = 1$ и $\kappa_d(1) = 3$. Из (8) вытекает, что

$$\kappa_d(a+1) = \kappa_d(a) + 2.$$

Поэтому

$$\kappa_d(d-1) = 2d - 1.$$

Следовательно, при $1 \leq n \leq 2d-2$

$$S^*_{d,d-1}(n) = -\frac{F_n}{d-1}.$$

Теперь мы можем переписать (18) в виде

$$\sum_{m=1}^{2d-2} c_{d,d-1,m} \lambda_m^n = -\frac{F_n}{d-1}$$

при $1 \leq n \leq 2d-2$.

Полученные равенства можно рассматривать как систему из $2d-2$ линейных уравнений с $2d-2$ неизвестными $c_{d,d-1,m}$. Определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_{2d-2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-2} & \lambda_2^{2d-2} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-2} \end{vmatrix} = \prod_{m=1}^{2d-2} \lambda_m \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \lambda_2^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix}.$$

Применяя (20), получаем, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \lambda_2^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель есть определитель Вандермонда, поэтому

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{2d-2}) = \prod_{1 \leq m_1 < m_2 \leq 2d-2} (\lambda_{m_2} - \lambda_{m_1}).$$

Из следствия 2 немедленно вытекает, что $\Delta \neq 0$.

Согласно правилу Крамера, можем записать

$$c_{d,d-1,m} = \frac{\Delta_m}{\Delta},$$

где

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & -\frac{F_1}{d-1} & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_{m-1}^2 & -\frac{F_2}{d-1} & \lambda_{m+1}^2 & \dots & \lambda_{2d-2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-2} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-2} & -\frac{F_{2d-2}}{d-1} & \lambda_{m+1}^{2d-2} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-2} \end{vmatrix}.$$

Утверждение доказываемой леммы эквивалентно тому, что

$$\Delta_m \neq 0$$

при всех $m$. Преобразуем определитель $\Delta_m$. Вначале заметим, что

$$\Delta_m = -\frac{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}\lambda_{m+1} \dots \lambda_{2d-2}}{d-1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & F_1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & F_2 & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-3} & F_{2d-2} & \lambda_{m+1}^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix}.$$

Применяя (20), находим

$$\Delta_m = -\frac{1}{\lambda_m(d-1)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & F_1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & F_2 & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-3} & F_{2d-2} & \lambda_{m+1}^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix}.$$

Согласно формуле Бине

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n - \widetilde{\tau}^n),$$

где

$$\widetilde{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому

$$\Delta_m = -\frac{1}{\sqrt{5}\lambda_m(d-1)} \left( \tau \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & \tau & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-3} & \tau^{2d-2} & \lambda_{m+1}^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix} - \right.$$
$$\left. -\widetilde{\tau} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & \widetilde{\tau} & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-3} & \widetilde{\tau}^{2d-2} & \lambda_{m+1}^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix} \right).$$

Полученные определители вновь являются определителями Вандермонда, поэтому

$$\Delta_m = -\frac{\tau V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \tau, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2}) - \widetilde{\tau} V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \widetilde{\tau}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2})}{\sqrt{5}\lambda_m(d-1)}$$

и нам остается доказать, что

$$\tau V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \tau, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2}) \neq \widetilde{\tau} V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \widetilde{\tau}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2})$$

Применяя формулу для определителя Вандермонда и сокращая на произведения вида $\lambda_{m_1} - \lambda_{m_2}$, не содержащие $\tau$ и $\widetilde{\tau}$, получаем, что полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$\tau \prod_{\substack{1\le m'\le 2d-2,\\ m'\ne m}} (\lambda_{m'} - \tau) \ne \widetilde{\tau} \prod_{\substack{1\le m'\le 2d-2,\\ m'\ne m}} (\lambda_{m'} - \widetilde{\tau}). \tag{22}$$

Заметим, что все корни $\lambda_{m'}$, участвующие в (22), кроме одного, представлены парами вида

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^j}.$$

При этом имеет место тождество

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^j} - \tau\right)\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^j} - \tau\right) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^j} - \widetilde{\tau}\right)\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^j} - \widetilde{\tau}\right).$$

Данное равенство позволяет сократить в (22) все множители, кроме одного. В результате (22) приобретает вид

$$\tau(\lambda_{m^*} - \tau) \ne \widetilde{\tau}(\lambda_{m^*} - \widetilde{\tau})$$

для некоторого $m^* \ne m$, $1 \le m^* \le 2d-2$.

Однако единственным корнем уравнения

$$\tau(x - \tau) = \widetilde{\tau}(x - \widetilde{\tau})$$

является $x = 1$. Поскольку все корни $P_d(x)$ комплексные, 1 не является корнем $P_d(x)$, то есть $\lambda_{m^*} \ne 1$, что завершает доказательство леммы.

Отметим, что при доказательстве леммы 8 нами фактически доказано, что

$$c_{d,d-1,m} = -\frac{\tau V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \tau, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2}) - \widetilde{\tau} V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \widetilde{\tau}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2})}{\sqrt{5}\lambda_m (d-1) V(\lambda_1, \dots, \lambda_{2d-2})}.$$

Используя (21), получаем

$$c_{d,(d-1)\ominus l,m} = -\frac{\tau V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \tau, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2}) - \widetilde{\tau} V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \widetilde{\tau}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2})}{\sqrt{5}(d-1) V(\lambda_1, \dots, \lambda_{2d-2})} \times$$

$$\times \lambda_m^{l-1} (\lambda_m - 1)^l.$$

В сочетании с (19), это дает явную формулу для $S^*_{d,a}(n)$.

## 6. Доказательство теоремы 1

Нам нужно доказать формулу (4). Согласно (6), данная формула эквивалентна оценке

$$|S_{d,a}(X)| = O(X^{\mu_d}). \tag{23}$$

Вначале заметим, что из равенства (19) и неравенства треугольника вытекает, что существует $C > 0$ (возможно, зависящее от $d$) такое, что

$$|S^*_{d,a}(n)| \le C\eta_d^n. \tag{24}$$

Далее оценим $S_{d,a}(X)$ в терминах $S^*_{d,a}(X)$. Пусть

$$f(X) = \max\{k : F_k \le X\}.$$

Тогда, рассуждая аналогично доказательству леммы 2, получаем

$$S_{d,a}(X)=\sum_{N=0}^{X-1}\varepsilon_{d,a}(N)=\sum_{N=0}^{F_{f(X)}-1}\varepsilon_{d,a}(N)+\sum_{N=F_{f(X)}}^{X-1}\varepsilon_{d,a}(N)=S^*_{d,a}(f(X))+\sum_{N=0}^{X-F_{f(X)}-1}\varepsilon_{d,a\ominus 1}(N)=$$

$$=S^*_{d,a}(f(X))+S_{d,a\ominus 1}(X-F_{f(X)}).$$

Следовательно, с учетом (24),

$$|S_{d,a}(X)|\le C\eta_d^{f(X)}+|S_{d,a\ominus 1}(X-F_{f(X)})|.$$

Если представление Цекендорфа для $X$ имеет вид

$$X=\sum_{k=2}^{f(X)}f_k(X)F_k,$$

то, применяя предыдущее неравенство не более $f(X)$ раз, получим

$$|S_{d,a}(X)|\le C\sum_{k=2}^{f(X)}f_k(X)\eta_d^k.$$

Так как $f_k(X)\in\{0,1\}$, последняя оценка может быть переписана в виде

$$|S_{d,a}(X)|\le C\sum_{k=2}^{f(X)}\eta_d^k.$$

Поскольку $\eta_d>1$, суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$|S_{d,a}(X)|\le C_1\eta_d^{f(X)}. \tag{25}$$

с некоторой постоянной $C_1>0$, возможно зависящей от $d$.

Известно [18], что

$$f(X)=[\log_\tau\sqrt{5}(X+\frac{1}{2})],$$

то есть

$$f(X)<\log_\tau(X+\frac{1}{2})+C_2$$

для некоторой положительной константы $C_2$. Подставляя полученное неравенство в (25), получаем

$$|S_{d,a}(X)|=O(X^{\log_\tau\eta_d}).$$

Для доказательства (22) остается сравнить (3) с (18) и убедится, что

$$\mu_d=\log_\tau\eta_d.$$

## 7. Доказательство теоремы 2

Нам нужно доказать формулу (5). Согласно (6), данная формула эквивалентна тому, что

$$\limsup_{X\to\infty}\frac{|S_{d,a}(X)|}{X^{\mu_d}}>0. \tag{26}$$

В качестве $X$ будем выбирать числа Фибоначчи. Для доказательства (26) достаточно показать, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_{d,a}(F_n)|}{F_n^{\mu_d}}>0.$$

Так как $S^*_{d,a}(n)=S_{d,a}(F_n)$, $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n-\widetilde{\tau}^n)$ и $\mu_d=\log_\tau\eta_d$, для доказательства (26) достаточно показать, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S^*_{d,a}(n)|}{\eta_d^n}>0. \tag{27}$$

Перепишем (19) в виде

$$S^*_{d,a}(n)=c_{d,a,1}\lambda_1^n+c_{d,a,2}\overline{\lambda}_1^n+R^*_{d,a}(n),$$

где $|\lambda_1|=\eta_d$ и

$$R^*_{d,a}(n)=\sum_{m=3}^{2d-2}c_{d,a,m}\lambda_m^n=o(\eta_d^n).$$

В силу леммы 8 все $c_{d,a,m}$ отличны от нуля, поэтому выражение

$$c_{d,a,1}\lambda_1^n+c_{d,a,2}\overline{\lambda}_1^n$$

можно переписать в виде

$$c_{d,a,1}\lambda_1^n+c_{d,a,2}\overline{\lambda}_1^n=\eta_d^n(c'_1\cos n\psi+c'_2\sin n\psi)$$

для некоторого угла $\psi=\arg\lambda_1$ и действительных $c'_1$, $c'_2$ (зависящих от $d$ и $a$) таких, что $(c'_1)^2+(c'_2)^2\neq 0$.

Следовательно

$$S^*_{d,a}(n)=\eta_d^n(c'_1\cos n\psi+c'_2\sin n\psi)+o(\eta_d^n)$$

и для доказательства (27) достаточно показать, что существует некоторое $c>0$ и бесконечная последовательность $\{n_k\}$ такие, что

$$c'_1\sin n_k\psi+c'_2\cos n_k\psi>c.$$

Последнее неравенство можно свести к неравенству

$$\sin(n_k\psi+\theta)>c'>0$$

с некоторым эффективно вычислимым $\theta$ или же к

$$\sin 2\pi\left\{\frac{n_k\psi+\theta}{2\pi}\right\}>c',$$

где фигурные скобки означают дробную часть числа.

Если $\frac{\psi}{2\pi}$ – иррационально, то последовательность $\{\frac{n\psi+\theta}{2\pi}\}$ равномерно распределена по модулю 1 и можно выбрать бесконечную последовательность $\{n_k\}$ для которой $\{\frac{n\psi+\theta}{2\pi}\}\in[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$ и которая дает нам требуемый результат с $c'=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Предположим теперь, что $\frac{\psi}{2\pi}=\frac{a}{b}$ – рационально. Так как $\lambda_1$ комплексно, $\psi=\arg\lambda_1$ не может принимать значения 0 и $\pi$. Следовательно, $b\geq 3$. При этом можно выбрать $k_a$, $0\leq k_a\leq b-1$ таким образом, что $\{\frac{k_a\psi+\theta}{2\pi}\}=\{\frac{k_aa}{b}+\theta\}\in(0;\pi)$. Выбирая $n_k=kb+k_a$, получаем требуемый результат с $c'=\sin\{\frac{k_aa}{b}+\theta\}$.

## 8. Заключение

В настоящей работе изучен аналог задачи Гельфонда о распределении сумм цифр по арифметическим прогрессиям в случае, когда $b$-ичные разложения натуральных чисел заменяются их разложениями Цекендорфа по последовательности Фибоначчи. Показано, что в этом случае, как и в классическом, также имеет место равномерность распределения сумм цифр по арифметическим прогрессиям.

В случае, когда разность прогрессии $d = 2$ ранее было известно, что оценка остаточного члена рассматриваемой задачи есть $O(\log n)$. Неулучшаемость этой оценки заявлена в [5].

В случае $d \geq 3$ в настоящей работе найдена постоянная $\mu_d$ такая, что для остаточного члена имеет место оценка $O(X^{\mu_d})$. Также показано, что найденная константа $\mu_d$ является оптимальной.

Разложение Цекендорфа имеет два естественных обобщения: разложения по линейным рекуррентным последовательностям с неубывающими коэффициентами (или с коэффициентами, удовлетворяющим так называемому условию Парри) и разложение Островского по знаменателям подходящих дробей. Представляется интересным получить точные оценки остатка для аналога проблемы Гельфонда для соответствующих разложений.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica. 1968. Vol. 13(3). P. 259-265.

2. Fine N. J. The distribution of the sum of digits $\pmod p$ // Bulletin of the American Mathematical Society. 1965. Vol. 71(4). P. 651-652.

3. Zeckendorf E. Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas // Bull. Soc. R. Sci. Liege. 1972. Vol. 41. P. 179-182.

4. Ostrowski A. Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 1922. Vol. 1. P. 77-98.

5. Drmota M., Ska0142ba M. The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function // Manuscripta Mathematica. 2000. Vol. 101. P. 361–383.

6. Shutov A. V. On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers // Fibonacci Quarterly. 2020. Vol. 58(3). P. 203-207.

7. Stoll T. Combinatorial constructions for the Zeckendorf sum of digits of polynomial values // The Ramanujan Journal. 2013. Vol. 32. P. 227-243.

8. Jamet D., Popoli P., Stoll T. Maximum order complexity of the sum of digits function in Zeckendorf base and polynomial subsequences // Cryptogr. Commun. 2021. Vol. 13. P. 791–814.

9. Шутов А. В. Об одной сумме, связанной с системой счисления Фибоначчи // Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20(2). С. 271-275.

10. Жукова А. А., Шутов А. В. Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23(2). С. 88-105.

11. Coquet J., Toffin Ph. Représentations des entiers naturels et independance statistique // Bull. Sci. Math., II. Ser. 1981. Vol. 105. P. 289-298.

12. Coquet J., Rhin G., Toffin Ph. Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 // Annales de l'institut Fourier. 1981. Vol. 31(1). P. 1-15.

13. Coquet J., Rhin G., Toffin Ph. Fourier-Bohr Spectrum of Sequences Related to Continued Fractions // Journal of Number Theory. 1983. Vol.17(3). P. 327-336.

14. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca. 2003. Vol. 53(1). P. 1-20.

15. Жукова А. А., Шутов А. В. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22(2). С. 104-120.

16. Chu H. V. Partial Sums of the Fibonacci Sequence // Fibonacci Quarterly. 2021. V. 59(2). P, 132-135.

17. OEIS Foundation Inc. Entry A105809 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A105809. 2024.

18. Хонсбергер Р. Математические изючинки. М.: Наука. 1992.

## REFERENCES

1. Gelfond, A. O. 1968, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données (French)", *Acta Aithmetica*, vol. 13, no.3, pp. 259-265. (https://doi.org/10.4064/aa-13-3-259-265).

2. Fine, N. J. 1965, "The distribution of the sum of digits $\pmod p$", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 71, no. 4, pp. 651-652.

3. Zeckendorf, E. 1972, "Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas (French)", *Bull. Soc. R. Sci. Liege*, vol. 41, pp. 179-182.

4. Ostrowski, A. 1922, "Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen (German)", *Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.*, vol. 1, pp. 77-98. (https://doi.org/110.1007/BF02940581).

5. Drmota, M. & Ska0142 ba, M. 2000, "The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function", *Manuscripta Mathematica*, vol. 101, pp. 361–383. (https://doi.org/10.1007/s002290050221).

6. Shutov, A. V. 2020, "On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers", *Fibonacci Quarterly*, vol. 58, no. 3, pp. 203-207.

7. Stoll, T. 2013, "Combinatorial constructions for the Zeckendorf sum of digits of polynomial values", *The Ramanujan Journal*, vol. 32, pp. 227-243. (https://doi.org/10.1007/s11139-012-9422-6).

8. Jamet, D. & Popoli, P. & Stoll, T. 2021, "Maximum order complexity of the sum of digits function in Zeckendorf base and polynomial subsequences", *Cryptogr. Commun.*, vol. 13, pp 791–814. (https://doi.org/10.1007/s12095-021-00507-w).

9. Shutov, A. V. 2020, "On one sum associated with Fibonacci numeration system (Russian)", *Dal'nevost. Mat. Zh.*, vol. 20, no. 2, pp. 271-275. (https://doi.org/10.47910/FEMJ202028).

10. Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2022, "An analogue of Eminian's problem for the Fibonacci number system (Russian)", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 88-105. (https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-2-88-105).

11. Coquet, J., Toffin, Ph. 1981, "Représentations des entiers naturels et independance statistique (French)", *Bull. Sci. Math., II. Ser.*, vol. 105, pp. 289-298,

12. Coquet, J., Rhin, G., Toffin, Ph. 1981, "Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 (French)", *Annales de l'institut Fourier*, vol. 31, no. 1, pp. 1-15. (https://doi.org/10.5802/aif.814).

13. Coquet, J., Rhin, G., Toffin, Ph. 1983, "Fourier-Bohr Spectrum of Sequences Related to Continued Fractions", *Journal of Number Theory*, vol. 17, no. 3, pp. 327-336. (https://doi.org/10.1016/0022-314x(83)90050-1).

14. Lamberger, M. & Thuswaldner, J. W. 2003, "Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences", *Mathematica Slovaca*, vol. 53, no. 1, pp. 1-20.

15. Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2021, "On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations (Russian)", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 104-120.

16. Chu, H. V. 2021. "Partial Sums of the Fibonacci Sequence", *Fibonacci Quarterly*, vol. 59, no. 2, pp. 132-135.

17. OEIS Foundation Inc. 2024. "Entry A105809 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", *https://oeis.org/A105809*.

18. Honsberger, R. 1978, "Mathematicals morsels", *Mathematical Association of America*.

Получено: 28.08.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 531.091 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-216-227

# Вариационные задачи в работах академика О. И. Сомова. Брахистохрона и таутохрона

А.О. Юлина

**Юлина Анна Олеговна** — Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).
*e-mail: parfenova19761976@mail.ru*

**Аннотация**

В статье представлен анализ решений вариационных задач механики в работах академика О. И. Сомова (1815-1876). В 1869 году О. И. Сомов не только упрощает решение задачи Абеля, но и приводит фундаментальный вывод о расширении задачи таутохроны с поля силы тяжести на любое потенциальное поле. В статье показано, как Сомов, не используя интегралы Эйлера, находит дугу, пройденную телом в функции высоты, в том случае, когда время не зависит от высоты (таутохрона). Автор статьи подробно рассматривает, каким образом в кинематической и динамической задаче Сомов сразу же отказывается от декартовых координат, переходя на полярные координаты, избавляя читателя от бесконечных замен.

*Ключевые слова:* вариация, таутохрона, вариационная задача, задача Абеля.

*Библиография:* 7 названий.

**Для цитирования:**
Юлина, А.О. Вариационные задачи в работах академика О.И. Сомова. Брахистохрона и таутохрона // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 216–227.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 531.091 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-216-227

# Variational problems in the works of academician O. I. Somov. Brachistochrone and tautochrone

A.O. Yulina

**Yulina Anna Olegovna** — Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering; Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).
*e-mail: parfenova19761976@mail.ru*

**Abstract**

The article presents an analysis of solutions to variational problems of mechanics in the works of Academician O.I. Somov (1815-1876). In 1869 O.I. Somov not only simplifies the solution to Abel's problem, but also gives a fundamental conclusion about extending the tautochrone problem from the gravity field to any potential field. The article shows how Somov, without using Euler integrals, finds the arc traversed by a body as a function of height, in the case when time does not depend on height (tautochrone). The author of the article examines in detail how, in a kinematic and dynamic problem, Somov immediately abandons Cartesian coordinates, switching to polar coordinates, saving the reader from endless substitutions.

*Keywords:* Variation, tautochrone, variational problem, Abel problem.

*Bibliography:* 7 titles.

**For citation:**
Yulina, A.O. 2024, "Variational problems in the works of academician O.I. Somov. Brachistochrone and tautochrone" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 216–227.

## 1. Введение

Для исследования кинематических задач Сомов дает формулу для дифференцирования геометрического произведения, аналогичную с формулой Лейбница для дифференцирования алгебраического произведения, распространяет правила умножения двух алгебраических сумм на геометрические суммы, определяет способы выражения геометрическими производными какой-либо переменной прямолинейной длины при помощи скорости и ускорения крайних точек, использует геометрическое дифференцирование по разным переменным и некоторые предложения, относящиеся к геометрическим вариациям.

Методы геометрического дифференцирования в механике О.И. Сомова представляют собой обобщенные методы дифференциального исчисления, с помощью которых он решает вопросы о скоростях и ускорениях в движении точки.

## 2. Брахистохрона

Практическое использование геометрического варьирования О.И. Сомов показывает на примере следующей задачи.

«Брахистохрона. Пусть будет точка $M(x, y)$, отнесенная к прямоугольным осям $Ox$ и $Oy$ и движущаяся в плоскости этих осей таким образом, что при всякой ее траектории движения скорость движения $v$ есть данная функция $f(x)$ абсциссы.

Спрашивается: по какой кривой точка должна двигаться от $A$ до $B$, чтобы пройти пространство $AB$ в кратчайшее время.

Кривая, имеющая такое свойство, называется брахистохроною.»[2]

Рассмотрим решение автора.

### 2.1. Кинематика задачи

Предположим, что $AMB$ есть искомая брахистохрона, $A\mu B$ ее вариационное перемещение; причем $M\mu$ есть вариационное перемещение, которое получит точка $M$, если изменится только ордината $y$, т.е. если $x$ останется постоянным, следовательно $M\mu = \delta y$ (рис.1).

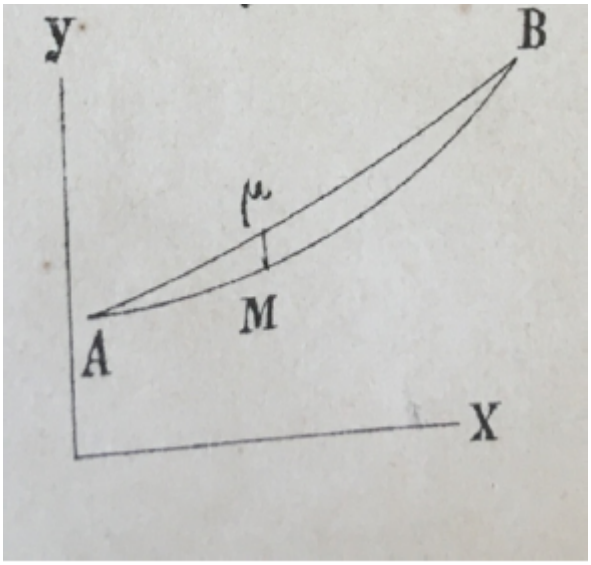



Рис. 1

Геометрической функцией Сомов называет всякую прямую линию, изменяющую непрерывно со временем свою длину и направление, или только длину, или только направление.

Способ, по которому изменяется длина и направление геометрической функции, зависит от движения ее начала и конца. Скорость движения точки $M$ - геометрическая производная функции первого порядка.

Перемещение $M\mu = \delta y$ есть геометрическая функция переменной $x$, сохраняющая свое направление, параллельное оси $Oy$; поэтому ее геометрическая производная по $x$ есть $\frac{d\delta y}{dx}$. Она геометрически равна геометрической вариации скорости $\frac{ds}{dx}$, с которой точка $M$ будет двигаться по линии $AB$, если время движения равно $x$. Следовательно проекция $\frac{d\delta y}{dx}$ на $ds$, проведенная по касательной в точке $M$ к кривой $AMB$, равна $\delta\frac{ds}{dx}$. Так как косинус угла этой касательной с осью $Oy$ есть $\frac{dy}{ds}$, то

$$\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{ds} = \delta\frac{ds}{dx}.$$

Время $t$ есть некоторая функция $x$, поэтому $\frac{ds}{dx} = v\cdot\frac{dt}{dx}$. По условию задачи $v = F(x)$. Следовательно

$$\delta\frac{ds}{dx} = \delta\big[F(x)\cdot\frac{dt}{dx}\big] = F(x)\cdot\delta\frac{dv}{dx} = F(x)\frac{d\delta t}{dx}$$

и

$$\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{ds} = F(x)\cdot\frac{d\delta t}{dx};$$

отсюда Сомов делает вывод

$$\frac{d\delta t}{dx}\cdot dx = \frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot dx = d\big(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\cdot\delta y\big) - d\big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\big)\cdot\delta y.$$

Интегрируя это выражение в пределах от $a$ до $b$ (значения координаты $x$ в точках $A$ и $B$), получим

$$dt = \Big|_a^b \big(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\big)\cdot\delta y - \int_a^b d\big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\big)\cdot\delta y \tag{1}$$

Так как при $x = a$ и $x = b$ $\delta y = 0$, разность значений $\Big|_a^b \big(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\big)\cdot\delta y = 0$. Учитывая это, выражение (1) будет иметь вид:

$$\delta t = -\int_a^b d\big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\big)\cdot\delta y \tag{2}$$

По условию, время прохождения $t$ траектории $AMB$ должно быть минимально, тогда будем иметь $\delta t = 0$ и следовательно:

$$\delta t = \int_a^b d\big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\big)\cdot\delta y \tag{3}$$

Для этого необходимо, чтобы при всяком $x$ из $[a, b]$

$$d\big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\big) = 0 \tag{4}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds} = \mathrm{c} \tag{5}$$

где $c$ - постоянная величина. Уравнение (5) показывает замечательное свойство *брахистохроны: отношение скорости движения к косинусу угла, ею составляемого с осью $Oy$, постоянно.*

Теперь (5) запишем иначе:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = cF(x);$$

Отсюда выразим:

$$\mathrm{y}' = \frac{cF(x)}{\sqrt{1-c^2F^2(x)}}$$

И получим **уравнение брахистохроны:**

$$y = c\int_a^x \frac{F(x)dx}{\sqrt{1-c^2F^2(x)}} + a' \tag{7}$$

где $a'$ - ордината точки $A$.

### 2.2. Динамика задачи

Движение точки происходит без сопротивления (в том числе и трения), под действием только силы тяжести, которая направлена параллельно $Ox$. Тогда, записывая основной закон динамики в проекциях на оси естественного трехгранника, а именно на касательную, будем иметь:

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Здесь $\frac{dx}{ds}$ - косинус угла между линией действия силы тяжести и касательной. О.И. Сомов решает полученное дифференциальное уравнение с учетом нулевой начальной скорости (скорость в точке $A$):

$$vdv = gdx \Rightarrow v^2 = 2g(x-a) \Rightarrow F(x) = \sqrt{2g(x-a)}.$$

Тогда по формуле (6) уравнение брахистохроны: $y = c\int\limits_a^x \frac{\sqrt{2g(x-a)}}{\sqrt{1-2c^2g(x-a)}} \cdot dx + a'$.

Для удобства, Сомов объединяет константы - $2r = \frac{1}{2c^2g}$ и, после интегрирования, получает:

$$y = r\arccos\left(\frac{r-x+a}{r}\right) - \sqrt{r^2-(r-x+a)^2} + a' \tag{6}$$

Это уравнение циклоиды. Для записи замечательной кривой в каноническом виде, Сомов переносит начало координат в точку $A$, вводит новые координаты $(\xi, \eta)$, выполняет замену переменных $\arccos(\frac{r-x+a}{r}) = \omega$.

$$\xi = r(1-\cos\omega), \eta = r(\omega - \sin\omega)$$

### 2.3. Вариационное исследование

Таким образом, время движения по линии $AB$ определяется следующим образом:

$$t = \int\limits_a^b \frac{ds}{v} = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{F(x)} = \int\limits_a^b \frac{dx}{F(x)\sqrt{1-c^2F^2(x)}}$$

и для рассматриваемого частного случая $F(x) = \sqrt{2g(x-a)}$,

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\arccos(\frac{r-b+a}{r}).$$

Далее, О.И. Сомов доказывает, что это время будет минимально, так как вариация второго порядка $\delta^2 t$ всегда положительна. Представим его выводы. Из формулы (1) следует:

$$\delta^2 t = \delta\Big|_a^b (\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}) \cdot \delta y - \int\limits_a^b \delta[d(\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds}) \cdot \delta y],$$

где при $x = a$ и $x = b$, $\delta y = 0, \delta^2 y = 0$, вариация $\delta\Big|_a^b (\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}) \cdot \delta y = 0$, выражение под знаком интеграла приводится к

$$\delta d\left(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\right)\delta y + d\left(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\right)\delta^2 y.$$

В последнем выражении, в силу уравнения (4), первый член исчезает, а второй может быть записан в виде:

$$d\delta\left(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)\delta y = d\left(\frac{\delta y'}{F(x)(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\delta y.$$

Следовательно

$$\delta^2 t = -\int\limits_a^b d\left(\frac{\delta y'}{F(x)(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\delta y.$$

Интегрируя по частям и, замечая, что часть, относящаяся к пределам интеграла, равна нулю (выше показано дважды), окончательно получим:

$$\delta^2 t = \int\limits_a^b \frac{\delta y'}{F(x)(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int\limits_a^b \frac{dt}{dx}\cdot\left(\frac{\delta y'}{1+(y')^2}\right)^2 dx.$$

Все элементы этого интеграла положительны, а значит $\delta^2 t > 0$; потому указанное время $t$ имеет минимальное значение.

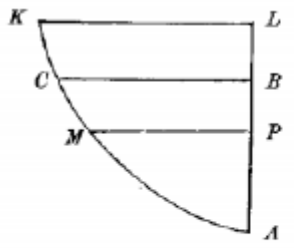
## 3. Таутохрона

Все задачи динамики Леонард Эйлер разделил на два класса: прямая задача и обратная. Прямая (или первая) задача состоит в нахождении силовых характеристик при заданных параметрах движения (уравнение движения, скорости, ускорения). Обратная (или вторая) задача определяет соответственно кинематику движения (траекторию, уравнения движения, скорость точки) при заданных силах, которые в общем случае могут зависеть от скорости, времени или положения точки. Математически прямая задача сводится к операции дифференцирования, а обратная к интегрированию. Практически все инженерные проблемы относятся именно к обратным задачам динамики. Ожидаемое уравнение движения является решением дифференциального уравнения. Таким образом, Эйлер дал инженерам общий алгоритм, который с успехом применяется до сих пор.

Далее мы расскажем о задаче, которая позволяет избежать составления дифференциального уравнения и иллюстрирует еще одно вариационное свойство циклоиды - таутохронность.

В 1823 году Н.Х. Абель [5] поставил следующую задачу:
«Предположим, что $CB$ — горизонтальная линия, $A$ — заданное значение, $AB$ перпендикулярна $BC$, $AM$ кривая с прямоугольными координатами $AP = x, PM = y$. Более того $AB = x, AM = s$.

Определить кривую, расположенную в вертикальной плоскости и обладающую тем свойством, что тяжелая материальная точка, падающая по этой кривой, будучи выпущенная без начальной скорости из любой точки кривой $M$ на высоте $a$ над самой низкой точкой кривой $A$, приходит в точку $A$ в течении времени $T$, которое есть данная функция высоты $\psi a$» (рис.2).



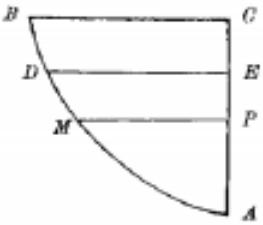

Soit $CB$ une ligne horizontale, $A$ un point donné, $AB$ perpendiculaire à $BC$, $AM$ une courbe dont les coordonnées rectangulaires sont $AP = x$, $PM = y$. Soit de plus $AB = a$, $AM = s$. Si l'on conçoit maintenant qu'un corps se meut sur l'arc $CA$, la vitesse initiale étant nulle, le temps $T$ qu'il emploie pour le parcourir dépendra de la forme de la courbe, et de $a$. Il s'agit de déterminer la courbe $KCA$ pour que le temps $T$ soit égal à une fonction donnée de $a$, p. ex. $\psi a$.

Рис. 2

Для решения этой задачи Абель получает интегральное уравнение:

$$\tau = \psi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

В 1826 году Абель возвращается к этой задаче (рис.3), решение полученного интегрального уравнения получает с помощью Эйлеровых подстановок (гамма функций)[6].




Soit $BDMA$ une courbe quelconque. Soit $BC$ une droite horizontale et $CA$ une droite verticale. Supposons qu'un point sollicité par la pesanteur se meuve sur la courbe, un point quelconque $D$ étant son point de départ. Soit $\tau$ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné $A$, et soit $a$ la hauteur $EA$. La quantité $\tau$ sera une certaine fonction de $a$, qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment, à l'aide d'une intégrale définie, on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle $\tau$ est une fonction continue donnée de $a$.

Soit $AM = s$, $AP = x$, et soit $t$ le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc $DM$. D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{ds}{dt} = \sqrt{a-x}$, donc $dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$. Il s'ensuit, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

$\int_\alpha^\beta$ désignant que les limites de l'intégrale sont $x = \alpha$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi a$$

Рис. 3

Подробный разбор и перевод статей Абеля 1823 и 1826 годов содержится в работах[5,6]. Отметим только важные для дальнейшего изложения выводы:

1. Абель первый вышел на интегральные уравнения.

2. Как частный случай рассмотрел задачу таутохроны: время не зависит от высоты.

3. Решение такого интегрального уравнения в общем случае имеет следующие сложности:

• Много замен переменных, как в пределах интегрирования, так и в подынтегральных функциях (Эйлеровы подстановки).

• Частые и скрытые переходы от прямоугольных координат к криволинейным координатам.

• Избегая дифференциального уравнения в явном виде, необходимо распознать скрытое дифференцирование под знаком интеграла, являющегося, строго говоря, несобственным интегралом, т.е. быстро проверить его на сходимость.

### 3.1. Таутохрона О.И. Сомова

В 1869 году петербургский академик О.И. Сомов (1815-1876) не только упрощает решение Абеля, но и приводит фундаментальный вывод о расширении задачи таутохроны с поля силы тяжести на любое потенциальное поле.

Приведем анализ работы Сомова «О решении одного вопроса из механики, предложенного Абелем».[7] Для нахождения дуги, пройденной телом, в функции высоты, в том случае, когда время не зависит от высоты (таутохрона), Сомов не использует интегралы Эйлера. Он получает пройденную дугу с помощью простого преобразования переменных в двойном интеграле. В кинематической и динамической задаче он сразу же отказывается от декартовых координат, переходя на полярные координаты, избавляя читателя от бесконечных замен. После того, как Сомов приходит к результату Абеля, он показывает, что результаты Абеля можно применить к решению более общей задачи: «Найти кривую, описываемую точкой на поверхности какого ни есть вида, при действии на эту точку, силы, имеющей какой-нибудь потенциал, зная как выражается время движения в функции потенциала» [7]. Эта новаторская постановка задачи таутохроны на языке теории поля и ее решении с помощью элементов поля так и осталась не замеченной современниками! Перескажем это блестящее решение О.И. Сомова.

**I.** Определение дуги, пройденной телом, в функции высоты (рис.4).

« Пусть $A$ означает начальное положение тела, $AB$ его траекторию, $M$ его положение в момент $t$, $B$ положение в момент $\tau$, $BD = x$ разность высот точек $M$ и $B$, $BC = a$ разность высот точек $A$ и $B$, $g$ тяжесть, и $s$ дугу $BM$.»

На основании теоремы об изменении кинетической энергии («по началу живых сил»), Сомов О.И. записывает:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(a-x)}.$$

Откуда получает:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

Далее записывает дугу $s$ с помощью уравнения траектории, как некоторую неизвестную функцию $f(x)$: $s = f(x)$ и получает дифференциал дуги $ds = f'(x)dx$. После интегрирования $\int\limits_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$ предполагает получить функцию $a$. Обозначает эту функцию через $\varphi(a)$ и получает уравнение:

$$\int\limits_0^a \frac{f'(x)dx}{\sqrt{a-x}} = \varphi(a), \tag{1}$$

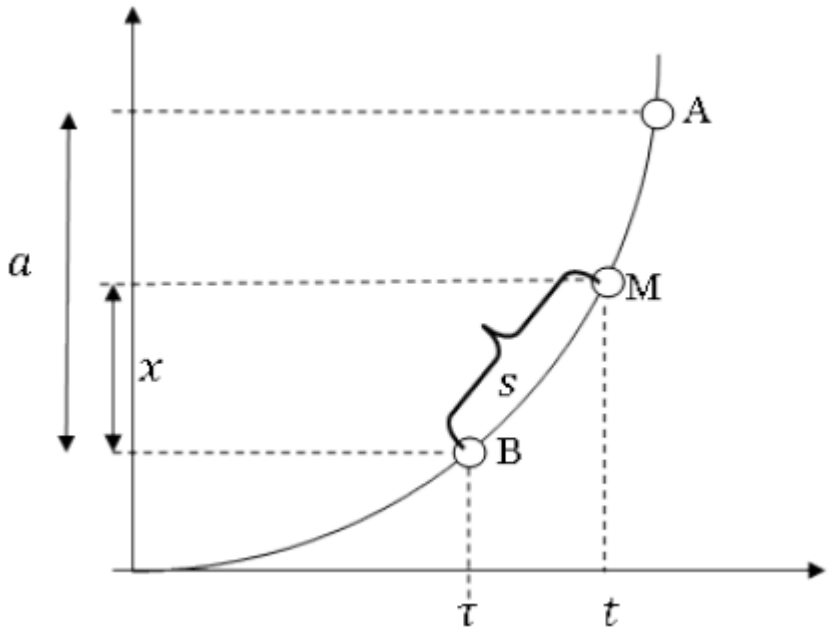



Рис. 4

из которого необходимо вывести $f(x)$.
Решает это уравнение следующим образом.

1. «Положим, что $x = a\sin^2\theta$, дабы освободить формулу которую следует интегрировать от радикала $\sqrt{a-x}$, и чтобы дать интегралу пределы, независимые от $a$». После этой подстановки, уравнение (1) принимает вид:

$$2\int_0^{\pi/2} f'(a\sin^2\theta)\sqrt{a}\sin\theta d\theta = \varphi(a). \tag{2}$$

2. Умножает обе части (2) на $\dfrac{da}{\sqrt{x-a}}$ и интегрируя от 0 до $x$, находит:

$$2\int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}}\int_0^{\pi/2} f'(a\sin^2\theta)\sqrt{a}\sin\theta d\theta = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}} \tag{3}$$

3. Вводит полярные координаты точки $(r = \sqrt{a}, \theta)$. Тогда левая часть уравнения (3) представляет собой двойной интеграл, определяющий площадь круга, описанного радиусом $\sqrt{x}$. Учитывая это, уравнение (3) запишется следующим образом:

$$4\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{\pi/2} \frac{f'(r^2\sin^2\theta)r\sin\theta r dr d\theta}{\sqrt{x-r^2}} = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}} \tag{4}$$

4. Переходит от полярных координат к прямоугольным:

$$\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta.$$

Тогда левая часть уравнения (4) преобразуется в:

$$4\int\int \frac{f'(\eta)^2\eta d\eta d\xi}{\sqrt{x-\xi^2-\eta^2}},$$

где интеграл относительно $x$ Сомов О.И. берет в пределах от 0 до $\sqrt{x-\eta^2}$, а интеграл относительно $\eta$ от 0 до $\sqrt{x}$.

Первое интегрирование:

$$\int_0^{\sqrt{x-\eta^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi^2-\eta^2}} = \arcsin(\frac{\xi}{\sqrt{x-\eta^2}})\Big|_0^{\sqrt{x-\eta^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Второе интегрирование:

$$\pi\int_0^{\sqrt{x}} f'(\eta^2)2\eta d\eta = \pi f(x).$$

5. Таким образом, уравнение (4) Сомов О.И. приводит к следующему:

$$\pi f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}, \Rightarrow S = f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}.$$

Дуга, пройденная точкой, в функции высоты Сомовым О.И. найдена в таком же виде как и у Н.Х. Абеля.

**II.** После того, как Сомов приходит к результату Абеля, он показывает, что результаты Абеля можно применить к решению более общей задачи:

«Найти кривую, описываемую точкой на поверхности какого ни есть вида, при действии на эту точку, силы, имеющей какой-нибудь потенциал, зная как выражается время движения в функции потенциала».

Представим себе точку, на которую действует сила, имеющая потенциал $u$, под действием которой точка движется по данной поверхности. Уравнение поверхности в обобщенных координатах $q_1, q_2, q_3$ имеет вид:

$$F(q_1, q_2, q_3) = 0.$$

Это уравнение и другое неизвестное определяют траекторию точки. Если к этому уравнению добавить выражение потенциала как функции координат $q_1, q_2, q_3$ , то получим зависимость дуги $s$ траектории от потенциала.

Сомов берет начало дуги $s$ таким образом, чтобы при увеличении времени значение дуги уменьшалось. Тогда, по началу живых сил (теорема об изменении кинетической энергии), он получает:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2u-2u_0},$$

Начальная скорость точки равна нулю, а $u_0$ - потенциал, соответствующий начальному положению точки. Из этого уравнения Сомов получает:

$$\tau = -\int_{u_0}^{u} \frac{\frac{ds}{du}\cdot du}{\sqrt{2u-2u_0}}.$$

Здесь $\tau$ это время движения по дуге $s$, ограниченной поверхностями уровня $u_0$ и $u_1$. Далее автор выполняет замену переменных: $u_1 - u_0 = a, u - u_0 = a - x$, и тогда значение времени $\tau$:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{\frac{ds}{dx} \cdot dx}{\sqrt{a-x}}.$$

Если эта величина $\tau$ приводится к заданной функции $\Phi(u_1)$ потенциала $u_1$(по условию задачи), то по формуле $s = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}$, где $\varphi(a) = \sqrt{2}\Phi(u_1) = \sqrt{2}\Phi(u_0+a)$ зависимость дуги траектории от потенциала Сомов О.И. представляет в следующем виде:

$$S = \sqrt{2} \int_0^u \frac{\Phi(u_1)du_1}{\sqrt{u-u_1}}.$$

Если траекторией движения является таутохрона , то для $\sqrt{2}\Phi(u_1)$ Сомов получает постоянную величину, которую обозначает через $A$.

Окончательно, пройденная дуга в таутохронной задаче может быть выражена через разность потенциалов следующим образом:

$$S = A \int_0^u \frac{du_1}{\sqrt{u-u_1}} = 2A\sqrt{u-u_0}.$$

## 4. Заключение

Таким образом, Сомов поставил и решил более общую задачу более лаконичным способом. При этом задачу о движении точки в поле силы тяжести О. И. Сомов впервые обобщил на случай движения точки по произвольной поверхности в любом потенциальном поле.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юлина А.О. Таутохрона О.И. Сомова // История и педагогика естествознания. 2023. № 2. С. 41–44.

2. Сомов О.И. Рациональная механика // Кинематика. С.-Петербург. Типография Императорской академии наук. 1872. 491 С.

3. Юлина А.О. Механика О.И. Сомова // История науки и техники. 2023. № 2. С. 3-7.

4. Юлина А.О. Векторное исчисление в механике Сомова // История науки и техники. 2023. № 3. С. 26-33.

5. Abel N.H. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies // Oplösning af et Par Opgaver ved. Hjelp af bestemte Integraler. 1823. pp. 11–27.

6. Abel N.H. Rèsolution D'un Problème de mecanique // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1826. S. 97-101.

7. Сомов О.И. О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем // Записки Императорской академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской академии наук. Т. 9, кн. 1. 1866 г. Раздельная пагинация.

## REFERENCES

1. Yulina, A.O. 2023, "O.I. Somov's tautochrona ", *History and pedagogy of natural science*, № 2, pp. 41–44.

2. Somov, O.I. 1872, "Rational mechanics", *Kinematics. St. Petersburg. Printing house of the Imperial Academy of Sciences.*, 491 p.

3. Yulina, A.O. 2023, "O.I. Somov's Mechanics", *History of science and technology*, № 2, pp. 3–7.

4. Yulina, A.O. 2023, "Vector calculus in Somov's mechanics", *History of science and technology*, № 3, pp. 26–33.

5. Abel, N.H. 1823, "Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies", *Oplösning af et Par Opgaver ved. Hjelp af bestemte Integraler*, 1823. p. 11–27.

6. Abel, N.H. 1826, "Rèsolution D'un Problème de mecanique", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, pp. 97–101.

7. Somov, O.I. 1866, "On the solution of a problem in mechanics proposed by Abel", *Notes of the Imperial Academy of Sciences. St. Petersburg: Printing house of the Imperial Academy of Sciences*, Vol. 9, book 1, Separate pagination.

Получено: 12.05.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 511.524 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-228-236

# Топологические основы динамики нарушения трехмерной симметрии для абелевых и неабелевых моделей Хиггса

Э. Альмухур, А. Адайлех, Т. Саса, А. Аль-Нана

**Альмухур Эман** — Частный университет прикладных наук (г. Амман, Иордания).
*e-mail: e_ almuhur@asu.edu.jo*
**Адайлех Абир** — Частный университет прикладных наук (г. Амман, Иордания).
*e-mail: e_ almuhur@asu.edu.jo*
**Саса Тала** — Частный университет прикладных наук (г. Амман, Иордания).
*e-mail: e_ almuhur@asu.edu.jo*
**Аль-Нана Абир** — Университет принца Саттама бин Абдулазиза (г. Альхардж, Саудовская Аравия)..
*e-mail: e_ almuhur@asu.edu.jo*

**Аннотация**

Мы рассматриваем роль, которую геометрические и топологические концепции сыграли в недавнем развитии теоретической физики, особенно в области теории суперструн и неабелевых калибровочных теорий. Мы также демонстрируем важность этих концепций для лучшего понимания динамических законов физики. В данной работе мы представляем численное исследование динамики трехмерного нарушения симметрии для неабелевых и абелевых моделей Хиггса. Нетривиальная топология многообразия конфигураций вакуумного поля является источником топологических возбуждений в абелевой модели Хиггса и в других теоретико-полевых моделях, которые будут обсуждаться далее. В трехмерных многокомпонентных решетчатых абелево-хиггсовских (LAH) моделях, минимально связанных с некомпактным абелевым калибровочным полем, мы изучаем топологические фазовые изменения, происходящие в этих моделях.

*Ключевые слова:* абелевы модели Хиггса, топологические деконфинитивные переходы, гомотопия.

*Библиография:* 16 названий.

**Для цитирования:**
Альмухур, Э., Адайлех, А., Саса, Т., Аль-Нана, А. Топологические основы динамики нарушения трехмерной симметрии для абелевых и неабелевых моделей Хиггса // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, С. 228–236.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 511.524 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-228-236

# Topological foundations of three-dimensional symmetry breaking dynamics for both Abelian and non-abelian Higgs models

E. Almukhur, A. Adaileh, T. Sasa, A. Al-Nana

**Almukhur Eman** — Applied Science Private University (Amman, Jordan).
*e-mail: e_ almuhur@asu.edu.jo*
**Adaileh Abeer** — Applied Science Private University (Amman, Jordan).
*e-mail: e_ almuhur@asu.edu.jo*
**Sasa Tala** — Applied Science Private University (Amman, Jordan).
*e-mail: e_ almuhur@asu.edu.jo*
**Al-Nana Abeer** — Prince Sattam Bin Abdulaziz University (Alkharj, Saudi Arabia).
*e-mail: e_ almuhur@asu.edu.jo*

**Abstract**

We examine the role that geometrical and topological concepts have played in the recent development of theoretical physics, particularly in the areas of superstring theory and non-Abelian gauge theories. We also demonstrate the importance of these concepts for a better comprehension of the physics' dynamical laws. In this paper, we present a numerical study of the three-dimensional symmetry breaking dynamics for both non-abelian and abelian Higgs models. The non-trivial topology of the manifold of vacuum field configurations is the source of the topological excitations in the abelian Higgs model and in the other field theoretic models that will be discussed. In three-dimensional multicomponent lattice Abelian-Higgs (LAH) models minimally connected to a noncompact Abelian gauge field, we study the topological phase changes that occur in these models.

*Keywords:* Abelian Higgs models, Topological Deconfinement Transitions, Homotopy.

*Bibliography:* 16 titles.

**For citation:**
Almukhur, E., Adaileh, A., Sasa, T., Al-Nana, A. 2024, "Topological foundations of three-dimensional symmetry breaking dynamics for both abelian and non-abelian Higgs models" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 228–236.

## 1. Introduction

The first ten years of the twentieth century saw the development of two of theoretical physics' most revolutionary theories: general relativity and quantum field theory. The seemingly complete description of our universe in a simple Euclidean geometrical framework provided by the classical field theories was drastically altered: Riemannian geometry took the role of Euclidean geometry, and the classical field theories had to be quantized.

These ideas led to the development of the modern theories of elementary particles and gravitation, which physicists believe better capture nature than any earlier theory. Although both theories have an exceptionally high number of accurate predictions, they also have an exceptionally high number of errors. The standard model of elementary particles is described within the framework

of quantum field theory. To construct a quantum field theory, we first need to quantize a classical field theory. Because of divergences in the quantized theory computations, we need to establish renormalizability and use a regularization procedure before computing the physical properties of the theory.

It is clear that these actions are not independent of one another and that each one needs to be done properly. Furthermore, the compatibility of general relativity with the conventional model of elementary particles remains somewhat unclear. This is a difficult task to address, as both theories are expressed in very different mathematical languages. Considerable progress has been made in addressing these issues since the 1970s. Interestingly, several of these contributions involve topological structures, highlighting topology's current importance in theoretical physics.

## 2. Geometrization of theoretical physics: from geometric quantum theories to Cartan's theory of gravitation

This expository article aims to analyze some of the most significant mathematical developments and the conceptual significance of the geometrization of theoretical physics, from the work of Cartan and Weyl to the more recent non-Abelian gauge theories. Consider, for example, the quantization of a gauge field theory. To quantize such a theory, one selects a particular gauge so as to exclude extra degrees of freedom. The gauge invariance's symmetry property is lost in the process. Since the words that occur in the renormalized theory must be limited by gauge invariance, this has disastrous consequences for the renormalizability proof. Algebraic geometry concepts are used by BRST quantization to tackle this problem. In general, the BRST formalism provides an elegant foundation to work with constrained systems, like those seen in general relativity or string theories. We can request the symmetries that the quantum field theory inherits from the classical theory once the theory has been quantized.Our reflections begin with the question of how to characterize space's properties at the quantum level of physics, including group structures, symmetries, algebraic and topological invariants, and symmetry breaking. Generally speaking, we will attempt to draw attention to a few noteworthy features of the mathematical advancements spurred by efforts to resolve one of the main issues in theoretical physics during the 20th century: the integration of general relativity and quantum field theory into a single, comprehensive theoretical explanation of the physical universe. How to ascertain the topological (global) structure of the universe and the physical parameters of its early formation is another point, which is probably closely related to the previous one. Lastly, we aim to summarize a few theoretical observations that brought up the current advances in theoretical physics related to the aforementioned queries.

Remarkably, one finds difficulties in formulating quantized gauge theories when gauge fields couple to the two fermion chiral components differently, the so-called chiral anomalies. The difficulties in regularizing such chiral gauge theories without violating chiral symmetry are connected to this puzzle. Anomalies cannot exist in physical theories in terms of local symmetries.This is crucial because it constrains the couplings and particle composition of the standard model, whose electroweak sector is a chiral gauge theory. Because exact chiral symmetry could not be realized on the lattice, anomaly discussions were limited to perturbation theory until recently [1]. One may have been concerned about problems with anomaly cancelations that extended beyond perturbation theory.

This issue also precluded a numerical examination of relevant quantum field theories. Recently, it was discovered that new lattice regularization schemes, known as domain wall, overlap, and perfect action fermions, or more broadly, Ginsparg-Wilson fermions, are consistent with a generalized form of chiral symmetry.

In a fragment [2] that was published in 1833, C. F. Gauß describes a deep topological discovery that he made while looking into a physical issue. He considers the work $W_n$ done by moving a

magnetic monopole with a magnetic charge of g along a closed channel $C_1$, in the magnetic field $B$ created by a current $I$ flowing over a closed loop $C_2$. The Biot-Savart law provides $W_n$ as follows:

$W_n = gintB(x_1)dx_1 = \frac{4\pi g}{c} I.lk\{C_1, C_2\}$.....(1)

where $lk\{C_1, C_2\} = \frac{1}{4\pi} intint \frac{(x_2 - x_1)}{|x_2 - x_1|^3} dx_1 dx_2$

Gauß came to the realization that $W_n$ is independent of both the closed path $C_1$ and the geometric details of the current carrying loop $C_2$.

The value of the Linking Number, $lk\{C_1, C_2\}$, remains constant when these curves are continuously deformed. This quantity can be described by an invariant of topology. The loop $C_1$'s (signed) total number of crossings of each specific (oriented) surface in $\mathbb{R}^3$, whose edge is the loop $C_2$ [3] and [4], is represented by an integer.

Since Leibniz proposed "another analysis, purely geometric or linear which also defines the position (situs), as algebra defines magnitude"in 1679, Gauß bemoans the lack of progress made in topology ("Geometria Situs"). Leibniz also thought of applying this new branch of mathematics to the field of physics. However, he was unable to win over physicist Christiaan Huygens to his point of view regarding topology. Topological arguments entered the field of physics with the development of the Helmholtz laws of vortex motion (1858) and the Kelvin circulation theorem (1869).

P. Tait's taxonomy of knots and links resulted from these attempts, despite the fact that it was the first of many subsequent topological attempts to explain the fundamentals of fundamental physics having to fail [5]. These days, topological methods are widely applied in physics to examine system properties. Topological foundations underlie the Aharonov-Bohm effect, Berry's phase, stability of defects in condensed matter systems, quantum liquids, and cosmology.

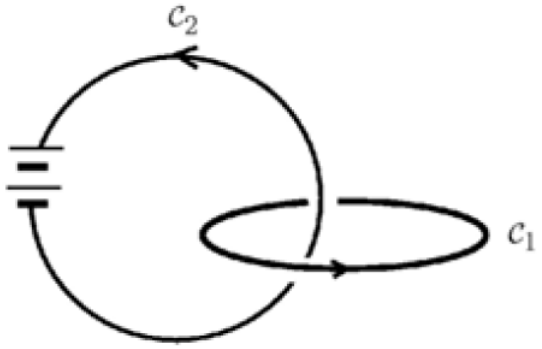



Рис.1

By their very nature, topological approaches are insensitive to details of the systems under study. Because of this, their application frequently reveals unexpected connections between events that seem remarkably different at first glance.

This common ground in the theoretical description holds true for both more visible topological phenomena, such as vortices, which are present in physics on almost all sizes, and less tangible concepts. For instance, the topological charge in gauge theories is closely associated with the topological invariant inviscid fluids known as "Helicity,"which was discovered in 1969 [6].

Some gauge theory flaws are closely related to defects in necematic liquid crystals. Field theoretic investigations did not commonly employ topological methods until the development of non-abelian gauge theories [7], which are replete with non-perturbative phenomena. In 1931, Dirac's research on magnetic monopoles made topology relevant to field theory investigations in physics.

## 3. Lagrangian Abelian Higgs model

In theoretical physics, a Nielsen-Olesen vortex [8] is a point-like object isolated in two spatial dimensions, or an equivalent feature found in a classical field theory solution. This solution holds if the configuration space of scalar fields contains non-contractible circles.

lies. A circle that encircles the vortex at infinity in the configuration space may be "wrapped" once on another circle. This complex topological property is found in a structure known as the Nielsen-Olesen vortex, which bears the names of Holger Bech Nielsen and Poul Olesen (1973). Formally, the solution is equivalent to the superconductor solution's quantum vortex. Finding analytical solutions to the classical field theory equations of motion that apply to particular branches of physics is a topic of great interest.

Among these field theories is the Abelian Higgs model, which is important for cosmology, condensed matter physics, and particle physics [8, 9]. The full Euler-Lagrange equations of motion for this model have not yet been successfully solved. This results from the connected and highly nonlinear nature of these second order partial differential equations. Because the relationships between these second order partial differential equations are very nonlinear.

The abelian Higgs model is utilized as a gauge theory. It also includes the Higgs field, a self-interacting scalar field that has a weak relationship to the electromagnetic field. Conceptually speaking, it is useful to consider this field theory in two plus one dimensions of space-time before expanding it to three plus one dimensions for practical uses.

The abelian Higgs model Lagrangian is as follows:

$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\upsilon}F^{\mu\upsilon}+(D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi)-V(\phi)$.....(2)

The self-interacting scalar matter field $\phi$ which is complex (charged) is present in the Higgs entropy model

$V(\phi)=\frac{1}{4}\lambda(|\phi|^2-a^2)^2$.....(3)

Along the circle $|\phi|=a$ in the complex plane, the Higgs potential is smallest. The parameter that controls the strength of the Higgs field's self-interaction is taken to be positive $\lambda$ for stability reasons.

In the minimal coupling of the Higgs field to the radiation field $A_\mu$, the covariant derivative takes the place of the partial derivative $\partial_\mu$.

$D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$.....(4)

Gauge fields is related to field strengths by

$F_{\mu\upsilon}=\partial_\mu A_\upsilon-\partial_\upsilon A_\mu=\frac{1}{ie}[D_\mu,D_\upsilon]$.....(5)

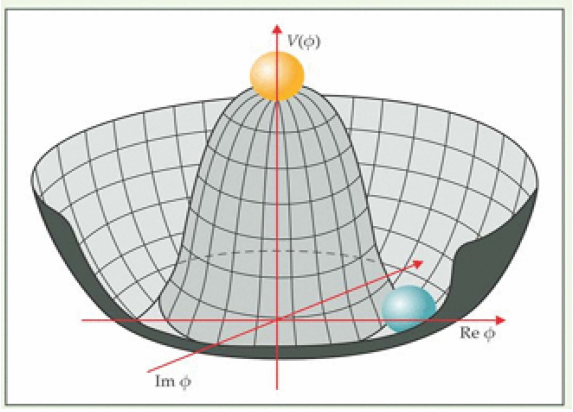



Рис.2

## 4. Equations for Maxwell's homogeneous and inhomogeneous systems

The theoretical foundations of classical electromagnetism, classical optics, and electric circuits are the Lorentz force law and a system of related partial differential equations known as Maxwell's equations [10], also referred to as Maxwell-Heaviside equations. The equations provide a mathematical description for electrical, optical, and radio technologies such as electric motors, power generation, wireless communication, lenses, radar, etc. They describe how electric and magnetic fields are created by charges, currents, and field variations. Even in cases when the gauge fields are not dynamical equations of motion, the field strength can be expressed in terms of them thanks to the homogeneous Maxwell equations. The homogeneous equations follow from the Jacobi identity of the covariant derivative.

The (inhomogeneous) Maxwell equations are derived using the principle of least action using variation of $\delta$ with respect to the gauge fields as follows:

$\delta S = \delta \iint d^4x\mathcal{L} = 0$.....(6).

Typically, $-F_{\mu\upsilon} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A_\upsilon}$.....(7)

Also, $-K^\upsilon = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\upsilon}$.....(8)

where $K^\upsilon = ie(\phi^*\partial_\upsilon\phi^*) - 2e^2\phi^*\phi A_\upsilon$

Gauge theories have repeated variables. This redundancy is brought to light by the existence of local symmetry transformations, or "gauge transformations"

$U(x) = e^{ie\alpha(x)}$.....(9)

(9) modifies the matter field's phase and the gauge field's value in a location- and time-dependent manner as the subsequent

$\phi \to \phi^U = U(x)\phi(x)$.....(10)

$A_\mu \to A^U_\mu = A_\mu + U(x)\frac{1}{ie}\partial_\mu U(x)$.....(11)

Now that the covariant derivative $D_\mu$ defines $D_\mu\phi(x) \to U(x)D_\mu\phi(x)$, it transforms like $\phi(x)$.

Together with the invariance of $F_{\mu\nu}$, this transformation condition guarantees the invariance of $\mathcal{L}$ and the equations of motion.

It is possible to study classical statistical systems approximately with the help of quantum field theory, or QFT. As the correlation length in lattice units increases, so does the approximation's accuracy. of classical statistical systems. The accuracy of the approximation increases with the correlation length in lattice units. Changing the statistical model's temperature equates to deforming the QFT by a specific operator, often one that takes into account all symmetries.

The easiest way to define a renormalization group theory transformation is using the one-dimensional Ising model. The key point is that the renormalization theory can be applied to Ising models in higher dimensions easily, unlike the previously discussed transfer matrix method or other procedures, which makes it instructive to recover the same conclusion from the perspective of renormalization group theory. Using the transfer matrix method, we have already shown that the one-dimensional Ising model does not present a phase transition.

## 5. Three-dimensional noncompact Lattice Abraham-Higgs (LAH) models: Theoretical deconfinition of transitions

Many emergent collective phenomena in condensed matter physics are described by effective three-dimensional (3D) scalar Abelian gauge models, where scalar fields are coupled with an Abelian gauge field [11, 12]. To ascertain the possible universality classes of the continuous transitions occurring in generic scalar gauge systems, several lattice scalar gauge models utilizing both compact and non-compact gauge variables have been considered. They provide examples of topological

transitions brought about by extended charged excitations with no local order parameter, nonlocal topological gauge modes, and long-range scalar fluctuations.

The basic variables in the LAH model are complex vectors with $(u_x, \overline{u_x}) = 1$ components ($A_{x\mu} \in \mathbb{R}$ variables), where $\mu = 1, 2, 3$.

The non-trivial topology of the manifold of vacuum field configurations is the source of the topological excitations in the abelian Higgs model and the other field theoretic models that will be discussed later. We follow the same steps as for ground state configurations and consider static fields [13], adding the possibility of partially disappearing energy densities. One can only generate finite energy if $|x| \to \infty$ asymptotically, which is evident from the energy density expression [14].

Depending on (12), the scalar field phase in (13) asymptotically defines the gauge field

$D_{\phi(x)} = (\nabla - ieA(x))\phi(x) \to 0$.....(12)

$A(x) = \frac{1}{ie}\nabla \ln(\phi(x)) = \frac{1}{e}\nabla\theta(x)$.....(13)

By design, the vector potential is asymptotically a pure gauge [15], and $A(x)$ is independent of the strength of the magnetic field.

It can be concluded from the structure of the asymptotic gauge field (13) that the magnetic flux of field configurations with finite energy is quantized. Applying Stokes' theorem to a surface $\Upsilon$ enclosed by the asymptotic curve $C$ yields the following result:

$\phi_k^n = \iint kd^2x = \oint Ads = \frac{1}{e}\oint \nabla\theta(x)ds = 2n\frac{\pi}{e}$.....(14)

$\phi_k^n$ is a conserved quantity that does not change with time because it is an integer multiple of the basic unit of magnetic flux. Rather than an underlying symmetry, topological factors are what give rise to the appearance of this preserved quantity [16]. Moreover, $\phi_k^n$ is regarded as a topological invariant since it cannot be changed by a continuous deformation of the asymptotic curve. The topological significance of this finding is highlighted by assuming that the asymptotic curve $C$ is a circle. Consequently, the scalar field $\phi(x)$ gives a mapping from the asymptotic circle $C$ to the Higgs potential's circle of zeros $V(a) = 0$.

## 6. Conclusion

The fundamental group characterizes the topological properties of the space where the loops are defined by demonstrating the behavior of loops under continuous deformations. Using this approach, one may find a limited class of non-trivial topological properties. It has already been observed that loops in dimensions greater than two are unable to detect a point defect, hence the idea of homotopy groups needs to be extended to higher dimensions. A circle cannot encircle a pointlike defect in $\mathbb{R}^3$, but a 2−sphere can.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бик Э., Штеффен Ф. Д. Топология и геометрия в физике // LNP. 2005. Т. 659. Springer, Берлин, Гейдельберг.

2. Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля // CRC Press. 1995. 1-е изд. URL: https://doi.org/10.1201/9780429503559

3. Вайнберг С. Квантовая теория полей // Кембриджский университет. 1-е изд. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9781139644167

4. Зинн-Джастин Ж. Квантовая теория поля и критические явления // Кэрендон Пресс. 2002. 4-е изд.

5. Уолд Р. Общая относительность // Чикаго: Издательство Университета Чикаго. 1984.

6. Бертлман Р. А. Аномалии в квантовой теории поля // Оксфорд: Оксфордский университет. 2000. URL: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198507628.001.0001

7. Коулман С. Аспекты симметрии // Кембридж: Кембриджский университет. 1985. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511565045

8. Нильсен Х. Б., Олесен П. Вихревые линии для двойных струн // Ядерная физика Б. 1973. Т. 61. С. 45–61. DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90350-7

9. Эдвард У. Сверхпроводящие струны // Ядерная физика В. 1985. Т. 249. № 4. С. 557-592.

10. Серуэй Р., Джеветт Дж. Принципы физики: текст на основе математического анализа // Cengage Learning. 2012. 5-е изд.

11. Андерсон П. Основные понятия физики конденсированных сред // Калифорния: Издательство Бенджамина/Каммингса. 1984.

12. Уэн Х. Квантовая теория поля многих тел: от происхождения звука до происхождения света и электронов // Оксфорд: Оксфордский университет. 2004.

13. Накахара М. Геометрия, топология и физика // IOP Publishing. 2003. 2-е изд.

14. Шутц Б. Геометрические методы математической физики // Кембридж: Кембриджский университет. 1980.

15. Форкел Х. Введение в инстантоны в QCD // arXiv. 2023. URL: http://arxiv.org/abs/hep-ph/0009136v2

16. Куосини М., Хдейб Х., Алмухур Е. Применение локально компактных пространств в полиэдрах: размерность и пределы // Доклады WSEAS по математике. 2024. Т. 23. С. 118-124. DOI: http://dx.doi.org/10.37394/23206.2024.23.14

## REFERENCES

1. Bick, E. & Steffen, F. D. 2005, “Topology and Geometry in Physics”, *LNP*, vol. 659, Springer, Berlin Heidelberg.

2. Peskin, M. & Schroeder, D. 1995, “An Introduction to Quantum Field Theory”, 1st edn, *CRC Press*, Boulder. Available at: https://doi.org/10.1201/9780429503559

3. Weinberg, S. “The Quantum Theory Of Fields”, 1st edn, *Cambridge University Press*. Available at: https://doi.org/10.1017/CBO9781139644167

4. Zinn-Justin, J. 2002, “Quantum Field Theory and Critical Phenomena”, 4-th edn, *Carendon Press*, Oxford.

5. Wald, R. 1984, “General Relativity”, *University of Chicago Press*, Chicago.

6. Bertlmann, R. A. 2000, “Anomalies in Quantum Field Theory”, *Oxford University Press*, Oxford. Available at: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198507628.001.0001

7. Coleman, S. 1985, “Aspects of Symmetry”, *Cambridge University Press*, Cambridge. Available at: https://doi.org/10.1017/CBO9780511565045

8. Nielsen, H. B. & Olesen, P. 1973, “Vortex-line models for dual strings”, *Nuclear Physics B*, vol. 61, pp. 45–61. Available at: https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90350-7

9. Edward, W. 1985, “Superconducting strings”, *Nuclear Physics B*, vol. 249, no. 4, pp. 557-592.

10. Serway, R. & Jewett, J. 2012, “Principles of physics: a calculus-based text”, 5-th ed, *Cengage Learning*.

11. Anderson, P. 1984, “Basic Notions of Condensed Matter Physics”, *The Benjamin/Cummings Publishing Company*, Menlo Park, California.

12. Wen, X. 2004, “Quantum field theory of many-body systems: from the origin of sound to an origin of light and electrons”, *Oxford University Press*.

13. Nakahara, M. 2003, “Geometry, Topology and Physics”, 2-nd ed, *IOP Publishing*, Bristol.

14. Schutz, B. 1980, “Geometrical Methods of Mathematical Physics”, *Cambridge University Press*, Cambridge.

15. Forkel, H. 2023, “A Primer on Instantons in QCD”. Available at: http://arxiv.org/abs/hep-ph/0009136v2

16. Qousini, M., Hdeib, H. & Almuhur, E. 2024, “Applications of Locally Compact Spaces in Polyhedra: Dimension and Limits”, *WSEAS Transactions on Mathematics*, vol. 23, pp. 118-124. Available at: http://dx.doi.org/10.37394/23206.2024.23.14

Получено: 11.07.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-237-243

# О накрытии множеств специального вида геометрическими прогрессиями с рядом некоторых ограничений

Р. М. Ашрапов, П. С. Дергач

**Ашрапов Рафаэль Маратович** — филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в г. Ташкенте (г. Ташкент).
*e-mail: ashrapov41@gmail.com*
**Дергач Пётр Сергеевич** — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
*e-mail: dergachpes@mail.ru*

**Аннотация**

В работе исследуется классическая задача о минимальном накрытии начала натурального ряда минимальным числом геометрических прогрессий с рядом некоторых ограничений(на начало прогрессии, на шаг прогрессии и на непересечение прогрессий). Среди схожих к ней задач следует отметить следующие задачи: о накрытии арифметических прогрессий геометрическими с действительнозначным шагом, о накрытии начала натурального ряда геометрическими прогрессиями с фиксированным числом членов, где шаг действительнозначен и о накрытии начала натурального ряда геометрическими прогрессиями с рациональным шагом. Таким образом, уникальность работы заключается в наличии ограничений на геометрические прогрессии и тем, что шаг является натуральным числом. Найдены оптимальные ответы для случаев, когда: ограничение на шаг равно 2, ограничение на шаг равно 2 и имеется запрет на пересечение, ограничение на начало равно 1. Были получены оценки снизу для случаев, когда: нет ограничений, есть ограничение на непересечение, есть ограничение на шаг равное 3. Были получены оценки сверху для случаев когда: нет ограничений, есть ограничение на непересечение.

*Ключевые слова:* геометрические прогрессии, натуральный ряд, комбинаторная оптимизация.

*Библиография:* 4 названия.

**Для цитирования:**
Ашрапов, Р.М. Дергач, П.С. О накрыти множеств спецаильного вида геометрическими прогрессиями с рядом некоторых ограничений // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 237–243.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-237-243

# On covering sets of a special type by geometric progressions with a certain restrictions

R. M. Ashrapov, P. S. Dergach

**Ashrapov Rafael Maratovich** — Branch of the Lomonosov Moscow State University in Tashkent (Tashkent).
*e-mail: ashrapov41@gmail.com*
**Dergach Peter Sergeevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
*e-mail: dergachpes@mail.ru*

**Abstract**

The paper investigates the classic problem of covering the start of the natural number series with the minimum number of geometric progressions under various constraints (on the starting point, progression step, and non-intersection of progressions). Among similar problems, the following should be noted: covering arithmetic progressions with geometric progressions with real-valued steps, covering the start of the natural number series with geometric progressions with a fixed number of terms and a real-valued step, and covering the start of the natural number series with geometric progressions with a rational step. Thus, the uniqueness of the work lies in the constraints imposed on geometric progressions, particularly that the step is a natural number. Optimal solutions were found for cases where: the step constraint is 2, the step constraint is 2 with a prohibition on intersection, and the starting point constraint is 1. Lower bounds were obtained for cases where: there are no constraints, there is a prohibition on intersection, and there is a step constraint of 3. Upper bounds were obtained for cases where: there are no constraints, and there is a prohibition on intersection.

*Keywords:* geometric progressions, natural series, combinatorial optimization.

*Bibliography:* 4 titles.

**For citation:**
Ashrapov, R.M., Dergach, P.S. 2024, “On covering sets of a special type by geometric progressions with a certain restrictions” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 237–243.

## 1. Введение и обзор уже имеющихся результатов

В данной работе будем рассматривать задачу о нахождении минимального накрытия множества множества $A \subseteq \mathbb{N}$ геометрическими прогрессиями вида $bq^k$, где $b$ и $q \in \mathbb{N}$, а $k$ - целое неотрицательное число.

Будем различать задачи в зависимости от типа накладываемых условий:

- Разрешить/запретить прогрессиям пересекаться;
- Ограничение сверху на шаг прогрессий;
- Ограничение сверху на начала прогрессий.

В [1] рассматривается задача о накрытии начала арифметических прогрессий геометрическими прогрессиями с действительнозначными параметрами без наличия каких-либо ограничений. В ней исследуется асимптотика плотности решения, где плотность это отношение размера накрываемого множества к числу геометрических прогрессий. Показано, что для любой арифметической прогрессии, начиная с некоторого n, плотность решения имеет оценку снизу равную $\frac{1}{\pi^2}$.

В [2] рассматривается схожая задача о накрытии всего натурального ряда геометрическими прогрессиями с действительнозначным шагом и числом элементов равным $k$. Основным результатом является, что предел плотностей существует, причём принадлежит отрезку $[0; 0.5]$, где плотность это предел отношения минимального числа геометрических прогрессий, которые удовлетворяют условиям задачи, для накрытия начала натурального ряда длины $n$ при $n \to \infty$.

В [3] рассматривается задача о накрытии начала натурального ряда геометрическими прогрессиями с рациональным шагом без наличия каких-либо ограничений. Результатом является оценка снизу имеющая вид $\frac{217}{36pi^2}n$ и оценка сверху имеющая вид $(\frac{3}{8} - \frac{1}{4900})n$.

Несложно заметить, что в случае накрытия натуральных чисел геометрическими прогрессиями нам неважно являются ли начала геометрических прогрессий натуральными или рациональными, поскольку любая геометрическая прогрессия с рациональным началом может быть заменена на геометрическую прогрессию с натуральным началом, причём вторая будет накрывать как минимум такое же множество натуральных чисел.

## 2. Основные определения

Большая часть определений этого раздела взята из [4].

Определение 1. *Обозначим за $f_B(A)$ минимальное количество геометрических прогрессий, которых достаточно для накрытия множества $A$ с рядом ограничений $B$ в виде индексов(S(s) – начало не больше s, D(d) – шаг не больше d, I – пересечение, $\lambda$ – нет ограничений).*

Определение 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $E(n)$ множество $\{1, \ldots, n\}$.*

Определение 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел из $E(n)$.*

Определение 4. *Число $b \in \mathbb{N}$, отличное от 1, будем называть стартом, если для его факторизации $p_1^{a_1} * ... * p_k^{a_k}$ выполнено, что НОД$(a_1, .., a_k) = 1$.*

Определение 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\delta(n)$ количество стартов из $E(n)$.*

Определение 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $Q(n)$ количество свободных от квадрата чисел из $E(n)$.*

Определение 7. *Пусть $p$, $t$ – различные простые числа . Обозначим через $U(p, q)$ множество $\{u | u = p^i t^j; i, j \in \mathbb{N}_0\}$.*

Определение 8. *Пусть $p$, $t$ – различные простые числа и $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $V(p, t, n)$ множество $\{v | v = p^i t^j; i, j \in \mathbb{N}_0; i, j \leq n\}$.*

## 3. Доказательство вспомогательных лемм

Лемма 1. *Любая геометрическая прогрессия накрывает не более двух свободных от квадратов чисел.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $q = 1$. Очевидно, что данная геометрическая прогрессия накрывает только одно число - b;
2. $q \neq 1$. Следовательно $\exists\ p$ - простое число, что $p \mid q$. Несложно видеть, что для $\forall\ k > 2$ выполнено, что $p^2 \mid bq^k$. Из чего следует, что лишь первые два члена геометрической прогрессии могут быть свободными от квадратов.

□

Следствие 1. $f(\mathbb{N}) = \infty$.

Лемма 2. *Любое натуральное число единственным образом представимо в виде произведения степени двойки и нечётного числа.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{N}$. Будем делить число $a$ на 2, пока можем. Очевидно, что данный процесс конечный.
Пусть $m$ - это число выполненых шагов. Получим, что искомая степень двойки равна $m$, а искомое нечётное число равно $\frac{a}{2^m}$. Существование и единственность выполнены в силу построения. □

Лемма 3. *Любая геометрическая прогрессия с шагом не большим 2 накрывает не более одного нечётного числа.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $q = 1$. Данная геометрическая прогрессия накрывает только одно число - b;
2. $q = 2$. Несложно видеть, что для $\forall\ k \geq 1$ выполнено, что $k$-ый член геометрической прогрессии является четным поскольку его значение имеет вид $2^k * b$.

□

Следствие 2. $[\frac{n+1}{2}] \leqslant f_{D(2)}(E(n))$.

Лемма 4. *(Подсчёт числа стартов). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\pi(n) = k$. Обозначим множество простых чисел из $E(n)$ через $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$. Тогда верно*

$$\delta(n) = n - \sum_{i=1}^{k} [\sqrt[p_i]{n}] + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} [\sqrt[p_i * p_j]{n}] + ... + (-1)^{k-1} [\sqrt[p_1 * ... * p_k]{n}]$$

Доказательство. Посчитаем количество чисел, которые не являются стартами. От $n$ отнимем подсчитанное количество и получим число стартов. Согласно определению 4, каждое число $a \in E(n)$, которое не является стартом, представимо в виде $b^k$, где $b$ и $k \in \mathbb{N}$ , причём $k \neq 1$. Следовательно, $\forall\ a \in E(n)$, которое не является стартом, выполнено, что $\exists\ b \in E(n)$ и $p \in \mathbb{N}$ - простое число, что $b^p = a$. Тогда количество чисел, которые не являются стартами, вычисляется по формуле включений-исключений и равно

$$n - \sum_{i=1}^{k} [\sqrt[p_i]{n}] + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} [\sqrt[p_i * p_j]{n}] + ... + (-1)^{k-1} [\sqrt[p_1 * ... * p_k]{n}].$$

Следовательно,

$$\delta(n) = n - \sum_{i=1}^{k} [\sqrt[p_i]{n}] + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} [\sqrt[p_i * p_j]{n}] + ... + (-1)^{k-1} [\sqrt[p_1 * ... * p_k]{n}].$$

□

Лемма 5. *Любая геометрическая прогрессия с ограничением на начало равным 1 накрывает не более одного старта.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $q = 1$. Следовательно, $q^k = 1$ для $\forall\ k \geq 0$;
2. $q$ - не старт и $q \neq 1$. Тогда, согласно определению 4, для $\forall\ k \geq 1$ выполнено, что $q^k$ не является стартом.
3. $q$ - старт. Тогда, согласно определению 4, для $\forall\ k \geq 2$ выполнено, что $q^k$ не является стартом.

□

Следствие 3. $\delta(n) \leqslant f_{D(1)}(E(n))$.

Лемма 6. *Любое число $a \in \mathbb{N}$ представимо в виде $b^k$, где $b$-старт, а $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $a$ - старт. Тогда $b = a$, а $k = 1$.
2. $a$ - не старт. Тогда, согласно определению 4, для факторизации числа $a = p_1^{a_1} * ... * p_k^{a_k}$ выполнено, что НОД$(p_1, ..., p_k) = g \neq 1$. Тогда в качестве $b$ возьмём $\sqrt[g]{b}$, а $k = g$.

□

## 4. Доказательство основных утверждений

Утверждение 1. *(Об оптимальном ответе при ограничении на шаг равным 2).*

$$f_{D(2)}(E(n)) = [\tfrac{n+1}{2}].$$

Доказательство. Покажем, что оценка снизу из следствия 2 достижима.
Рассмотрим геометрические прогрессии вида $b_k = 2k-1$ и $q_k = 2$, где $1 \leqslant k \leqslant [\frac{n+1}{2}]$. Тогда в силу леммы 2 мы накроем всё множество $E(n)$ данным множеством геометрических прогрессий.
□

Утверждение 2. $[\frac{Q(n)}{2}] \leqslant f(E(n)) \leqslant [\frac{n+1}{2}]$.

Доказательство. Оценка сверху является следствием утверждения 1.
Оценка снизу следует из леммы 1. □

Утверждение 3. *(Об оптимальном ответе при $d = 2$ и запрете на пересечение).*

$$f_{ID(2)}(E(n)) = [\tfrac{n+1}{2}].$$

Доказательство. Докажем, что геометрические прогрессии, рассмотренные в утверждении 1, не пересекаются. Соглано лемме 2, любое число окажется ровно одной геометрической прогрессией, что и доказывает необходимое. □

Утверждение 4. $[\frac{Q(n)}{2}] \leqslant f_I(E(n)) \leqslant [\frac{n+1}{2}]$.

Доказательство. Оценка сверху является следствием утверждения 3. Оценка снизу следует из леммы 1. □

Утверждение 5. *(Об оптимальном ответе при d=1).*

$$f_{D(1)}(E(n)) = \delta(n).$$

Доказательство. Покажем, что оценка снизу из следствия 3 достижима.
Пусть $k = \delta(n)$. Обозначим множество стартов из $E(n)$ как $\{s_1, s_2, .., s_k\}$. Тогда, согласно лемме 6, геометрические прогрессии вида $b_i = 1$, $q_i = s_i$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, будут накрывать всё множество. □

Утверждение 6. *(О нижней оценке при $d = 3$).*

$$[\tfrac{n}{3}] - 1 \leqslant f_{D(3)}(E(n)).$$

Доказательство. Заметим, что геометрические прогрессии с ограничением на шаг равным 3 накрывают не более одного числа, которое взаимно просто с 2 и 3. Такие числа имеют вид $6k+1$ или $6k+5$. Несложно понять, что таких чисел не менее чем $[n/6] * 2 - 1 = [n/3] - 1$. □

## 5. Заключение

В результате выполнения данной работы были получены:

- точные оценки для случаев, когда рассматривается начало натурального ряда с ограничениями вида $D(2)$, $D(2)I$ и $D(1)$;
- оценки снизу и сверху для случаев, когда рассматривается начало натурального ряда с ограничениями вида $\lambda$ и $I$;
- оценка снизу для случая, когда рассматривается начало натурального ряда с ограничением вида $D(3)$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Санна, К. Накрытие арифметических прогрессий геометрическими и обратно // arXiv. 2013. URL: https://arxiv.org/pdf/1311.4331v1 (дата обращения: 23 июня 2024).
2. Эберхард, С. Накрытие множества геометрическими прогрессиями // MathOverflow. 2014 URL: https://mathoverflow.net/q/173075 (дата обращения: 23 июня 2024).
3. О'Брайан, К. Накрытие k-геометрическими прогрессиями // Сессии задач по комбинаторной и аддитивной теории чисел. 2014. с. 30. URL: https://arxiv.org/pdf/1406.3558v2 (дата обращения: 23 июня 2024).
4. Бухштаб, А. А. Теория чисел: Учебник для вузов // М.: Просвещение. 2013. С. 28, 38, 32.

## REFERENCES

1. Sanna, C. 2013, "Covering an arithmetic progression with geometric progressions and vice versa", *ArXiv*, Available at: https://arxiv.org/pdf/1311.4331v1.
2. Eberhard, S. 2014, "Covering a set with geometric progressions", *MathOverflow*. Available at: https://mathoverflow.net/q/173075 (Accessed: 23 June 2024).

3. O'Bryant, K. 2014, "Covering by k-geometric progressions", *Combinatorial and additive number theory problem sessions*, pp. 30. Available at: https://arxiv.org/pdf/1406.3558v2.

4. Bukhshtab, A. A. 2013, "Number theory: Textbook for universities", *Moscow: Prosveshenie*, pp. 28, 38, 32.

Получено: 24.06.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 514.763 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-244-253

# О размерности группы Ли автоморфизмов параконтактного метрического многообразия

В. И. Паньженский, О. П. Сурина

**Паньженский Владимир Иванович** — кандидат физико-математических наук, Пензенский государственный университет (г. Пенза).
*e-mail: kaf-geom@yandex.ru*
**Сурина Ольга Петровна** — кандидат физико-математических наук, Пензенский государственный университет (г. Пенза).
*e-mail: o.surina2013@yandex.ru*

**Аннотация**

Доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов $(2n+1)$-мерного гладкого многообразия, наделённого параконтактной метрической структурой $(\eta, \xi, \varphi, g)$, не превосходит $(n+1)^2$, где $\eta$ – дифференциальная 1-форма, определяющая контактное $2n$-мерное распределение $H = \ker\eta$, $\xi$ – векторное поле Риба, $\varphi$ – структурный эндоморфизм, $g$ – псевдориманова метрика, ограничение которой на контактное распределение $H$ имеет сигнатуру $(n, n)$. Анализ условий инвариантности параконтактной метрической структуры относительно инфинитезимальных автоморфизмов, а также используя атлас Дарбу, в каждой карте которого контактная форма $\eta$ имеет канонический вид, позволяет утверждать, что группа изотропий, индуцированная стационарной подгруппой точки $p(0, ..., 0)$, вращает только векторы, лежащие в контактной плоскости $H_p$, и оставляет инвариантной псевдоевклидову метрику и симплектическую структуру, определяемую дифференциальной 2-формой $\Omega = d\eta$. Поэтому максимальная размерность алгебры Ли группы изотропий равна $n^2$. Так как размерность подгруппы сдвигов не превосходит размерность многообразия, то размерность группы автоморфизмов не превосходит $n^2 + 2n + 1$. В данной работе также доказано, что максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов равна $(n+1)^2$. Примером параконтактного метрического многообразия, допускающего алгебру Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимальной размерности, является обобщённая группа Гейзенберга, наделённая канонической парасасакиевой структурой. Найдены базисные векторные поля этой алгебры.

*Ключевые слова:* параконтактная метрическая структура, автоморфизмы, инфинитезимальные автоморфизмы, группа Гейзенберга.

*Библиография:* 18 названий.

**Для цитирования:**
Паньженский, В.И. Сурина, О.П. О размерности группы Ли автоморфизмов параконтактного метрического многообразия // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 244–253.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 514.763 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-244-253

# On the dimension of the Lie group of automorphisms of a paracontact metric manifold

V. I. Pan'zhenskii, O. P. Surina

**Pan'zhenskii Vladimir Ivanovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Penza State University (Penza).
*e-mail: kaf-geom@yandex.ru*
**Surina Olga Petrovna** — candidate of physical and mathematical sciences, Penza State University (Penza).
*e-mail: o.surina2013@yandex.ru*

**Abstract**

It has been proved that the dimension of the Lie group of automorphisms of a $(2n+1)$-dimensional smooth manifold endowed with the paracontact metric structure $(\eta, \xi, \varphi, g)$ does not exceed $(n+1)^2$, where $\eta$ is a differential 1-form defining the contact $2n$-dimensional distribution $H = \ker\eta$, $\xi$ is a Reeb vector field, $\varphi$ is a structural endomorphism, $g$ is a pseudo-Riemannian metric whose restriction to the contact distribution $H$ has signature $(n, n)$. The analysis of the conditions for the invariance of the paracontact metric structure with respect to infinitesimal automorphisms, as well as using the Darboux atlas, in each chart of which the contact form $\eta$ has a canonical form, allows us to state that the isotropy group induced by the stationary subgroup of the point $p(0, ..., 0)$, rotates only vectors lying in the contact plane $H_p$, and leaves invariant the pseudo-Euclidean metric and the symplectic structure defined by the differential 2-form $\Omega = d\eta$. So the maximum dimension of the Lie algebra of the isotropy group is $n^2$. Since the dimension of the translation subgroup does not exceed the dimension of the manifold, the dimension of the automorphism group does not exceed $n^2 + 2n + 1$. The paper also proves that the maximum dimension of the Lie algebra of infinitesimal automorphisms is equal to $(n+1)^2$. An example of a paracontact metric manifold admitting a Lie algebra of infinitesimal automorphisms of maximum dimension is the generalized Heisenberg group endowed with a canonical para-Sasakian structure. The basis vector fields of this algebra are found.

*Keywords:* paracontact metric structure, automorphisms, infinitesimal automorphisms, Heisenberg group.

*Bibliography:* 18 titles.

**For citation:**
Pan'zhenskii, V.I., Surina, O.P. 2024, "On the dimension of the Lie group of automorphisms of a paracontact metric manifold" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 244–253.

## 1. Введение

В настоящее время продолжаются исследования контактных и параконтактных метрических многообразий [1]-[13]. В частности, изучаются автоморфизмы и инфинитезимальные автоморфизмы таких структур. В работе Танно [14] доказано, что максимальная размерность группы Ли автоморфизмов контактных или почти контактных $(2n+1)$-мерных метрических многообразий равна $(n+1)^2$. В этой же работе установлено, что максимальная размерность

группы автоморфизмов достигается тогда и только тогда, когда секционная кривизна в двумерных направлениях, содержащих вектор Риба, является постоянной.

В данной работе доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов $(2n+1)$-мерного параконтактного многообразия с псевдоримановой метрикой не превосходит $(n+1)^2$, а максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов равна $(n+1)^2$. Примером такого многообразия является обобщённая группа Гейзенберга, наделённая канонической параконтактной метрической структурой, которая является нормальной и, следовательно, парасасакиевой. Найдены базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов обобщённой группы Гейзенберга с данной парасасакиевой структурой.

Пусть $M$ – гладкое многообразие нечётной размерности $m = 2n+1$. Контактной формой на $M$ называется дифференциальная 1-форма $\eta$, удовлетворяющая условию [15]

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0, \tag{1}$$

где $\wedge$ – внешнее произведение, $d$ – внешний дифференциал. Многообразие $M$, наделённое контактной формой, называется контактным многообразием. Условие (1) означает, что ранг дифференциальной 2-формы $d\eta$ равен $2n$. Контактная форма $\eta$ определяет вполне неголономное $2n$-мерное контактное распределение $H = \ker\eta$, а 2-форма $d\eta$ – 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$. Существует единственное векторное поле $\xi \in V$ такое, что $\eta(\xi) = 1$. Поле $\xi$ называется векторным полем Риба.

Параконтактной метрической структурой на контактном многообразии $M$ называется четвёртка тензорных полей $(\eta, \xi, \varphi, g)$, где $\eta$ – контактная форма, $\xi$ – векторное поле Риба, $\varphi$ – эндоморфизм модуля векторных полей на $M$, $g$ – псевдориманова метрика. При этом требуется выполнение следующих условий

$$\varphi^2 = id - \eta \otimes \xi, \quad d\eta(X,Y) = g(X, \varphi Y), \quad g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Кроме того, предполагается, что ограничение $J$ эндоморфизма $\varphi$ на контактное распределение $H$ определяет на $H$ паракомплексную структуру: $J^2 = id$, собственные распределения которой $H^+$ и $H^-$, отвечающие собственным значениям $\pm 1$, имеют одинаковую размерность $dim H^+ = dim H^- = n$, а $g(JX, JY) = -g(X,Y)$ для векторных полей $X, Y \in H$. Ограничение псевдоримановой метрики $g$ на распределение $H$ имеет сигнатуру $(n,n)$. Нетрудно убедиться, что выполняются ещё и следующие равенства

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(X,\xi) = 0, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad g(X,\xi) = \eta(X).$$

Параконтактная метрическая структура называется $k$-контактной, если векторное поле Риба $\xi$ является киллинговым. Нормальная параконтактная метрическая структура называется парасасакиевой. Параконтактная метрическая структура является парасасакиевой, если [16], [17]

$$[\varphi, \varphi](X,Y) - d\eta(X,Y)\xi = 0,$$

где

$$[\varphi, \varphi](X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

– кручение Нейенхейса.

## 2. О размерности группы автоморфизмов

Диффеоморфизм $f : M \to M$ называется автоморфизмом параконтактного метрического многообразия $M$, если он сохраняет структурные тензоры $\eta, \xi, \varphi, g$. Как и в случае контактного и почти контактного метрического многообразия, имеет место следующее утверждение.

Theorem 1. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов* $(2n+1)$*-мерного параконтактного метрического многообразия не превосходит* $(n+1)^2$.

Доказательство. Пусть $f_t = \exp tX$ – произвольная однопараметрическая подгруппа группы Ли автоморфизмов $A(M)$. Векторное поле $X$ является инфинитезимальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда производная Ли вдоль $X$ от $\eta, \xi, \varphi, g$ обращается в нуль

$$L_X\eta = 0, \quad L_X\xi = 0, \quad L_X\varphi = 0, \quad L_Xg = 0.$$

В локальных координатах имеем

$$X^p\partial_p\eta_i + \partial_iX^p\eta_p = 0, \tag{2}$$

$$X^p\partial_p\xi^i - \partial_pX^i\xi^p = 0, \tag{3}$$

$$X^p\partial_p\varphi^i_j + \partial_jX^p\varphi^i_p - \partial_pX^i\varphi^p_j = 0, \tag{4}$$

$$X^p\partial_pg_{ij} + \partial_iX^pg_{pj} + \partial_jX^pg_{ip} = 0. \tag{5}$$

Кроме того, в силу перестановочности производной Ли и внешнего дифференциала, производная Ли от фундаментальной формы $\Omega = d\eta$ также равна нулю

$$X^p\partial_p\Omega_{ij} + \partial_iX^p\Omega_{pj} + \partial_jX^p\Omega_{ip} = 0. \tag{6}$$

Пусть $\nabla$ – связность Леви-Чивита псевдоримановой метрики $g$. Тогда, заменяя частные производные ковариантными, (2), (3), (4), (5), (6) принимают вид

$$X^p\nabla_p\eta_i + \nabla_iX^p\eta_p = 0, \tag{7}$$

$$X^p\nabla_p\xi^i - \nabla_pX^i\xi^p = 0, \tag{8}$$

$$X^p\nabla_p\varphi^i_j + \nabla_jX^p\varphi^i_p - \nabla_pX^i\varphi^p_j = 0, \tag{9}$$

$$X^p\nabla_pg_{ij} + \nabla_iX^pg_{pj} + \nabla_jX^pg_{ip} = 0, \tag{10}$$

$$X^p\nabla_p\Omega_{ij} + \nabla_iX^p\Omega_{pj} + \nabla_jX^p\Omega_{ip} = 0. \tag{11}$$

Заметим, что (8), (9) и (11) следуют из (7) и (10). На контактном многообразии $M$ существует атлас Дарбу, в каждой карте которого контактная форма $\eta$ и векторное поле Риба имеют вид

$$\eta = -x^{n+1}dx^1 - ... - x^{2n}dx^n + dx^m, \quad \xi = \partial_m. \tag{12}$$

Стационарная подгруппа точки $p(0,...,0)$ в касательном пространстве $T_pM$ индуцирует группу изотропий. Так как матрицы $\nabla_iX^j$ принадлежат алгебре Ли этой группы, а значение поля $X$ в точке $p$ равно нулевому вектору, то, как следует из (7),(8) и (12), $\nabla_iX^m = 0$ и $\nabla_mX^i = 0$. Поэтому группа изотропий может вращать только векторы, лежащие в контактной плоскости $H_p$. Матрицы $\nabla_aX^b (a,b = 1,...,2n)$, как следует из (10), принадлежат алгебре Ли псевдоортогональной группы. Учитывая, что псевдоевклидова метрика в $H_p$ имеет сигнатуру $(n,n)$, заключаем, что эта алгебра состоит из матриц следующего вида

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

где $A_1, A_2, A_3, A_4$ – матрицы размера $n \times n$, причём $A_1$ и $A_4$ – кососимметрические матрицы, а $A_3$ совпадает с транспонированной матрицей $A_2$: $A_3 = A_2^t$ . Кроме того, матрицы $\nabla_aX^b$, находятся в алгебре Ли симплектической группы, а эта алгебра состоит из матриц

$$S = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

где $B_4 = B_1^t, B_2 = B_2^t, B_3 = B_2$. Таким образом, алгебра Ли группы изотропий точки $p$ состоит из матриц следующего вида

$$D \cap S = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix},$$

где $A$ – кососимметрическая матрица, а $B$ – симметрическая. Это означает, что размерность данной алгебры, а следовательно, группы изотропий и стационарной подгруппы не превосходит $n^2$. Так как подгруппа сдвигов не может превосходить размерности многообразия, то размерность группы автоморфизмов параконтактного метрического многообразия не превосходит $(n+1)^2$. $\square$

## 3. Инфинитезимальные автоморфизмы

В качестве примера параконтактного метрического многообразия, допускающего алгебру Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимальной размерности, рассмотрим обобщённую (многомерную) группу Гейзенберга. Данная группа является $m = (2n+1)$-мерной группой Ли $(n+2) \times (n+2)$-матриц следующего вида

$$G = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ \Theta^t & E_n & x^t \\ 0 & \Theta & 1 \end{pmatrix},$$

где $x^t = (x^1, ..., x^n)^t, y = (x^{n+1}, ..., x^{2n}), \Theta = (0, ..., 0), z = x^m, E_n$ – единичная $n \times n$-матрица. Структурные тензоры $(\eta, \xi, \varphi, g)$ левоинвариантной параконтактной метрической структуры на $G$ имеют следующий вид

$$\eta = -x^{n+1}dx^1 - ... - x^{2n}dx^n + dx^m, \quad \xi = \partial_m,$$

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} O & E_n^* & \Theta^t \\ E_n^* & O & \Theta^t \\ \Theta & y & O \end{pmatrix},$$

$$ds^2 = {dx^1}^2 + ... + {dx^n}^2 - {dx^{n+1}}^2 - ... - {dx^{2n}}^2 + (-x^{n+1}dx^1 - ... - x^{2n}dx^n + dx^m)^2,$$

где $O$ – нулевая $n \times n$-матрица, $E_n^*$ – $n \times n$-матрица, ненулевыми элементами которой являются единицы, стоящие на побочной диагонали. Нетрудно установить, что данная параконтактная структура является парасасакиевой [18].

Пусть $m = 3$. В этом случае имеем группу Гейзенберга

$$G = \begin{pmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & x^1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Левоинвариантные структурные тензоры параконтактной метрической структуры имеют следующий вид

$$\eta_i = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + {x^2}^2 & 0 & -x^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Инфинитезимальные автоморфизмы данной структуры определяются системой дифференциальных уравнений (2) и (5)

$$-X^2 - x^2\partial_1 X^1 + \partial_1 X^3 = 0,$$

$$-x^2\partial_2 X^1+\partial_2 X^3=0,$$
$$-x^2\partial_3 X^2+\partial_3 X^3=0,$$
$$x^2X^2+(1+x^{2^2})\partial_1 X^1-x^2\partial_1 X^3=0,$$
$$-\partial_1 X^2+(1+x^{2^2})\partial_2 X^1-x^2\partial_2 X^3=0,$$
$$-X^2-x^2\partial_1 X^1+\partial_1 X^3+(1+x^{2^2})\partial_3 X^1-x^2\partial_3 X^3=0,$$
$$-x^2\partial_2 X^1+\partial_2 X^3-\partial_3 X^2=0,$$
$$\partial_2 X^2=0,\quad \partial_3 X^1=0.$$

Интегрируя эту систему, находим общее решение

$$X^1=c_4x^2+c_1,\quad X^2=c_4x^1+c_2,\quad X^3=c_2x^1+\frac{1}{2}c_4(x^{1^2}+x^{2^2})+c_3.$$

Постоянным $c_1,c_2,c_3,c_4$ соответствуют базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов

$$X_1=\partial_1,\quad X_2=\partial_2+x^1\partial_3,\quad X_3=\partial_3,\quad X_4=x^2\partial_1+x^1\partial_2+\frac{1}{2}(x^{1^2}+x^{2^2})\partial_3.$$

Аналогично, для $m=5$ имеем

$$G=\begin{pmatrix}1 & x^3 & x^4 & x^5\\ 0 & 1 & 0 & x^1\\ 0 & 0 & 1 & x^2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\eta_i=\begin{pmatrix}-x^3 & -x^4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \xi^i=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\varphi^i_j=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^3 & x^4 & 0\end{pmatrix},\quad g_{ij}=\begin{pmatrix}1+x^{3^2} & x^3x^4 & 0 & 0 & -x^3\\ x^3x^4 & 1+x^{4^2} & 0 & 0 & -x^4\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ -x^3 & -x^4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (2) и (5), находим базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов

$$X_1=\partial_1,\quad X_2=\partial_2,\quad X_3=\partial_3+x^1\partial_5,\quad X_4=\partial_4+x^2\partial_5,\quad X_5=\partial_5,$$
$$X_1^2=x^2\partial_1-x^1\partial_2+x^4\partial_3-x^3\partial_4,$$
$$X_1^3=x^3\partial_1+x^1\partial_3+\frac{1}{2}(x^{3^2}+x^{1^2})\partial_5,$$
$$X_2^4=x^4\partial_2+x^2\partial_4+\frac{1}{2}(x^{4^2}+x^{2^2})\partial_5,$$
$$X_1^4=x^4\partial_1+x^1\partial_4+x^3\partial_2+x^2\partial_3+(x^3x^4+x^1x^2)\partial_5.$$

Решение уравнений инвариантности формы $\eta$ и метрического тензора $g$ легко обобщается на произвольную размерность $m$. Соответствующие $(n+1)^2$ базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов имеют вид

$$X_\alpha = \partial_\alpha, \quad X_{n+\alpha} = \partial_{n+\alpha} + x^\alpha \partial_m, \quad X_m = \partial_m, \quad \alpha = \overline{1,n},$$

$$X_\alpha^\beta = x^\beta \partial_\alpha - x^\alpha \partial_\beta + x^{n+\beta} \partial_{n+\alpha} - x^{n+\alpha} \partial_{n+\beta}, \quad \alpha < \beta, \quad \beta = \overline{1,n},$$

$$X_\alpha^{n+\alpha} = x^{n+\alpha} \partial_\alpha + x^\alpha \partial_{n+\alpha} + \frac{1}{2}(x^{n+\alpha^2} + x^{\alpha 2}) \partial_m, \quad \alpha = \overline{1,n},$$

$$X_\alpha^{n+\beta} = x^{n+\beta} \partial_\alpha + x^\alpha \partial_{n+\beta} + x^{n+\alpha} \partial_\beta + x^\beta \partial_{n+\alpha} + (x^{n+\alpha} x^{n+\beta} + x^\alpha x^\beta), \quad \alpha < \beta.$$

Таким образом, справедлива

Theorem 2. *Максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов $(2n+1)$-мерного параконтактного метрического многообразия равна $(n+1)^2$.*

Кроме связности Леви-Чивита $\nabla$ на группе Гейзенберга, наделённой парасасакиевой структурой, имеется параконтактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением, определённая равенством [18]

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} d\eta(X,Y) \wedge \eta(Z).$$

В этой связности все структурные тензоры парасасакиевой структуры ковариантно постоянны. Так как производная Ли перестановочна с внешним дифференциалом, то данная связность, как и связность Леви-Чивита, инвариантна относительно алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов.

## 4. Заключение

Таким образом, в работе доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов $(2n+1)$-мерного параконтактного метрического многообразия не превосходит $(n+1)^2$, а максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов равна $(n+1)^2$. Примером параконтактного метрического многообразия, допускающего алгебру Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимальной размерности, является обобщённая группа Гейзенберга. Проинтегрированы уравнения инвариантности структурных тензоров, определяющих параконтактную метрическую структуру, и найдены базисные векторные поля алгебры.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sato I. On a structure similar to the almost contact structure // Tensor (N. S.). 1976. V. 30. P. 219–224.

2. Kaneyuki S., Willams F. L. Almost paracontact and parahodge structure on manifolds // Nagoya Mathematics Journal. 1985. V. 99. P. 173–187.

3. Matsumoto K. On Lorentzian paracontact manifolds // Bulletin of the Yamagata University. Natural Science. 1989. V. 12. № 2. P. 151–156.

4. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // Differential Geometry and its Applications. 2008. V. 26. № 5. P. 544–552.

5. Zamkovoy S. Canonical connections on paracontact manifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 2009. V. 36. P. 37–60.

6. Tripathi M. M., Kılıç E., Perktaş S. Y., Keleş S. Indefinite almost paracontact metric manifolds // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2010. V. 2010. 19 p.

7. Eftal B., Kiliç E., Perktaş S. Some curvature conditions on a para-Sasakian manifold with canonical paracontact connection // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2012. V. 2012. 24 p.

8. Calvaruso G. Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // Journal of Geometry and Physics. 2013. V. 69. P. 60–73.

9. Calvaruso G., Perrone A. Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups // Periodica Mathematica Hungarica. 2014. V. 69. P. 97–108.

10. Calvaruso G., Martín-Molina V. Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle // Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923–). 2015. V. 194. P. 1359–1380.

11. Calvaruso G., Perrone A. Five-dimensional paracontact Lie algebras // Differential Geometry and Its Applications. 2016. V. 45. P. 115–129.

12. Uygun P., Atçeken M. A $(k, \mu)$-paracontact metric manifolds satisfying curvature conditions // Earthline Journal of Mathematical Sciences. 2023. V. 14. № 2. P. 175–190.

13. Uygun P., Atçeken M. A $(k, \mu)$-paracontact metric manifolds satisfying curvature conditions // Turkish Journal of Mathematics and Computer Science. 2023. V. 15. № 1. P. 171–179.

14. Tanno S. The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Mathematical Journal. 1969. V. 21. № 1. P. 21–38.

15. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry. Lecture Notes in Mathematics (V. 509). – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1976. – 148 p.

16. Смоленцев Н. К. Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 27–37.

17. Смоленцев Н. К., Шагабудинова И. Ю. О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 37–52.

18. Паньженский В. И., Растрепина А. О. Левоинвариантная парасасакиева структура на группе Гейзенберга // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 75. С. 38–51.

## REFERENCES

1. Sato, I. 1976, “On a structure similar to the almost contact structure”, *Tensor (N. S.)*, vol. 30, pp. 219–224.

2. Kaneyuki, S. & Willams, F. L. 1985, “Almost paracontact and parahodge structure on manifolds”, *Nagoya Mathematics Journal*, vol. 99, pp. 173–187.
doi: 10.1017/S0027763000021565.

3. Matsumoto, K. 1989, "On Lorentzian paracontact manifolds", *Bulletin of the Yamagata University. Natural Science*, vol. 12, no 2, pp. 151–156.

4. Diatta, A. 2008, "Left invariant contact structures on Lie groups", *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 26, no. 5, pp. 544–552. doi: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.

5. Zamkovoy, S. 2009, "Canonical connections on paracontact manifolds", *Annals of Global Analysis and Geometry*, vol. 36. pp. 37–60. doi:10.1007/s10455-008-9147-3.

6. Tripathi, M. M., Kılıç, E., Perktaş, S. Y. & Keleş, S. 2010, "Indefinite almost paracontact metric manifolds", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2010, 19 p. doi: 10.1155/2010/846195.

7. Eftal, B., Kiliç, E. & Perktaş, S. 2012, "Some curvature conditions on a para-Sasakian manifold with canonical paracontact connection", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2012, 24 p. doi: 10.1155/2012/395462.

8. Calvaruso, G. 2013, "Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures", *Journal of Geometry and Physics*, vol. 69, pp. 60–73. doi: 10.1016/j.geomphys.2013.03.001.

9. Calvaruso, G. & Martín-Molina, V. 2015, "Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle", *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, vol. 194, pp. 1359–1380. doi: 10.1007/s10231-014-0424-4.

10. Calvaruso, G. & Perrone, A. 2014, "Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups", *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 69, pp. 97–108. doi: 10.1007/s10998-014-0054-z.

11. Calvaruso, G. & Perrone, A. 2016, "Five-dimensional paracontact Lie algebras", *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 45, pp. 115–129. doi: 10.1016/j.difgeo.2016.01.001.

12. Uygun, P. & Atçeken, M. 2023, "A $(k, \mu)$-paracontact metric manifolds satisfying curvature conditions", *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, vol. 14, no. 2, pp. 175–190. doi: 10.34198/ejms.14224.175190.

13. Uygun, P. & Atçeken, M. 2023, "A $(k, \mu)$-paracontact metric manifolds satisfying curvature conditions", *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 15, no. 1, pp. 171–179. doi: 10.47000/tjmcs.1153650.

14. Tanno, S. 1969, "The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds", *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 21, no. 1, pp. 21–38. doi: 10.2748/tmj/1178243031.

15. Blair, D. E. 1976, "Contact manifolds in Riemannian geometry. Lecture notes in mathematics", *Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag*, Vol. 509, 148 p. doi: 10.1007/BFb0079307.

16. Smolentsev, N. K. 2019, "Left-invariant para-sasakian structures on Lie groups", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 62, pp. 27–37. doi: 10.17223/19988621/62/3.

17. Smolentsev, N. K. & Shagabudinova, I. Y. 2021, "On Parasasakian structures on five-dimensional Lie algebras", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 69, pp. 37–52. doi: 10.17223/19988621/69/4.

18. Pan'zhenskii, V. I. & Rastrepina, A. O. 2022, "Left-invariant para-sasakian structure on the Heisenberg group", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 75, pp. 38–51. doi: 10.17223/19988621/75/4.

Получено: 24.05.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 512.542 + 512.567.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-254-261

# Об одном вопросе, связанном с полумодулярностью решёток подгрупп конечных групп

И. А. Цыбин, Г. Н. Титов

**Цыбин Игорь Андреевич** — Кубанский государственный университет (г. Краснодар).
*e-mail: igor.trysbin@gmail.com*
**Титов Георгий Николаевич** — кандидат физико-математических наук, Кубанский государственный университет (г. Краснодар).
*e-mail: georgii_ titov@mail.ru*

**Аннотация**

В данной работе рассматриваются конечные группы, решётки подгрупп которых удовлетворяют некоторым условиям обобщённой полумодулярности. Основным результатом является теорема: если решётка подгрупп конечной группы $G$ является верхне полумодулярной, а решётка подгрупп любой её собственной подгруппы является нижне полумодулярной, то решётка подгрупп группы $G$ является 1-нижне полумодулярной.

*Ключевые слова:* конечная группа, полумодулярная решётка, обобщённо полумодулярная решётка.

*Библиография:* 20 названий.

**Для цитирования:**
Цыбин, И.А., Титов, Г.Н. Об одном вопросе, связанном с полумодулярностью решёток подгрупп конечных групп // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 254–261.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 512.542 + 512.567.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-254-261

# On question about semi-modularity of lattice of subgroups of finite groups

I. A. Tsybin, G. N. Titov

**Tsybin Igor Andreevich** — Kuban State University (Krasnodar).
*e-mail: igor.trysbin@gmail.com*
**Titov Georgy Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Kuban State University (Krasnodar).
*e-mail: georgii_ titov@mail.ru*

**Abstract**

This article considers finite groups whose lattice of subgroups satisfy certain generalized semi-modularity conditions. The main result is the theorem: the lattice of subgroups of the finite group $G$ is 1-lower semi-modular whenever the lattice of subgroups of $G$ is upper semi-modular and the lattice of subgroups of any proper subgroup of $G$ is lower semi-modular.

*Keywords:* finite group, semi-modular lattice, generalized semi-modular lattice.

*Bibliography:* 20 titles.

**For citation:**
Tsybin, I.A., Titov, G. N., 2024, "On question about semi-modularity of lattice of subgroups of finite groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 254–261.

## 1. Введение

На стыке теории групп и теории решёток ещё в тридцатых годах двадцатого века появились публикации о группах, решётка подгрупп которых удовлетворяет условиям, связанным с модулярностью или полумодулярностью [1-5]. С конца сороковых годов до настоящего времени в нашей стране набрала силу программа С. Н. Черникова изучения строения групп с заданными свойствами системы подгрупп [6].

В [7] вводятся понятия $k$-верхней и $k$-нижней полумодулярности для решёток, которые обобщают понятия верхней и нижней полумодулярности, а также доказывается, что конечная группа, решётка подгрупп которой является 1-верхне полумодулярной, является разрешимой. В [8] исследовано строение конечных неразрешимых групп, решётка подгрупп которых является 1-нижне полумодулярной. Также имеются другие результаты [9-12], связанные с конечными группами, решётка подгрупп которых удовлетворяет некоторым условиям обобщённой полумодулярности.

## 2. Предварительные сведения

Используемые в тексте обозначения общеприняты, встречающиеся понятия по теории групп могут быть найдены в источниках [13-16], а понятия по теории решёток — в [17-19]. Приведём основные определения и обозначения, которые используются в работе.

Определение 1. *Решётка $L$ с отношением «$\leq$» называется модулярной, если для любых $x, y, z \in L$ из $x \leq z$ следует выполнимость равенства $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$* [17].

Определение 2. *Конечная решётка $L$ называется верхне полумодулярной, если для любых $x, y \in L$ из того, что $x$ покрывает $x \wedge y$ следует, что $x \vee y$ покрывает $y$* [17].

Определение 3. *Конечная решётка $L$ называется нижне полумодулярной, если для любых $x, y \in L$ из того, что $x \vee y$ покрывает $y$ следует, что $x$ покрывает $x \wedge y$* [17].

Определение 4. *При $k \in \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, конечная решётка $L$ называется $k$-верхне ($k$-нижне) полумодулярной, если для любых $x, y \in L$ выполняется неравенство*

$$d(x \vee y : y) \leq d(x : x \wedge y) + k$$

$$(d(x : x \wedge y) \leq d(x \vee y : y) + k),$$

*где через $d(b : a)$ обозначается наибольшая длина среди длин всех максимальных цепей от $b$ до $a$ ($a, b \in L$ и $a \leq b$)* [7].

При $k \in \mathbb{N}_0$ через $\mathbb{M}^k$ и $\mathbb{M}_k$ обозначим классы конечных $k$-верхне полумодулярных и $k$-нижне полумодулярных решёток соответственно. Классы $\mathbb{M}^0, \mathbb{M}_0$ и $\mathbb{M}^0 \cap \mathbb{M}_0$ совпадают соответственно с классами конечных верхне полумодулярных, нижне полумодулярных и модулярных решёток. Также имеют место следующие включения: $\mathbb{M}^0 \subseteq \mathbb{M}^1 \subseteq \mathbb{M}^2 \subseteq \cdots$ и $\mathbb{M}_0 \subseteq \mathbb{M}_1 \subseteq \mathbb{M}_2 \subseteq \cdots$. При $m, n \in \mathbb{N}_0$ положим $\mathbb{M}^m \cap \mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n^m$. Конечную группу будем называть $M^m$-,$M_n$- или $M_n^m$-группой, если решётка её подгрупп лежит в соответствующем классе $\mathbb{M}^m, \mathbb{M}_n$ или $\mathbb{M}_n^m$ [7]. Также согласно [7], подгруппы и факторгруппы $M_n$-,$M^m$- и $M_n^m$-групп являются соответственно $M_n$-,$M^m$- и $M_n^m$-группами. Известно, что если конечная решётка является верхне или нижне полумодулярной, то она удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда для цепей [17]. Также, в работе, без ссылок на источники, будем использовать известные теоремы 1-6.

Теорема 1. *Решётка подгрупп конечной группы $G$ удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда для цепей тогда и только тогда, когда она является сверхразрешимой* [19].

Теорема 2. *Конечная группа $G$ является $M^0$-группой тогда и только тогда, когда она представима в виде $G = H_1 \times \cdots \times H_n$, где порядки подгрупп $H_1, ..., H_n$ попарно взаимно просты и для каждого $i \in \{1, ..., n\}$ подгруппа $H_i$ — либо квазигамильтонова примарная группа, либо группа вида $H_i = (P_{i1} \times \cdots \times P_{im_i}) \leftthreetimes Q_i$, где $P_{i1}, ..., P_{im_i}, Q_i$ — силовские примарные подгруппы группы $G$, причём*

1) *$P_{ij}$ — элементарная абелева примарная $p_{ij}$-группа для всех $j \in \{1, ..., m_i\}$;*

2) *$Q_i = \langle b_i \rangle$ — циклическая примарная $q_i$-группа;*

3) *$b_i^{-1} a_{ij} b_i = a_{ij}^{r_{ij}}$ для каждого $a_{ij} \in P_{ij}$, где $r_{ij} \not\equiv 1 \pmod{p_{ij}}$, а также $r_{ij}^{q_i^{\beta_{ij}}} \equiv 1 \pmod{p_{ij}}$;*

4) *если в качестве $\beta_{ij}$ выбрано наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющее условию 3), то $\beta_{ij_1} \neq \beta_{ij_2}$ при $j_1 \neq j_2$* [3].

Теорема 3. *Конечная группа $G$ является $M_0$-группой тогда и только тогда, когда она сверхразрешима и на каждом факторе $H_{i+1}/H_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$ главного ряда $\{1_G\} = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = G$ индуцирует либо тождественный автоморфизм, либо автоморфизм простого порядка, то есть $|(G/H_i)/C_{G/H_i}(H/H_i)|$ равно 1 или простому числу* [19].

Теорема 4. *Пусть $G, H$ — $M_0$-группы, тогда $G \times H$ — $M_0$-группа* [19].

Теорема 5. *$M_0^0$-группа $G$ представима в виде $G = H_1 \times \cdots \times H_n$, где порядки подгрупп $H_1, ..., H_n$ попарно взаимно просты и для каждого $i \in \{1, ..., n\}$ подгруппа $H_i$ — либо квазигамильтонова примарная группа, либо группа вида $H_i = P_i \leftthreetimes Q_i$, где $P_i$ — элементарная абелева примарная $p_i$-группа ($p_i \geq 3$) и $Q_i = \langle b_i \rangle$ — циклическая примарная $q_i$-группа, причём существует такое $r_i \in \{2, ..., p_i - 1\}$, что $r_i^{q_i} \equiv 1 \pmod{p_i}$ и для любых $a_i \in P_i$ имеем $b_i^{-1} a_i b_i = a_i^{r_i}$* [2].

Пусть $L$ — конечная решётка. Согласно [16], через 0 и 1 обозначаем минимальный и максимальный её элементы соответственно. При $x, y \in L$ и $x \leq y$, также согласно [16], через $y/x$ обозначаем множество $\{z \in L | x \leq z \leq y\}$, которое является подрешёткой решётки $L$. Будем говорить, что конечная неодноэлементная решётка $L$ удовлетворяет условию $\alpha$ $(\beta)$, если $L \in \mathbb{M}_0$ $(L \in \mathbb{M}^0)$ и для любого её элемента $u < 1$ подрешётка $u/0$ принадлежит классу $\mathbb{M}^0$ $(\mathbb{M}_0)$.

Приведённая ниже теорема была сформулирована в [12], а её доказательство имеется в [9].

Теорема 6. *Если решётка является решёткой подгрупп некоторой конечной неединичной группы и удовлетворяет условию $\alpha$, то группа является $M^1$-группой* [12,9].

Оказывается, имеет место в некотором смысле двойственная к указанной теорема, доказательство которой и является основным результатом данной работы.

Теорема 7. *Если решётка является решёткой подгрупп некоторой конечной неединичной группы и удовлетворяет условию $\beta$, то группа является $M_1$-группой.*

Отметим, что существует решётка, которая удовлетворяет условию $\beta$, но не принадлежит классу $\mathbb{M}_1$. Например, такой решёткой является множество

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\},$$

состоящее из подмножеств множества $\{1,2,3,4\}$ относительно отношения включения «$\subseteq$», взятого в качестве частичного порядка.

Результаты работы были доложены одним из авторов в Московском государственном университете на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2024» [20].

## 3. Доказательство теоремы 7

Предположим противное, пусть $G$ — конечная группа наименьшего порядка, не удовлетворяющая утверждению, сформулированному в теореме 7. Так как $G$ — $M^0$-группа, то по теореме 2 группа $G$ представима в виде $G = H_1 \times \cdots \times H_n$, где $H_1, ..., H_n$ — подгруппы попарно взаимно простых порядков. При $n \geq 2$ подгруппы $H_1, ..., H_n$ являются собственными и, согласно выбору $G$, являются $M_0$-группами. По теореме 4 группа $G$ является $M_0$-группой. Так как $\mathbb{M}_0 \subseteq \mathbb{M}_1$, то $G$ — $M_1$-группа и приходим к противоречию, поэтому полагаем $n = 1$.

Так как $G$ не является примарной $M_0^0$-группой, то по теореме 2 группа $G$ представима в виде $G = (P_1 \times \cdots \times P_m) \leftthreetimes Q$, где $P_1, ..., P_m$ — силовские $p_1$-, ..., $p_m$-подгруппы при попарно различных простых числах $p_1, ..., p_m$, а $Q$ — силовская $q$-подгруппа для некоторого простого числа $q$, а также выполняются следующие условия:

1) $P_i$ — элементарная абелева примарная $p_i$-группа для всех $i \in \{1, ..., m\}$;

2) $Q = \langle b \rangle$ — циклическая примарная $q$-группа;

3) $b^{-1}ab = a_i^{r_i}$ для каждого $a_i \in P_i$, причём $r_i \not\equiv 1 \pmod{p_i}$ и $r_i^{q^{\beta_i}} \equiv 1 \pmod{p_i}$;

4) если в качестве $\beta_i$ выбрано наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющее условию 3), то $\beta_i \neq \beta_j$ при $i \neq j$.

Предположим, что $m \geq 2$. Тогда подгруппы $P_1 \leftthreetimes Q, ..., P_m \leftthreetimes Q$ являются собственными, а значит являются $M_0^0$-группами (здесь учитываем, что $P_1, ..., P_m$ — нормальные подгруппы в $G$, в силу их характеристичности в нормальной подгруппе $P_1 \times \cdots \times P_m$, а также то, что $\mathbb{M}^0 \cap \mathbb{M}_0 = \mathbb{M}_0^0$). Далее, факт, что собственная подгруппа группы $G$ является $M_0^0$-группой, будем использовать по умолчанию. По теореме 5 элемент $b \in Q$ индуцирует на каждой из подгрупп $P_1, ..., P_m$ автоморфизм одного и того же простого порядка $q$. Однако это противоречит условиям 3) и 4), поэтому считаем $m = 1$. Ввиду этого полагаем, что $G = P \leftthreetimes Q$, где $P = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_k \rangle$, причём $|a_1| = \cdots = |a_k| = p$, где $p$ — простое число, больше 2, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^l$ и $q | p-1$ ($k, l \in \mathbb{N}$). Более того, для некоторого $r \in \{2, ..., p-1\}$ имеем $a_1^b = a_1^r, ..., a_k^b = a_k^r$ и $r^{q^\beta} \equiv 1 \pmod{p}$, где $\beta$ — наименьшее натуральное число, для которого выполняется это сравнение (здесь и ниже, через $x^y$, согласно [16], обозначаем $y^{-1}xy$ для элементов $x, y$ некоторой

группы). При $k \geq 2$ подгруппы $\langle a_1\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle, ..., \langle a_k\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ являются собственными, а значит являются $M_0^0$-группами (здесь учитываем, что ввиду приведённых соотношений все подгруппы из $P$ являются нормальными в $G$). По теореме 5 элемент $b$ сопряжением индуцирует на каждой из подгрупп $\langle a_1\rangle, ..., \langle a_k\rangle$ автоморфизм простого порядка $q$. Откуда, в силу теоремы 3, группа $G$ является $M_0$-группой, что приводит к противоречию. Поэтому ниже полагаем $k = 1$.

Таким образом, $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $\langle a\rangle$ — циклическая группа простого порядка $p \geq 3$, $\langle b\rangle$ — циклическая группа порядка $q^l$ и для некоторого $r \in \{2, ..., p-1\}$ имеем $a^b = a^r$, причём $r^{q^\beta} \equiv 1 \pmod p$ и $\beta$ — наименьшее натуральное число, для которого выполняется это сравнение. Понятно, что $b^{-q^\beta} a b^{q^\beta} = a$, то есть $b^{q^\beta} \in Z(G)$ и $q^\beta | p-1$ [13]. Предположим, что $\beta = 1$, тогда $b$ индуцирует на $\langle a\rangle$ автоморфизм простого порядка $q$ и, в силу теоремы 3, группа $G$ является $M_0$-группой, что противоречит её выбору. Поэтому считаем, что $l \geq \beta \geq 2$. Рассмотрим подгруппу $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b^q\rangle$, которая является собственной в $G$, а значит является $M_0^0$-группой. По теореме 4 элемент $b^q$ сопряжением индуцирует на подгруппе $\langle a\rangle$ автоморфизм простого порядка $q$, то есть $(b^q)^q \in Z(G)$ и $b^q \notin Z(G)$, поэтому $r^{q^2} \equiv 1 \pmod p$ и $\beta = 2$.

Итак, $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $\langle a\rangle$ — циклическая группа простого порядка $p \geq 3$, $\langle b\rangle$ — циклическая группа порядка $q^l$ и для некоторого $r \in \{2, ..., p-1\}$ имеем $a^b = a^r$, причём $r^{q^2} \equiv 1 \pmod p$. Теперь, для получения завершающего противоречия, покажем, что $G$ — $M_1$-группа, то есть для любых подгрупп $A, B$ группы $G$ выполняется неравенство

$$d(A : A \cap B) \leq d(\langle A, B\rangle : B) + 1. \qquad (*)$$

В случае, когда $\langle A, B\rangle$ является собственной подгруппой группы $G$, то $\langle A, B\rangle$ будет $M_0^0$-группой, что влечёт за собой выполнение неравенства $(*)$. Поэтому считаем, что $\langle A, B\rangle = G$. Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из подгрупп $A$ и $B$ является нормальной в $G$. Так как $G$ является сверхразрешимой группой, то длина $d(X : Y)$, при $X, Y \leq G$ и $Y \leq X$, равна количеству множителей в разложении числа $\frac{|Y|}{|X|}$ на необязательно различные простые сомножители [16]. Так как $|AB| = \frac{|A||B|}{|A\cap B|}$ [14], то количество множителей в разложении чисел $\frac{|AB|}{|B|}$ и $\frac{|A|}{|A\cap B|}$ совпадает, откуда следует, что $d(AB : A)$ равна длине $d(A : A \cap B)$ и неравенство $(*)$ выполняется.

Теперь рассмотрим случай, когда ни $A$, ни $B$ не являются нормальными подгруппами группы $G$. Так как порядок каждой из подгрупп не делится на $p$ и $\langle A, B\rangle = G$, то $|A|, |B| \in \{q^l, q^{l-1}\}$ и $A \cap B = \langle b^{q^2}\rangle$ (учли, что пересечение различных силовских $q$-подгрупп группы $G$ совпадает с подгруппой $\langle b^{q^2}\rangle$), то есть $|A \cap B| = q^{l-2}$. Теперь пусть $C$ — подгруппа порядка $q^l$, содержащая подгруппу $A$. Тогда $|A : A \cap B|$ делит нацело $|C : A \cap B| = \frac{q^l}{q^{l-2}} = q^2$, а значит, $d(A : A \cap B) \leq 2$. С другой стороны, так как $B$ — собственная подгруппа в $G = \langle A, B\rangle$, то $d(\langle A, B\rangle : B) \geq 1$. Поэтому $d(A : A \cap B) \leq d(\langle A, B\rangle : B) + 1$, то есть приходим к выполнимости неравенства $(*)$. Следовательно, группа $G$ является $M_1$-группой, что приводит, как было отмечено выше, к противоречию. Теорема 7 доказана.

## 4. Заключение

В заключение отметим, что условие $\beta$, сформулированное выше, не является двойственным к условию $\alpha$ в том смысле, что из выполнимости условия $\alpha$ для решётки $L$ не следует, что двойственная решётка к решётке $L$ будет удовлетворять условию $\beta$. Сформулируем условие $\alpha'$, двойственное к условию $\alpha$: будем говорить, что конечная неодноэлементная решётка $L$ удовлетворяет условию $\alpha'$, если $L \in \mathbb{M}^0$ и для любого её элемента $0 < u$ подрешётка $1/u$ принадлежит классу $\mathbb{M}_0$.

В связи с этим представляет интерес следующий вопрос: если решётка является решёткой подгрупп некоторой конечной неединичной группы $G$ и удовлетворяет условию $\alpha'$, следует

ли из этого, что $G$ является $M_1$-группой? Как оказывается, не следует. Например, решётка подгрупп группы $\langle a, b | a^{17} = b^8 = 1, a^b = a^2 \rangle$ удовлетворяет условию $\alpha'$, при этом сама группа является $M_2$-группой, но не является $M_1$-группой, то есть, согласно [11], она имеет ступень нижней полумодулярности, равную 2.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Ito, N. Note on (LM)-groups of finite order // Kodai Math. Sem. Reports. 1951. P. 1-6.
2. Iwasawa, K. On the structure of infinite M-groups // Jap. J. Math. 1943. Vol. 18. P. 709–728.
3. Jones, A. W. Semi-modular finite groups and the Burnside basis theorem // Abstract Bull. Amer. Math. Soc. 1946. Vol. 52. P. 541–560.
4. Sato, S. On groups and the lattices of subgroups // Osaka Math. J., 1949. Vol. 1. P. 135–149.
5. Suzuki, M. On the lattice of subgroups of finite groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 70. P. 345–371.
6. Черников, С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
7. Титов, Г. Н. О разрешимости обобщённо полумодулярных конечных групп // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. Т. 7. № 1. С. 66-69.
8. Титов, Г. Н. О неразрешимых $M_1$-группах заданного порядка // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 2. С. 54-61.
9. Дейнекина, А. А., Титов, Г. Н. Конечные группы с условием обобщённой полумодулярности // Алгебра и приложения: сборник научных трудов. Краснодар: КубГУ, 2023. С. 16-31.
10. Крюкова, Т. А., Титов Г. Н. Несверхразрешимые группы с обобщённым условием полумодулярности системы подгрупп // British Journal of Innovation in Science and Technology, 2019, Т. 4, № 1. с. 19-24.
11. Титов, Г. Н., Тимофеева В. В. Алгоритм нахождения ступеней полумодулярности конечной решётки // Наука. Информатизация. Технологии. Образование: материалы XIII Международной научно-практической конференции НИТО, г. Екатеринбург, 24-28 февраля 2020 г. Екатеринбург: Издательство РГППУ, 2020. С. 389-402.
12. Титов, Г. Н. О конечных группах с некоторыми условиями полумодулярности решёток подгрупп // XIV международная школа конференция по теории групп, посвященная памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова. сборник тезисов. 2022. С. 56.
13. Горчаков, Ю. М. Теория групп. Тверь: ТГУ, 1998. 112 с.
14. Каргаполов, М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
15. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 495 с.
16. Холл, М. Теория групп. М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

17. Биркгоф, Т. Теория решёток. М.: Наука, 1984. 568 с.

18. Гретцер, Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

19. Судзуки, М. Строение группы и строение структуры её подгрупп. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960.

20. Цыбин, И. А. Об одном вопросе, связанном с полумодулярностью решёток подгрупп конечных групп / И. А. Цыбин // Материалы международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2024» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, Е.И. Зимакова.– М.: МОО СИПНН Н.Д. Кондратьева, 2024.

## REFERENCES

1. Ito, N. 1951, "Note on (LM)-groups of finite order", *Kodai Math. Sem. Reports*, pp. 1-6.

2. Iwasawa, K. 1943, "On the structure of infinite M-groups", *Jap. Journal of Math*, vol. 18, pp. 709-728.

3. Jones, A. W. 1946, "Semi-modular finite groups and the Burnside basis theorem", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 52, pp. 541-560.

4. Sato, S. 1949, "On groups and the lattices of subgroups", *Osaka Math. Journal*, vol. 1, pp. 135-149.

5. Suzuki, M. 1951, "On the lattice of subgroups of finite groups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 70, pp. 345-371.

6. Chernikov, S. N. 1980, "Groups with given properties of a system of subgroups", *Nauka Publ.*, Moscow.

7. Titov, G. N. 2010, "On solvability of generalized semi-modular finite groups", *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, vol. 1, pp. 66-69.

8. Titov, G. N. 2011, "On non-solvable $M_1$-groups of given order", *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, vol. 2, pp. 54-61.

9. Deinekina, A. A., Titov, G. N. 2023, "Finite groups with generalized semi-modular condition", *Algebra and applications: collection of scientific papers*, pp. 16-31.

10. Kryukova, T. A., Titov, G. N. 2021, "Not-supersoluble groups with generalized semimodular condition of the subgroups system", *British Journal of Innovation in Science and Technology*, vol. 4, no. 1, pp. 19-24.

11. Titov, G. N., Timofeeva, V. V. 2020, "Algorithm for finding steps of semi-modular finite lattice", *Science. Information. Technologies. Education: Proc. XIII International Scientific and Practical Conference NITO*, Yekaterinburg, pp. 389-402.

12. Titov, G. N. 2022, "On finite groups with some upper semi-modularity conditions", *XIV International Conference on group theory, dedicated to the memory of V. A. Belonogov, V. A. Vedernikov and L. A. Shemetkov*, p. 56.

13. Gorchakov, Yu. M. 1998, "Group theory", *TSU*, Tver.

14. Kargapolov, M. I., Merzlyakov, Yu. I. 1982, "Fundamentals of Group Theory", *Nauka Publ.*, Moscow.

15. Kostrikin, A. I. 1977, “Introduction to algebra”, *Nauka Publ.*, Moscow.

16. Hall, M. 1962, “Group theory”, *IL Publ.*, Moscow.

17. Birkhoff, G. 1984, “Lattice theory”, *Nauka Publ.*, Moscow.

18. Grätzer, G. 1982, “Lattice theory”, *Mir Publ.*, Moscow.

19. Suzuki, M. 1960, “Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups”, *IL Publ*, Moscow.

20. Tsybin, I. A., “On question about semi-modularity of lattice of subgroups of finite groups”, *Materials of the international Scientific Conference for Undergraduate and Graduate Students and Young Scientists "Lomonosov-2024".*

Получено: 03.07.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 531.6, 539.3, 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-262-276

# Масштабные эффекты микрополярной среды в задаче о кручении цилиндрического тела

А. В. Романов

**Романов Александр Вячеславович** — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
*e-mail: atomicra@ya.ru*

**Аннотация**

Для решения некоторых краевых задач микрополярной теории упругости в работе формулируется вариационный принцип Лагранжа в обобщённых кинематических полях применительно к материалам с центром симметрии произвольной анизотропии [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Используя метод Ритца краевая задача приводится к тензорно-блочной системе линейных алгебраических уравнений. Для чего искомые кинематические векторные поля перемещений и микровращений раскладываются в ряд по базисным кусочно-полиномиальными функциям лагранжева(8-узлового КЭ) и серендипова(20-узлового КЭ) семейства[8, 14]. Для улучшения аппроксимации лагранжевыми многочленами(8-узлового КЭ), в том числе для почти несжимаемой среды, использован обобщенный метод редуцированного и селективного интегрирования[11]. Апробация построенной математической модели выполняется на задаче о кручении изотропного цилиндрического тела в рамках классической и микрополярной теории упругости с демонстрацией масштабного эффекта, в том числе по результатам экспериментальных данных [18]. Представлено сравнение полученного численного решения с аналитическим решением Сен-Венана[3] симметричной теории упругости; с аналитическим решением Готье, Ясмана[15, 16] и численным решением авторов [7] для микрополярной среды; с результатами эксперимента Лейкса[18]. При задании интегральных граничных условий(момента) на торцевой поверхности цилиндрического тела было использовано аналитическое распределение касательных и моментных напряжений [3, 15, 16].

*Ключевые слова:* задача о кручении, микрополярная среда, континуум Коссера, моментная теория упругости, вариационный принцип, тензор изгиба-кручения, тензор моментных напряжений, метод конечных элементов, матрица жесткости, редуцированное и селективное интегрирование, масштабный эффект кручения, относительная жёсткость.

*Библиография:* 18 названий.

**Для цитирования:**
Романов, А.В. Масштабные эффекты микрополярной среды в задаче о кручении цилиндрического тела // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 262–276.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 531.6, 539.3, 519.6 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-262-276

# Size effects of micropolar medium in problem on the cylindrical body torsion

A. V. Romanov

**Romanov Alexander Vyacheslavovich** — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
*e-mail: atomicra@ya.ru*

**Abstract**

In this paper, a variational principle of Lagrange of micropolar theory of elasticity is formulated for a some boundary-value problems. Anisotropic, isotropic and centrally symmetric material are considered. The Ritz method is used to obtain a system of linear algebraic equations in a form of the tensor-block stiffness matrices. The macro-displacement and the micro-rotation are expressed as a sum of products of shape functions and the generalized kinematic nodal fields. For effective approximation of the nearly incompressible micropolar material the generalized method of reduced and selective integration is used. For testing of described variational model the cylinder torsion problem of the classical and micropolar media is considered. Micropolar continuum exhibit substantial size effects in torsion(and bending)[18]: slender specimens are more rigid than anticipated via classical elasticity. Analytical solution which satisfy integral condition of torsion on the end faces is used.

*Keywords:* torsion problem, micropolar continuum, Cosserat continuum, couple stress theory, variational principle, rotation gradient tensor, couple stress tensor, finite element method, stiffness matrix, reduced and selective integration, size effect of torsion, relative stiffness.

*Bibliography:* 18 titles.

**For citation:**
Romanov, A.V. 2024, "Size effects of micropolar medium in problem on the cylindrical body torsion" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 262–276.

## 1. Введение

В связи с массовым использованием современных композиционных материалов в передовых промышленных индустриях и научно-исследовательских проектах, существует особый запрос к проектированию микро- и наноструктурных материалов(в том числе для создания искусственных костных тканей или сверхлёгких летательных и подводных аппаратов) с заданными физико-механическими свойствами. Однако существующие подходы классической теории упругости не всегда способны в достаточной степени предсказывать поведение таких материалов. Именно чувствительность модели к масштабному параметру и характеру микроструктуры среды в рамках микрополярной теории упругости обеспечивают достаточно точный прогноз механического поведения материала.

В данной работе используется теория с континуальным подходом [5, 7], на основе которой и выполняется построение модели среды со структурой. Континуальный подход, базируется на понятиях полярности и нелокальности материала, имеющего микроструктуру. Полярность указывает на то, что, помимо деформации окрестности частицы структуры, допускается ее жесткое вращение или микроповорот, в общем случае не связанный с полем перемещений, а

нелокальность указывает на зависимость физических свойств материала от влияния частиц окружения.

Согласно классификации А. Эрингена [7] для микроконтинуальной среды или среды с микроструктурой вводится микроконтинуум уровня $\mathbb{N}$. В этом случае внутренняя структура среды описывается с помощью $\mathbb{N}$ дополнительных кинематических векторов(относительно кинематического вектора макроперемещений классической теории упругости), называемых векторами структуры. В случае микроконтинуума уровня $\mathbb{N} = 1$ к микрополярным средам можно отнести жидкие кристаллы с твердыми молекулами, твердые суспензии, кровь животных с твердыми клетками, композиты с рубленными волокнами (chopped fiber composite), пенополеуретаны, стеклопластики(полые стеклянные сферы в эпоксидной смоле), костные ткани, магнитные поля, облака с пылью, бетон с гравием, мутная жидкость и др.

## 2. Вариационный принцип Лагранжа

Задачу локального минимума лагранжиана $L$ классической теории упругости [1, 2, 3, 4] не трудно сформулировать в терминах обобщённых кинематических неизвестных векторных полей макроперемещений и микровращений для микрополярной среды [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]

$$\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}\colon L(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}) \le L(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}), \quad L(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2}\,a(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}) - l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}), \quad \forall\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}\colon \mathbf{w},\boldsymbol{\psi}\,|_{\Sigma_1} = 0, \quad (1)$$

и записать условие стационарности в следующем виде

$$DL(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}) = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — действительная кинематическая система независимых векторов перемещений и микровращений соответственно; $\mathbf{w}$, $\boldsymbol{\psi}$ — кинематически допустимая система векторов, т. е. возможные перемещения и вращения из того же пространства, что и $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$; $D$ — дифференциал Гато. Возможность формулировки вариационного принципа Лагранжа связана с требованием выполнения кинематических соотношений при заданных кинематических граничных условиях на поверхности $\Sigma_1$ [1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla\mathbf{u} - \underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\boldsymbol{\varphi}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla\boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{u}\,|_{\Sigma_1} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi}\,|_{\Sigma_1} = 0, \quad (3)$$

тогда условия стационарности (2) микрополярной теории упругости приводят к уравнениям равновесия и статическим граничным условиям на поверхности $\Sigma_2$[1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]

$$\nabla\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{F} = 0, \quad \nabla\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} + \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}}\,|_{\Sigma_2} = \boldsymbol{\Sigma}, \quad \mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\,|_{\Sigma_2} = \mathbf{R}, \quad (4)$$

где $\overline{2}\otimes$ — знак внутреннего 2-произведения(двойное скалярное произведение); $\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения второго ранга, соответственно, в общем случае несимметричные; $\underset{\approx}{\mathbf{C}}$ — дискриминантный тензор третьего ранга или тензор Леви-Чивиты; $\Sigma$ — поверхность тела ($\widetilde{\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma}$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$); $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений второго ранга, соответственно, в общем случае несимметричные; $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности тела; $\mathbf{F}$ — вектор массовой силы; $\mathbf{m}$ — вектор массовых пар; $\rho$ — плотность среды; $\boldsymbol{\Sigma}$ — вектор поверхностной силы; $\mathbf{R}$ — вектор поверхностных пар. Так как рассматриваемый класс задач связан с обратимыми термодинамическими процессами, то в силу симметрии функционала $a$ из условий стационарности (2) следуют интегральные тождества

$$a(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}) = l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}),$$

$$\begin{gathered} a(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}) = \int\limits_V [\,\underset{\sim}{\mathbf{P}}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi})\overline{2}\otimes(\nabla\mathbf{w} - \underset{\simeq}{\mathbf{C}}\cdot\boldsymbol{\psi}) + \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\varphi})\overline{2}\otimes\nabla\boldsymbol{\psi}\,]dV, \\ l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}) = \int\limits_V \rho(\mathbf{F}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\psi})dV + \int\limits_{\Sigma_2}(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\psi})d\Sigma, \end{gathered} \tag{5}$$

где $V$ — объем тела; $a(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})$ — есть энергия упругих деформаций и изгиба-кручения, если приняты тождества $\mathbf{w}=\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\varphi}$, при этом $l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})$ — является работой внешних сил на соответствующих перемещениях и микровращениях. Учитывая ранее введённые обозначения, удобно записать задачу минимума функционала Лагранжа (1) в компонентах [8, 9, 10, 11]:

$$L(w,\psi) = \frac{1}{2}\,a(w,\psi;w,\psi) - l(w,\psi), \quad \forall\, w_i,\psi_i\colon\ w_i|_{\Sigma_1}=0,\ \psi_i|_{\Sigma_1}=0,$$

$$\begin{gathered} a(w,\psi;w,\psi) = \int\limits_V \left(A^{ijkl}\,(w_{l,k} - C^{\cdot\cdot m}_{kl\cdot}\psi_m)\,\left(w_{j,i} - C^{\cdot\cdot n}_{ij\cdot}\psi_n\right) + D^{ijkl}\psi_{l,k}\psi_{j,i}\right)\,dV = \\ = \int\limits_V \Big(A^{ijkl}\,w_{l,k}\,w_{j,i} - A^{ijkl}\,C^{\cdot\cdot m}_{kl\cdot}\,\psi_m\,w_{j,i} - A^{ijkl}\,w_{l,k}\,C^{\cdot\cdot n}_{ij\cdot}\,\psi_n + A^{ijkl}\,C^{\cdot\cdot m}_{kl\cdot}\,\psi_m\,C^{\cdot\cdot n}_{ij\cdot}\,\psi_n + \\ + D^{ijkl}\,\psi_{l,k}\,\psi_{j,i}\Big)\,dV, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} l(w,\psi) = \int\limits_V \left(F^j w_j + m^j\psi_j\right)\rho\,dV + \int\limits_{\Sigma_2}\left(P^j w_j + \mu^j\psi_j\right)\,d\Sigma, \\ n_i P^{ij}|_{\Sigma_2} = P^j,\ n_i\mu^{ij}|_{\Sigma_2} = \mu^j, \end{gathered}$$

где $A^{ijkl}$, $D^{ijkl}$ — компоненты материальных тензоров четвертого ранга, упоминание о которых дано ниже.

Важно отметить, что из условия существования оператора (потенциала) деформаций и изгиба-кручения для материалов с центром симметрии при изотермических процессах справедливы следующие определяющие соотношения(формулы Грина) [1, 5, 6, 7]:

$$\check{W}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}},\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}) = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}\overline{2}\otimes\underset{\approx}{\mathbf{A}}\overline{2}\otimes\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}\overline{2}\otimes\underset{\approx}{\mathbf{D}}\overline{2}\otimes\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}\right), \quad \underset{\sim}{\mathbf{P}} = \frac{\partial\check{W}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial\check{W}}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}}, \quad \left(\underset{\approx}{\mathbf{A}} = \underset{\approx}{\mathbf{A}}^T, \quad \underset{\approx}{\mathbf{D}} = \underset{\approx}{\mathbf{D}}^T\right), \tag{7}$$

где $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ — материальные тензоры четвертого ранга.

## 3. О трансверсально-изотропных, ортотропных и изотропных тензорах четвертого ранга микрополярной теории упругости

Полагая существование упругого потенциала для обратимого термодинамического процесса (7) материальные тензоры произвольной анизотропии $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ обладают симметрией $A^{ijkl} = A^{klij}$, $A^{ijkl} \neq A^{jikl}$. Аналогично и для $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$.

В этом случае трансверсально–изотропный тензор содержит 29 отличных от нуля компонент, из них 10 независимых [12, 8]

$$\begin{gathered} A^{ijkl} = a_1\gamma^{ij}_{MM}\gamma^{kl}_{NN} + a_2\gamma^{ik}_{MM}\gamma^{jl}_{NN} + a_3\gamma^{il}_{MM}\gamma^{jk}_{NN} + a_4\left(\gamma^{ij}_{MM}\gamma^{kl}_{33} + \gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{MM}\right) + \\ + a_5\left(\epsilon^{ij}\gamma^{kl}_{33} + \gamma^{ij}_{33}\epsilon^{kl}\right) + a_6\gamma^{ik}_{MM}\gamma^{jl}_{33} + a_7\left(\gamma^{il}_{MM}\gamma^{jk}_{33} + \gamma^{il}_{33}\gamma^{jk}_{MM}\right) + \\ + a_8\left(\epsilon^{il}\gamma^{jk}_{33} - \gamma^{il}_{33}\epsilon^{jk}\right) + a_9\gamma^{ik}_{33}\gamma^{jl}_{MM} + a_{10}\gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{33}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\gamma^{ij}_{MM} = g^i_M\, g^j_M$ — сумма произведений смешанных компонент единичного тензора второго ранга [1, 12, 8], $\epsilon^{ij} = \epsilon^{MN} g^i_M\, g^j_N$ — символы Леви-Чивиты. Здесь использовано правило суммирования Эйнштейна по повторяющимся индексам ($M,N = 1,2$), кроме явно указанных $\gamma^{ij}_{\alpha\alpha} = g^i_\alpha\, g^j_\alpha$ $\langle\alpha = 1,2,3\rangle$ (по $\alpha$ суммирования нет). Аналогично представляются компоненты тензора $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ с той лишь разницей, что в выражение (8) вместо $a$ и $A$ подставляются $d$ и $D$ соответственно.

Рассмотрим теперь ортотропные тензоры четвёртого ранга. Тензор $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ также как и $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ имеет 15 независимых компонент, которые имеют следующее выражение [12, 9]

$$\begin{aligned} A^{ijkl} = {} & A^{1111}\gamma^{ij}_{11}\gamma^{kl}_{11} + A^{2222}\gamma^{ij}_{22}\gamma^{kl}_{22} + A^{3333}\gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{33} + A^{1122}\left(\gamma^{ij}_{11}\gamma^{kl}_{22} + \gamma^{ij}_{22}\gamma^{kl}_{11}\right) + \\ & + A^{1133}\left(\gamma^{ij}_{11}\gamma^{kl}_{33} + \gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{11}\right) + A^{2233}\left(\gamma^{ij}_{22}\gamma^{kl}_{33} + \gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{22}\right) + A^{1212}\gamma^{ik}_{11}\gamma^{jl}_{22} + \\ & + A^{1221}\left(\gamma^{il}_{11}\gamma^{jk}_{22} + \gamma^{il}_{22}\gamma^{jk}_{11}\right) + A^{2121}\gamma^{ik}_{22}\gamma^{jl}_{11} + A^{1313}\gamma^{ik}_{11}\gamma^{jl}_{33} + A^{1331}\left(\gamma^{il}_{11}\gamma^{jk}_{33} + \gamma^{il}_{33}\gamma^{jk}_{11}\right) + \\ & + A^{3131}\gamma^{ik}_{33}\gamma^{jl}_{11} + A^{2323}\gamma^{ik}_{22}\gamma^{jl}_{33} + A^{2332}\left(\gamma^{il}_{22}\gamma^{jk}_{33} + \gamma^{il}_{33}\gamma^{jk}_{22}\right) + A^{3232}\gamma^{ik}_{33}\gamma^{jl}_{22}. \end{aligned} \tag{9}$$

Компоненты изотропных тензоров четвёртого ранга для микрополярной среды с центром симметрии могут быть определены из выражения [12, 10]

$$\begin{aligned} A^{ijkl} &= \lambda\, g^{ij}g^{kl} + \mu\left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) + \alpha\left(g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk}\right), \\ D^{ijkl} &= \delta\, g^{ij}g^{kl} + \gamma\left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) + \beta\left(g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\lambda$, $\mu$, $\alpha$, $\delta$, $\gamma$, $\beta$ — материальные параметры среды; $g^{ij}$ — компоненты единичного тензора. Как видно, каждый тензор $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ содержит по 3 независимых компонента.

## 4. Дискретизация области и подпространство базисных функций

Для нахождения локального минимума функционала Лагранжа (1) воспользуемся методом Ритца и разложим наше решение по базису кусочно-полиномиальных функций так, чтобы их линейная комбинация доставляла стационарный минимум функционалу [13, 14, 8, 2]:

$$G \supset G^N, \quad \mathbf{u}^N, \boldsymbol{\varphi}^N \in G^N, \quad \mathbf{w}^N, \boldsymbol{\psi}^N \in G^N, \quad \{\cdot\}^N = \sum_{p=1}^{N} N_p \widehat{\{\cdot\}}^p \equiv N_p \widehat{\{\cdot\}}^p, \tag{11}$$

где $G^N$ — конечномерное пространство базисных функций размерности $N$; $p = \overline{1,N}$ — узлы конечных элементов — подчиняются правилу суммирования Эйнштейна (далее знак суммы опущен); $\{\cdot\}^N$ — аппроксимированная векторная функция; $\widehat{\{\cdot\}}^p$ — вектор искомой кинематической величины $\mathbf{w}$, $\boldsymbol{\psi}$ в $p$-м узле; $N_p$ — базисные функции, или функции формы, — приняты из условий: $\xi^i \in [-1,+1]$, $N_p(\xi^i) \in [0,1]$, $N_p(\boldsymbol{\xi}^q) = \delta^q_p$, т.е. $p$-я функция формы от компонент радиуса-вектора $\boldsymbol{\xi}^q$ в $q$-м узле определяется дельтой Кронекера $\delta^q_p$, а значит, на границе пробные функции $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}^q)$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}^q)$ тождественны узловым значениям: $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}^q) \equiv \widehat{\mathbf{w}}^q$, $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}^q) \equiv \widehat{\boldsymbol{\psi}}^q$ (здесь и далее знак дискретизации векторов опущен). Таким образом, функция $N_p$ в области конечного элемента аппроксимирует искомое векторное поле и удовлетворяет граничным условиям, а вне области конечного элемента базисная функция равна нулю.

В качестве кусочно-полиномиальных базисных функций использованы лагранжевы и серендиповы многочлены (serendipity — "интуитивная прозорливость") (см. рис. 1). Для 8-узлового конечного элемента (КЭ) базисные функции имеют вид [14, 8]

$$\xi^1_p = \pm 1, \quad \xi^2_p = \pm 1, \quad \xi^3_p = \pm 1, \quad N_p\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right) = \frac{1}{8}\left(1+\xi^1_p\xi^1\right)\left(1+\xi^2_p\xi^2\right)\left(1+\xi^3_p\xi^3\right), \tag{12}$$

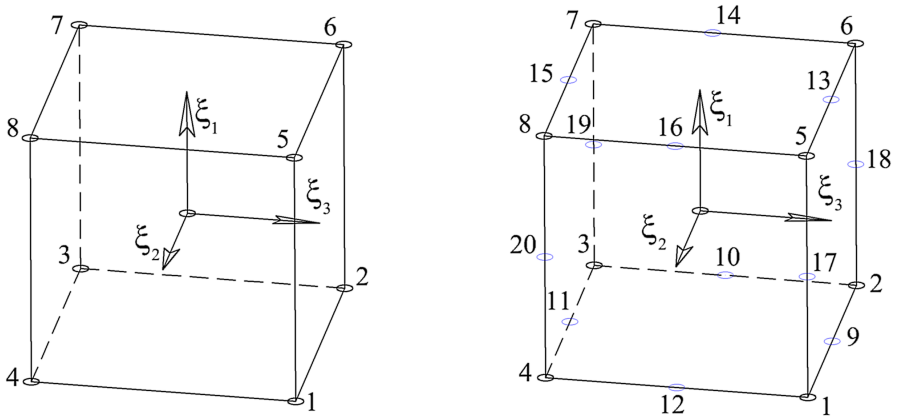



Рис. 1: Нумерация узлов и ориентация локальных осей области натуральных координат для 8-ми и 20-ти узлового конечного элемента.

где $p = \{1, 2, ..., 8\}$ — узлы конечного элемента в локальной нумерации; $\xi_p^i$ – $i$-я координата $p$-го узла; $\xi^i \in [-1; 1]$ – произвольная точка области базисной функции или области натуральных координат. Функции формы 20-узлового КЭ для вершинных и промежуточных узлов имеют вид [14, 8]:

$$
\begin{aligned}
N_p &= \frac{1}{8}\left(1+\xi_p^1\xi^1\right)\left(1+\xi_p^2\xi^2\right)\left(1+\xi_p^3\xi^3\right)\left(\xi_p^1\xi^1+\xi_p^2\xi^2+\xi_p^3\xi^3-2\right), \quad p=\{1,2,...,8\},\\
N_p &= \frac{1}{4}\left(1-\xi^{1(2)}\right)\left(1+\xi_p^2\xi^2\right)\left(1+\xi_p^3\xi^3\right), \quad \xi_p^1=0, \quad p=\{17,18,19,20\},\\
N_p &= \frac{1}{4}\left(1+\xi_p^1\xi^1\right)\left(1-\xi^{2(2)}\right)\left(1+\xi_p^3\xi^3\right), \quad \xi_p^2=0, \quad p=\{9,11,13,15\},\\
N_p &= \frac{1}{4}\left(1+\xi_p^1\xi^1\right)\left(1+\xi_p^2\xi^2\right)\left(1-\xi^{3(2)}\right), \quad \xi_p^3=0, \quad p=\{10,12,14,16\},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $\xi^{i(2)}$ — возведение в степень 2 компоненты $\xi^i$.

## 5. Система линейных алгебраических уравнений

Применим метод Ритца для функционала Лагранжа (1), (6) в области одного КЭ, выполнив дискретизацию искомых кинематических полей по пространственным координатам (11). А из условия стационарности (2) получим систему линейных алгебраических уравнений для микрополярного материала произвольной анизотропии с центром симметрии [8, 9, 10, 11]:

$$
DL(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\boldsymbol{\psi}}) = 0, \begin{cases} +\underset{(1)}{\mathbb{K}}{}_{pq}^{lj}\widehat{w}_l^p - \underset{(2)}{\mathbb{K}}{}_{pq}^{lj}\widehat{\psi}_l^p = \underset{(1)}{\mathbb{F}}{}_q^j, \\ -\underset{(3)}{\mathbb{K}}{}_{pq}^{lj}\widehat{w}_l^p + \underset{(4)}{\mathbb{K}}{}_{pq}^{lj}\widehat{\psi}_l^p = \underset{(2)}{\mathbb{F}}{}_q^j, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} +\underset{\approx}{\mathbb{K}}(1)_{pq} & -\underset{\approx}{\mathbb{K}}(2)_{pq} \\ -\underset{\approx}{\mathbb{K}}(3)_{pq} & +\underset{\approx}{\mathbb{K}}(4)_{pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}^p \\ \widehat{\boldsymbol{\psi}}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{F}(1)_q \\ \mathbb{F}(2)_q \end{Bmatrix}, \tag{14}
$$

где $\underset{(\cdot)}{\mathbb{K}}{}_{pq}^{lj} = \underset{(\cdot)}{\mathbb{K}}{}_{qp}^{jl}$ — компоненты тензорно-блочных матриц жесткости симметричны в силу (7), и для локальной области элемента примут вид [8, 9, 10, 11]

$$\underset{(1)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} A^{ijkl} N_{p,s} N_{q,t}\, B^s_k B^t_i J\, dV_\xi, \quad \underset{(2)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} A^{ijkm} C^{\cdot\cdot l}_{km\cdot} N_p N_{q,t} B^t_i J\, dV_\xi,$$

$$\underset{(3)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} A^{inkl} N_{p,s} C^{\cdot\cdot j}_{in\cdot} N_q B^s_k J\, dV_\xi,$$

$$\underset{(4)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} \left[ A^{inkm} N_p N_q C^{\cdot\cdot l}_{km\cdot} C^{\cdot\cdot j}_{in\cdot} + D^{ijkl} N_{p,s} N_{q,t} B^s_k B^t_i \right] J\, dV_\xi, \tag{15}$$

$$\underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^{j}_{q} = \int\limits_{V_e} F^j N_q J\rho\, dV_\xi + \int\limits_{\Sigma_2} S^j N_q J_\Sigma\, d\Sigma_\xi, \quad \underset{(2)}{\mathbb{F}}{}^{j}_{q} = \int\limits_{V_e} m^j N_q J\rho\, dV_\xi + \int\limits_{\Sigma_2} R^j N_q J_\Sigma\, d\Sigma_\xi,$$

где $V_\xi, \Sigma_\xi$ — объем и поверхность тела в области мастера-элемента соответственно; $B$, $J$, $J_\Sigma$ — функция обратной матрицы Якоби, объёмного и поверхностного якобиана, соответственно, связывают область мастера-элемента с декартовой областью [8, 14]

$$\frac{\partial x^k}{\partial \xi^j} = A^k_j, \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = B^i_k, \quad \frac{\partial N_p}{\partial x^k} = \frac{\partial N_p}{\partial \xi^s}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} = \frac{\partial N_p}{\partial \xi^s} B^s_k, \quad \frac{\partial N_q}{\partial x^i} = \frac{\partial N_q}{\partial \xi^t}\frac{\partial \xi^t}{\partial x^i} = \frac{\partial N_q}{\partial \xi^t} B^t_i,$$

$$dV = J\, dV_\xi, \quad \mathbf{n}\, d\Sigma = \mathbf{n} J_\Sigma\, d\Sigma_\xi, \quad \mathbf{n} J_\Sigma = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^j} \right), \quad J = det\,[A^i_j]. \tag{16}$$

Здесь $A^i_j$ — матрица Якоби; $\mathbf{x}$ — векторная функция отображения области мастер-элемента на декартову область

$$x^i = x^i\left(\xi^j\right), \quad x_i = N_p\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right) \widehat{x}^p_i, \tag{17}$$

где $\widehat{x}^p_i$ — $i$-я декартова координата $p$-го узла КЭ. Иными словами в соотношениях (11) и (17) используются выражения одних и тех же функций форм (12), (13), которые и формируют изопараметрические КЭ [8, 14]. Для составления системы линейных алгебраических уравнений по всей области дискретной модели выполним процедуру ассемблирования уравнений (14) по всем КЭ. Отобразив локальные индексы узлов $p, q$ по номеру конечного элемента $e$ на глобальные узлы $P = P(p, e)$, $Q = Q(q, e)$ и выполняя суммирование одноимённых компонент тензорно-блочной матрицы жёсткости и вектора внешних сил и пар [8, 14]

$$\sum_{e=1}^{E} \sum_{p,q=1}^{n} \mathbb{K}^{lj}_{P(p,e)Q(q,e)} = \mathbb{K}^{lj}_{PQ}, \quad \sum_{e=1}^{E} \sum_{q=1}^{n} \mathbb{F}^{j}_{Q(q,e)} = \mathbb{F}^{j}_{Q}, \tag{18}$$

получим итоговую систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных $\widehat{w}^P_l$, $\widehat{\psi}^Q_l$ в глобальной индексации

$$\mathbb{K}^{lj}_{PQ} \widehat{\{\cdot\}}{}^P_l = \mathbb{F}^j_Q, \tag{19}$$

где $E$ — число конечных элементов всей модели; $n$ — число локальных узлов КЭ; $N$ — число узлов во всей глобальной области. Важно отметить, что для решения системы (19), элементы которой содержат объемные и поверхностные интегралы от функций и их первых производных, заданных в декартовой системе координат, применяется численное интегрирование Гаусса–Лежандра на отрезке [–1,+1]. По этой причине интегральные зависимости (15) и были представлены в области мастера-элемента. Так что в результате такого отображения произвольный призматический элемент переходит в куб с координатами на отрезке [–1,+1].

Компоненты подынтегральных тензорно-блочных матриц жёсткости и векторов сил(пар) для среды произвольной анизотропии выписаны в работах [11, 12, 14] и были получены подстановкой выражений материальных тензоров $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ (8) — (10) в соотношения (15). Вспомним, что в работе [10] были выписаны подынтегральные выражения $\underset{(1)}{K}{}^{lj}_{pq} - \underset{(4)}{K}{}^{lj}_{pq}$ с производными по декартовым координатам для изотропного материала

$$\begin{aligned}
&\underset{(1)}{K}{}^{lj}_{pq} = \lambda\, N_{p,l} N_{q,j} + (\mu+\alpha)\, N_{p,i} N_{q,i}\, \delta_{jl} + (\mu-\alpha)\, N_{p,j} N_{q,l},\\
&\underset{(2)}{K}{}^{lj}_{pq} = -2\alpha\, \epsilon_{lji}\, N_p N_{q,i}, \quad \underset{(3)}{K}{}^{lj}_{pq} = 2\alpha\, \epsilon_{ljk}\, N_{p,k} N_q,\\
&\underset{(4)}{K}{}^{lj}_{pq} = \delta\, N_{p,l} N_{q,j} + (\gamma+\beta)\, N_{p,i} N_{q,i}\, \delta_{jl} + (\gamma-\beta)\, N_{p,j} N_{q,l} + 4\alpha\, N_p N_q \delta_{lj}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Не трудно заметить, что при $\alpha = 0$ система (14), (15), (20) получается расщеплённой относительно $\widehat{w}$, $\widehat{\psi}$ и тождественна классической системе линейных алгебраических уравнений относительно первого блока. Если положим $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то получим систему расщеплённых и однородных уравнений, с точностью до обозначений материальных констант, схожую с классической теорией упругости [8, 5].

## 6. Задача о кручении цилиндрического тела

**Постановка задачи и общее решение.** Рассмотрим краевую задачу классической [3] и микрополярной теории упругости [15, 16] о кручении цилиндрического изотропного тела, под действием осевого крутящего момента $T$ (см. рис. 2). Поставим задачу об определении напряжённо-деформированного состояния (НДС) микрополярной теории упругости в рамках теории малых деформаций и сравним результаты численного эксперимента вышеизложенной вариационной модели (1), (14) – (20):

— с аналитическим решением симметричной теории упругости Сен-Венана [3];

— с аналитическим решением Готье [15, 16];

— с численным решением вариационной модели [17];

— с результатами эксперимента Лейкса о кручении ретикулированного пенополеуретана [18].

Состояние равновесия цилиндрического тела рассмотрим без учёта переменной температуры и массовых сил(пар). Тогда уравнения равновесия и статические граничные условия на границе $\Sigma_2$ (4) для декартовой области в компонентах будут иметь вид:

$$p_{\,ji,j} = 0, \quad \mu_{\,ji,j} + \epsilon_{ijk}\, p_{\,jk} = 0, \quad n_j\, p_{ji}\,|_{\Sigma_2} = S_i, \quad n_j\, \mu_{ji}\,|_{\Sigma_2} = R_i. \tag{21}$$

Определяющие соотношения (7) для изотропной среды с центром симметрии (10) для декартовой области в компонентах[4, 6]:

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= \lambda\, \gamma_{kk}\, \delta_{ij} + (\mu+\alpha)\, \gamma_{ij} + (\mu-\alpha)\, \gamma_{ji},\\
\mu_{ij} &= \gamma\, \varkappa_{kk}\, \delta_{ij} + (\delta+\beta) \varkappa_{ij} + (\delta-\beta) \varkappa_{ji}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Если для несимметричного тензора деформаций $\gamma_{ij}$ выделить его симметричную $\gamma_{(ij)} = \varepsilon_{ij}$ и кососимметричную часть, зависящую от разности макро- и микроповоротов $\gamma_{[ij]} = \epsilon_{ijk}\,(\vartheta_k - \psi_k)$, то компоненты тензора напряжений можно выразить так

$$p_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij} + 2\alpha\, \epsilon_{ijk}\,(\vartheta_k - \psi_k), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(w_{j,i} + w_{i,j}), \quad \vartheta_k = \frac{1}{2}\, w_{j,i}\, \epsilon_{ijk}. \tag{23}$$

Здесь $\lambda$, $\mu$, $\alpha$, $\delta$, $\gamma$, $\beta$ — материальные параметры микрополярной изотропной среды, определяются из выражений

$$\lambda = \frac{G\,(E-2G)}{3G-E}, \quad \mu = G, \quad \alpha = \frac{G\,N^2}{1-N^2}, \\ \gamma = 2\,G\,l_t^2\,\frac{1-\Psi}{\Psi}, \quad \delta = G\,l_t^2, \quad \beta = G\,(4\,l_b^2 - l_t^2), \tag{24}$$

где $G$ — модуль сдвига; $E$ — модуль Юнга; $N$ — число несимметричности “coupling number”; $\Psi$ — полярный коэффициент “polar ratio”; $l_t$ — масштабный параметр длины при кручении; $l_b$ — масштабный параметр длины при изгибе [6, 18].

Кинематические соотношения (3) в компонентной форме для декартовой области

$$\gamma_{ij} = w_{j,i} - \epsilon_{ijk}\psi_k, \quad \varkappa_{ij} = \psi_{j,i} \tag{25}$$

замыкают систему (21), (22), (25) из 38 уравнений относительно 38 неизвестных $p_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ij}$, $\varkappa_{ij}$, $w_i$, $\psi_i$.

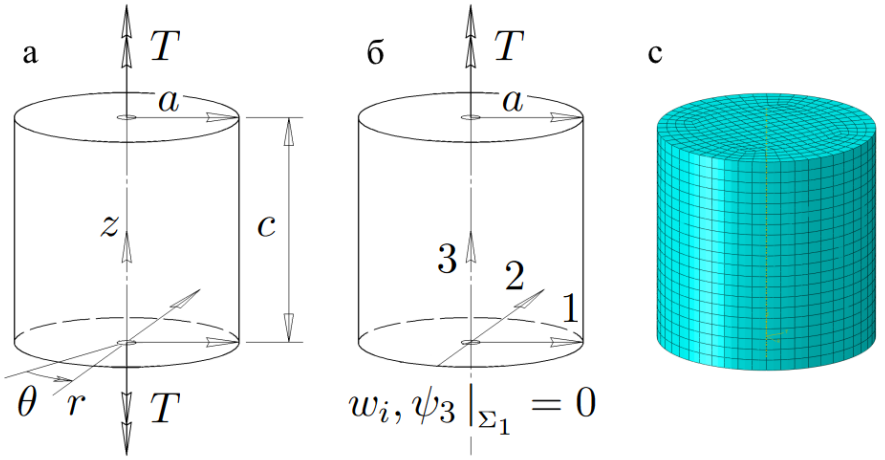



Рис. 2: Расчётная схема цилиндрического тела к аналитическому решению (а); к численному решению вариационной постановки (б); конечно-элементная схема (с)

Отметим, что аналитическое решение данной задачи в цилиндрических координатах $(r, \theta, z)$ представлено в работах [15, 16]. По условию задачи боковая поверхность цилиндрического тела $r = a$ является свободной $n_j\,p_{ji}\,|_{\Sigma_2} = 0$, $n_j\,\mu_{ji}\,|_{\Sigma_2} = 0$. На торцевых гранях $z = 0$, $z = c$ заданы поверхностные силы и пары, которые приводятся к паре с осевым моментом $T$

$$T = -\int\limits_{\Sigma_{z=0}} (r\,p_{z\theta} + \mu_{zz})\,d\Sigma, \quad T = \int\limits_{\Sigma_{z=c}} (r\,p_{z\theta} + \mu_{zz})\,d\Sigma. \tag{26}$$

Система уравнений и краевые условия симметричной теории упругости являются частным случаем микрополярной теории и легко получаются из выражений (21) – (23), (25), (26) полагая $\mu_{ij}$, $\varkappa_{ij}$, $\psi_i$ равными нулю [3]. Тогда передача нагрузок через элемент поверхности происходит только лишь за счёт главного вектора напряжений $\mathbf{P}$, образуя в элементе объёма симметричные тензорные поля $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$. Выпишем аналитическое решение задачи (21), (22), (25), (26) в цилиндрических координатах $(r, \theta, z)$ [16] с точностью до обозначений и выражений

материальных параметров

$$
\begin{gathered}
p_{\theta z} = \mu\, C_1\, r - 2\alpha\, C_9\, I_1(pr), \quad p_{z\theta} = \mu\, C_1\, r + 2\alpha\, C_9\, I_1(pr), \\
\mu_{rr} = (\gamma + 2\delta)\, p\, C_9\, I_0(pr) - \frac{2\delta}{r}\left(C_9\, I_1(pr) + \frac{C_1 r}{2}\right), \\
\mu_{\theta\theta} = \gamma\, p\, C_9\, I_0(pr) + \frac{2\delta}{r}\left(C_9\, I_1(pr) - \frac{C_1 r}{2}\right), \quad \mu_{zz} = \gamma\, p\, C_9\, I_0(pr) + 2\delta\, C_1, \\
u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = C_1\, rz, \quad \theta = \frac{u_\theta}{r}, \quad \varphi_r = -\frac{C_1 r}{2} + C_9\, I_1(pr), \quad \varphi_z = C_1 z,
\end{gathered}
\tag{27}
$$

где $\theta$ — угол закручивания при заданной координате $z$; $I_n$ — модифицированная функция Бесселя первого рода $n$-го порядка; $p$, $C_1$, $C_9$ — параметры, определяемые из выражений

$$
\begin{gathered}
p^2 = \frac{4\alpha}{\gamma + 2\delta}, \quad A = \pi a^2, \\
C_9 = \frac{T}{2A}\left[\left(\frac{\mu a^2}{4\delta} + \frac{3}{2}\right)(\gamma + 2\delta)\, pI_0(pa) - \left(\frac{\mu a^2}{4\delta} + 2\right)\frac{2\delta}{a}\, I_1(pa)\right]^{-1}, \\
C_1 = 2C_9\left(\frac{\gamma + 2\delta}{2\delta} pI_0(pa) - \frac{I_1(pa)}{a}\right).
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Аналитическое решение симметричной теории упругости, используя полуобратный метод Сен-Венана с точностью до обозначений имеет вид [3]

$$
\begin{gathered}
C_0 = \frac{2T}{\mu\pi a^4}, \quad u_1 = -C_0 zy, \quad u_2 = C_0 zx, \quad u_\theta = C_0 zr, \quad \theta = \frac{u_\theta}{r}, \\
p_{31} = p_{13} = -C_0 \mu y, \quad p_{32} = p_{23} = C_0 \mu x, \quad p_{\theta z} = p_{\theta z} = C_0 \mu r.
\end{gathered}
\tag{29}
$$

Для оценки масштабного эффекта при кручении используется параметр относительной жёсткости (“relative stiffness”)[16]

$$
\Omega = 1 + 6\left(\frac{l_t}{a}\right)^2 \frac{1 - \dfrac{4}{3}\Psi\chi}{1 - \Psi\chi}, \quad l_t^2 = \frac{\delta}{\mu}, \quad \chi = \frac{I_1(pa)}{pa\, I_0(pa)},
\tag{30}
$$

который легко выразить через отношение перемещений $u_\theta / u_{\theta_m}$, если учесть жёсткость как отношение момента к углу закручивания для микрополярной $T/\theta_m$ и классической $T/\theta$ теории [3, 16]

$$
\Omega = \frac{T}{\theta_m} \cdot \frac{\theta}{T} = \frac{u_\theta}{u_{\theta_m}},
\tag{31}
$$

где $\theta_m$, $u_{\theta_m}$ — определяются выражениями (27); $\theta_m$, $u_{\theta_m}$, — выражениями (29). По этому для построения кривой относительной жёсткости в рамках вариационной модели согласно схеме рис. 2 б, с, геометрические параметры варьируются в интервале согласно условиям, представленным ниже, для рассмотренных моделей. Важно отметить, что исходя из положительной определённости оператора (потенциала) деформаций и изгиба-кручения (7) для параметров изотропной среды $p^2$, $l_t^2$, $\chi$ должны выполняться неравенства [16]

$$
p^2 \geqslant 0, \quad l_t^2 \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \Psi \leqslant \frac{3}{2}, \quad 0 \leqslant \chi \leqslant \frac{1}{2}.
\tag{32}
$$

**Первая модель.** К оценке и сравнению численного решения вариационной модели (1), (14) – (20) с аналитическим (27) – (31)[3, 16] и численным решением авторов [17] рассмотрим расчётную схему рис. 2 б, с, геометрические параметры которой $a = 0.2$ мм, $c = 0.4$ мм. Аппроксимация векторных полей $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$ выполнялась как 8-узловыми лагранжевыми КЭ (12) так и 20-узловыми серендиповыми КЭ (13)(к сравнению). Для 8-узлового элемента использовалась схема редуцированного и селективного интегрирования, используемая в том числе для почти несжимаемой среды [11, 14]. Это позволило получить точность результатов для 8-узловых КЭ сопоставимую с 20-узловыми. Конечно-элементная схема состоит из 6720 8-узловых(20-узловых) элементов. Общее количество узлов $N = 7581$ для 8-узловых КЭ и $N = 29417$ для 20-узловых. Число уравнений для микрополярной теории упругости $6N$ и $3N$ – для классической. Материальные параметры среды [Н/мм$^2$] $\lambda = 157513$, $\mu = 10500$, $\alpha = 3500$; [Н] $\gamma = 0$, $\delta = 105$, $\beta = -105$ соответствуют параметрам $E = 30843.8$ Н/мм$^2$, $\nu = 0.46875$, $N = 0.5$, $\Psi = 1$, $l_t = 0.1$ мм, $l_b = 0$ мм, указанным в работе [17]. Кинематические граничные условия заданы на торцевой поверхности модели $z = 0$

$$w_i,\ \psi_3\ |_{\Sigma_1} = 0 \tag{33}$$

дополняют естественные граничные условия(граничные условия Неймана или граничные условия 2-го рода) на свободной поверхности. На торцевой поверхности $z = c$ краевые условия определяются выражением (26) с осевым крутящим моментом $T = 1$ Н·мм. Для удовлетворения этому условию на данной грани приложим поверхностные силы $p_{z\theta}$ и пары $\mu_{zz}$ используя выражения (27), которые в последствии приводятся к узловым силам $\underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^j_q$ и парам $\underset{(2)}{\mathbb{F}}{}^j_q$ (15) следующим образом

$$\begin{gathered}
\underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^j_q = \int\limits_{\Sigma_2} S^j N_q J_\Sigma \, d\Sigma_\xi, \quad \underset{(2)}{\mathbb{F}}{}^j_q = \int\limits_{\Sigma_2} R^j N_q J_\Sigma \, d\Sigma_\xi, \quad R^1 = R^2 = 0, \quad R^3 = \mu_{zz}, \\
S^1 = -\frac{x^2 p_{z\theta}}{r}, \quad S^2 = \frac{x^1 p_{z\theta}}{r}, \quad S^3 = 0, \quad r = \sqrt{x^I x^I}, \quad I = 1, 2,
\end{gathered} \tag{34}$$

где $x^I$ — компоненты векторной функции (17). Поверхностные интегралы брались численно по 2-точечной схеме Гаусса для каждого из направлений 8-узлового КЭ(4 точки интегрирования) и по 3-точечной схеме для 20-узлового КЭ(9 точек интегрирования). Именно учёт аналитического(нелинейного) распределения как напряжений $p_{z\theta}$, так и моментных напряжений $\mu_{zz}$ (к задаче при $\Psi = 1.5$), согласно (34) позволил на порядок повысить точность результатов, в отличие от работы авторов [17], где использована линейная аппроксимация для $p_{z\theta}$, а величина $\mu_{zz}$ является постоянной $\Psi = 1 \longrightarrow \gamma = 0 \longrightarrow \mu_{zz,r} = 0$. Что очевидно из выражений (24), (27).

**Вторая модель.** Сравнение численного решения с результатами эксперимента Лейкса [18] в задаче о кручении образца из ретикулированного пенополеуретана с размером ячейки 0.4 мм выполняется по аналогичной схеме (см. рис. 2 б, с) первой модели (число узлов и элементов, – аналогичное). Однако определению подлежит только лишь параметр относительной жёсткости $\Omega$. В связи с этим, геометрические параметры варьируются от $a = 1.3$ мм, $c = 2.6$ мм до $a = 20$ мм, $c = 40$ мм. Материальные параметры [Н/мм$^2$] $\lambda = 4.2E-002$, $\mu = 2.8E-002$, $\alpha = 1.379$; [Н] $\gamma = -4.779E-002$, $\delta = 7.168E-002$, $\beta = -0.072$ соответствуют принятым параметрам $E = 7.28E-002$ Н/мм$^2$, $\nu = 0.3$, $N = 0.99$, $\Psi = 1.5$, $l_t = 1.6$ мм, $l_b = 0$ мм в работе [18]. Кинематические граничные условия (33) на торцевой поверхности $z = 0$ также дополняют естественные граничные условия на свободной поверхности. На торцевой поверхности $z = c$ поверхностные силы и пары с осевым моментом $T = 0.002$ Н·мм приводятся к узловым силам и парам также по выражению (34).

## 7. Анализ и сравнение результатов численного эксперимента

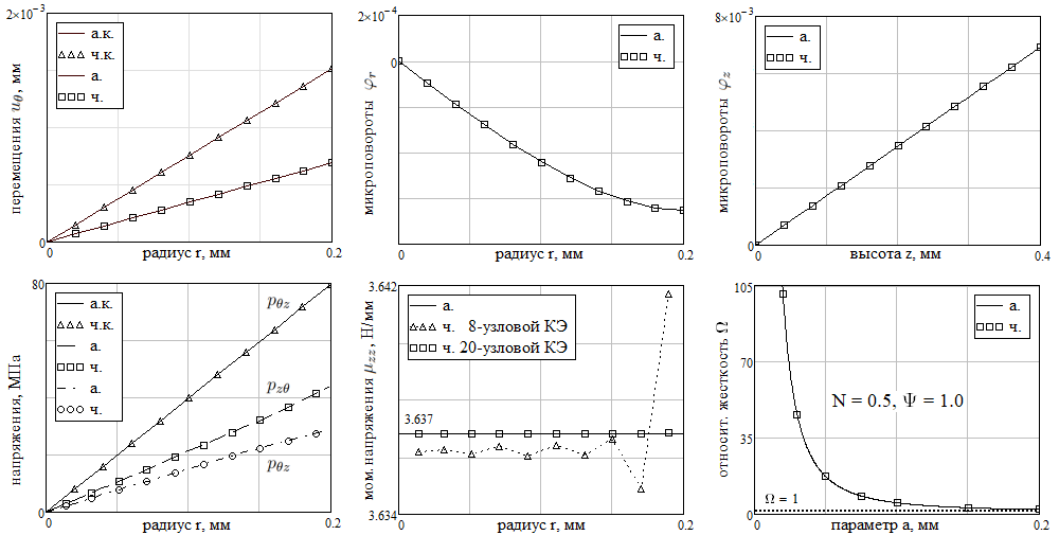



Рис. 3: Зависимость параметров напряжённо-деформированного состояния от радиуса $r$, высоты $z$ и параметра модели $a$, где а. — обозначение легенды аналитических кривых; ч. — численное решение; к. — классическая теория упругости, иначе — микрополярная.

Для перемещений $u_\theta$ графики зависимости были построены в сечении $z = c/2$. Компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений для изотропного материала с центром симметрии были аппроксимированы базисными функциями при $\xi^i = 0$ по узловым кинематическим величинам из выражений

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \lambda N_{p,k}\,\widehat{w}^p_k\,\delta_{ij} + (\mu+\alpha)N_{p,i}\,\widehat{w}^p_j + (\mu-\alpha)N_{p,j}\,\widehat{w}^p_i - 2\,\alpha\,\epsilon_{ijm}\,N_p\,\widehat{\psi}^p_m, \\ \mu_{ij} &= \gamma N_{p,k}\,\widehat{\psi}^p_k\,\delta_{ij} + (\delta+\beta)N_{p,i}\,\widehat{\psi}^p_j + (\delta-\beta)N_{p,j}\,\widehat{\psi}^p_i. \end{aligned} \tag{35}$$

Рассмотрим результаты первой модели см. рис. 2, 3. Относительная погрешность величин $u_\theta$, $p_{z\theta}$, $p_{\theta z}$ между аналитическим и численным решением при аппроксимации 8-узловыми КЭ в рамках классической теории составила 0.001div0.008 % и 0.018div0.030 %, – в рамках микрополярной теории. При этом для данного типа элемента, как было указано выше, использовался метод редуцированного и селективного интегрирования [11]. А вот аппроксимация 20-узловыми КЭ в рамках микрополярной теории показала несколько меньшую погрешность 0.001div0.008 %. Что касается аппроксимации величин $\varphi_r$ 20-узловыми КЭ, то наибольшая относительная погрешность составила 0.028 %, что на порядок меньше 8-узловых КЭ. Это и очевидно, учитывая нелинейных характер распределения $\varphi_r$ вдоль радиального направления. Также достаточно точной оказалась аппроксимация величины $\varphi_z$ с наибольшей погрешностью 0.05 % для 8-узловых КЭ и менее 0.001 % для 20-узловых. Любопытной оказалась аппроксимация величины $\mu_{zz}$ 8-узловыми элементами с относительной погрешностью 0.006div0.134 %. Однако 20-узловые элементы обеспечили относительную погрешность менее 0.00016 %. Несущественной оказалась и относительная погрешность при определении величины $\Omega$, всего лишь 0.001div0.02 %, которую дали 8-узловые элементы.

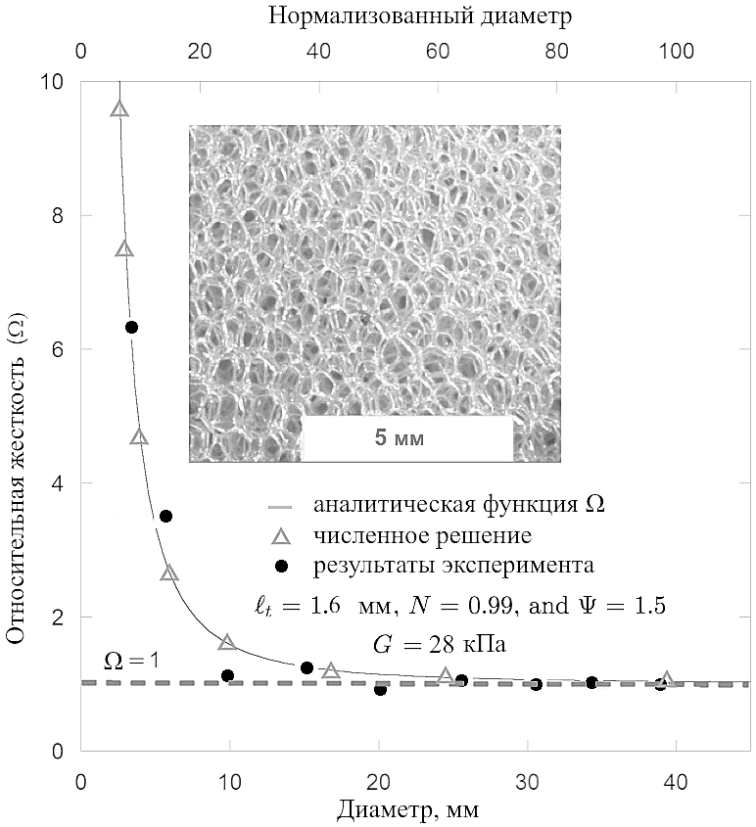



Рис. 4: Масштабный эффект при кручении образца из пенополеуретана с размером ячейки 0.4 мм. Относительная жёсткость $\Omega$ задана выражением (30); $\Delta$ — численное решение модели (1), (14) – (20), рис. 2 б, с; • — экспериментальные данные [18].

Вторая модель(кручение цилиндрического образца из ретикулированного пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм рис. 2, 4). Относительная погрешность между численным и аналитическим решением параметра $\Omega$ как и для первой модели несущественна. В тоже время наблюдаемый по результатам эксперимента масштабный эффект достаточно хорошо согласуется с найденными параметрами $N = 0.99$, $\Psi = 1.5$, $l_t = 1.6$ мм при $R^2 = 0.85$ согласно работе Лейкса [18] в рамках микрополярной теории упругости, чего не может предсказать классическая теория упругости.

## 8. Заключение

Из сравнения описанных выше результатов в рамках численного решения вариационной модели (1), (14) – (20) к задаче о кручении цилиндрического тела можно сделать вывод что, математический аппарат микрополярной теории упругости реализован корректно, а чувствительность модели к масштабному эффекту позволяет в достаточной степени предсказывать физическое поведение материала с микроструктурой. Это является актуальным при проектировании свойств композиционных материалов с микро- и наноструктурой.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. 2-е изд // М.: Изд-во МГУ, 1995.
2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач // М.: Мир, 1980.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. 6-е изд. // СПб.: Лань. 2004.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975.
5. Никабадзе М.У. Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Изд-во МГУ имени М.В. Ломоносова, 2023.
6. Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Vienna: Springer-Verlag; 1972.
7. Eringen A. Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids. New York: Springer-Verlag; 2012.
8. Романов А.В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае трансверсально–изотропной среды.// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 4. с. 35-39. URL: https://doi.org/10.3103/S0027133022040045
9. Романов А.В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае ортотропной среды.// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 1. с. 68-72. URL: https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-68-72
10. Романов А.В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости при неизотермических процессах.// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 2. с. 64-68. URL: https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-12
11. Романов А.В. Применение метода редуцированного и селективного интегрирования в задачах микрополярной теории упругости. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 1. с. 65-69. URL: https://dx.doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-1-8
12. Nikabadze M.U. Topics on tensor calculus with applications to mechanics // J. Math. Sci. 2017. **225**, N 1. URL: https://doi.org/10.1007/s10958-017-3467-4
13. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Лекции по теории упругости. – М.: Ленанд, 2018. 208 с.
14. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.
15. Gauthier R. D., Analytical and Experimental Investigations in Linear Isotropic Micropolar Elasticity. Doctoral dissertation, University of Colorado, 1974.
16. Gauthier R, Jahsman W. A quest for micropolar elastic constants. J Appl Mech 1975; 42(2): 369 – 74. URL: https://doi.org/10.1115/1.3423583
17. Grbčić S., Ibrahimbegović A., Jelenić G. Variational formulation of micropolar elasticity using 3D hexahedral finite-element interpolation with incompatible modes. 2018. URL: https://doi.org/ 10.1016/j.compstruc.2018.04.005
18. Rueger Z., Lakes R. S. Experimental Cosserat elasticity in open cell polymer foam. // Philosophical Magazine, 96 (2), 93-111, January 2016. URL: https://doi.org/10.1080/ 14786435.2015.1125541

## REFERENCES


1. Pobedrya, B.E. 1995, “Chislennue metody v teorii uprugosti i plastichnosti: Uch. posobue, 2-e izd.”, *M.: Izd-vo MGU.*
2. Ciarlet, P. 1978, “The finite element method for elliptic problems”, *New York*, Oxford.
3. Sedov, L.I. 2004, “Mehanica sploshnoj sredu”, *Spb.: Lanj*,Vol.2 6-e izd.
4. Nowacki, W. 1975, “Teoria uprugosti”, *M.: Mir.*
5. Nikabadze, M.U. 2023, “Razvitie metoda ortogonalnuh polinomov v mehanike micropolyarnuh i klassicheskih uprugih tonkih tel”, *M.: Izd-vo MGU imeny M.V. Lomonosova.*
6. Nowacki, W. 1972, “Theory of micropolar elasticity”, *Vienna, Springer-Verlag.*
7. Eringen, A. 2012, “Microcontinuum field theories: I”, *Foundations and solids. New York: Springer-Verlag*
8. Romanov, A.V. 2022, “A Variational Principle of Lagrange of the Micropolar Theory of Elasticity in the Case of Transversely Isotropic Medium”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 77, pp. 93-–98. URL: https://doi.org/10.3103/S0027133022040045
9. Romanov, A.V. 2023, “On the Variational Principle of Lagrange of the Micropolar Elasticity Theory in the Case of Orthotropic Medium”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 78, pp. 23-–28. URL: https://doi.org/10.3103/S0027133023010041
10. Romanov, A.V. 2023, “On the Variational Principle of Lagrange in the Micropolar Theory of Elasticity at Nonisothermal Processes”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 78, pp. 114—118. URL: https://doi.org/10.3103/S0027133023040052
11. Romanov, A.V. 2024, “Reduced and selective integration method for micropolar theory of elasticity”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, № 1. pp. 65–69. https://dx.doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-1-8
12. Nikabadze, M.U. 2017, “Topics on tensor calculus with applications to mechanics”, *J. Math. Sci.*, **225**, № 1. URL: https://doi.org/10.1007/s10958-017-3467-4
13. Pobedrya, B.E., Georgievsky D.V. 2018, “Lekcii po teorii uprugosti”, *M.: Lenland*, 208 p.
14. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J.Z. 2013, “The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals”, *Oxford: Butterworth-Heinemann*, 7th ed.
15. Gauthier, R. D., Analytical and Experimental Investigations in Linear Isotropic Micropolar Elasticity. Doctoral dissertation, University of Colorado, 1974.
16. Gauthier, R, Jahsman, W. 1975, “A quest for micropolar elastic constants”, *J. Appl. Mech.*, 42(2):369–74. URL: https://doi.org/10.1115/1.3423583
17. Grbčić, S., Ibrahimbegović, A., Jelenić, G. 2018, “Variational formulation of micropolar elasticity using 3D hexahedral finite-element interpolation with incompatible modes”. URL: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.04.005
18. Rueger, Z., Lakes, R. S. 2016, “Experimental Cosserat elasticity in open cell polymer foam”, *Philosophical Magazine*, 96 (2), pp. 93–111. https://doi.org/10.1080/14786435.2015.1125541


Получено: 23.07.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 510:531 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-277-291

# Пафнутий Львович Чебышёв – академик Императорской Санкт-Петербургской академии наук (к 300-летию Российской академии наук и Санкт-Петербургского государственного университета)

Г. В. Павилайнен, А. А. Тихонов, М. П. Юшков

**Павилайнен Галина Вольдемаровна** — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
*e-mail: g.pavilaynen@spbu.ru*
**Тихонов Алексей Александрович** — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
*e-mail: a.tikhonov@spbu.ru*
**Юшков Михаил Петрович** — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
*e-mail: m.yushkov@spbu.ru*

**Аннотация**

В статье приводятся краткие биографические сведения о гениальном, всемирно известном учёном, академике Императорской Санкт-Петербургской академии наук Пафнутии Львовиче Чебышёве (1821-1894). Обсуждается правильное ударении в фамилии учёного. Отмечаются учебно-научная, педагогическая деятельность и общественно-административная работа П.Л. Чебышёва. Сжато излагаются достижения П. Л. Чебышёва в области математики, более подробно – в механике. Задачи синтеза механизмов, созданных П. Л. Чебышёвым, называются задачами Чебышёва. Формулируется обобщённая задача Чебышёва, относящаяся к новому классу задач теории управления, в котором программа движения задаётся в виде дополнительной системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Обсуждается решение этих задач на основе применения обобщённого принципа Гаусса, предложенное профессором Н. Н. Поляховым и его учениками, С. А. Зегждой, М. П. Юшковым в 1983 году на кафедре теоретической и прикладной механики Ленинградского (Санкт-Петербургского) государственного университета. Обсуждается влияние идей П.Л. Чебышёва на содержание двухтомного учебника по теоретической и прикладной механике для классических университетов. Статья отражает содержание доклада, приуроченного к 300-летию РАН и Санкт-Петербургского университета и заслушанного 15 февраля 2024 года на заседании секции теоретической механики имени профессора Н.Н. Поляхова Санкт-Петербургского Дома учёных имени М. Горького.

*Ключевые слова:* Чебышёв П.Л., 300 лет, биография, теоретическая механика.

*Библиография:* 15 названий.

**Для цитирования:**
Павилайнен, Г.В., Тихонов, А.А., Юшков, М.П. Пафнутий Львович Чебышёв – академик Императорской Санкт-Петербургской Академии наук (к 300-летию Российской Академии наук и Санкт-Петербургского государственного университета) // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, С. 277–291.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 510:531 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-277-291

# Pafnuty Lvovich Chebyshev – academician of the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences (to the 300-th anniversary of the Russian Academy of Sciences and St. Petersburg State University)

G. V. Pavilaynen, A. A. Tikhonov, M. P. Yushkov

**Pavilaynen Galina Voldemarovna** — Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).
*e-mail: g.pavilaynen@spbu.ru*
**Tikhonov Alexey Alexandrovich** — Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).
*e-mail: a.tikhonov@spbu.ru*
**Yushkov Mikhail Pertovich** — Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).
*e-mail: m.yushkov@spbu.ru*

**Abstract**

The article provides brief biographical information about the brilliant, world-famous scientist, academician of the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences Pafnutiy Lvovich Chebyshev (1821-1894). The correct emphasis is in the scientist's surname discussed. The educational, scientific, pedagogical activities and social and administrative work of P.L. Chebyshev are noted. The achievements of P.L. Chebyshev are briefly in the field of mathematics, in more detail - in mechanics presented. Problems of synthesis of mechanisms created by P.L. Chebyshev are Chebyshev problems called. A generalized Chebyshev problem, which belongs to a new class of problems in control theory, is considered. The motion program is in the form of an additional system of high-order differential equations formulated. The solution to these problems is on the application of the generalized Gauss principle discussed, which proposed Professor N.N. Polyakhov and his students, S.A. Zegzda, M.P. Yushkov in 1983 at the Department of Theoretical and Applied Mechanics of Leningrad (St. Petersburg) State University. The influence of the ideas of P.L. Chebyshev is on the content of a two-volume textbook on theoretical and applied mechanics for classical universities discussed. The article reflects the content of the report dedicated to the 300-th anniversary of the Russian Academy of Sciences and St. Petersburg University and heard on February 15, 2024 at a meeting of the section of theoretical mechanics named after Professor N.N. Polyakhov St. Petersburg House of Scientists named after M. Gorky.

*Keywords:* Chebyshev P.L., 300-th anniversary, biography, theoretical mechanics.

*Bibliography:* 15 titles.

**For citation:**
Pavilaynen, G.V., Tikhonov, A.A., Yushkov, M.P. 2024, "Pafnuty Lvovich Chebyshev – academician of the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences (to the 300-th anniversary of the Russian Academy of Sciences and St. Petersburg State University)" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 277–291.

## 1. Краткие сведения о П. Л. Чебышёве (1821-1894)

Гениальный, всемирно известный учёный, академик Императорской Санкт-Петербургской Академии наук Пафнутий Львович Чебышёв по свидетельству академика А.Н. Крылова [1]

«родился 14 мая 1821 г. в поместье своей матери, сельце Окатове, Боровского уезда, Калужской губернии[1]. Отец его был человек образованный и обладал значительными материальными средствами. Первоначальное образование Пафнутий получил дома. Мать его обучила грамоте, а двоюродная сестра, А.К. Сухарева, учила его арифметике, другим предметам первоначального образования и французскому языку. В 1832 г. Чебышёвы переехали в Москву».

Рис. 1: Дом Чебышёвых в Москве

В 1837-1841 гг. Пафнутий Львович обучался на 2-ом (физико-математическом) отделении философского факультета Московского университета. Ещё на младших курсах за работу «Вычисление корней уравнений» он был награждён Серебряной медалью (отметим, что обладатель Золотой медали в дальнейшем не был отмечен серьёзными научными работами). Выдающиеся способности П.Л. Чебышёва обратили на себя внимание известного профессора Московского университета Н.Д. Брашмана, который сыграл большую роль в становлении Пафнутия Львовича как выдающегося учёного. В 1846 году П.Л.Чебышёв защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В 1847 г. он переехал в Санкт-Петербург и защитил еще одну диссертацию pro venia legendi (на право чтения лекций) «Об интегрировании помощью логарифмов» в Императорском Санкт-Петербургском университете будучи в должности адъюнкт-профессора. В 1849 г. Пафнутий Львович защитил докторскую диссертацию «Теория сравнений». В архиве семьи Юшковых сохранилась эта монография с карандашными пометками Николая Евгеньевича Юшкова (прадеда одного из авторов данной статьи), отражающими его подготовку к экзамену «Теория чисел», сдававшемуся Пафнутию Львовичу. Отметим, что монография «Теория сравнений», с одной стороны, произвела своими новыми результатами в теории чисел фурор среди математиков Европы, а, с другой стороны, длительное время являлась единственным учебником по соответствующей дисциплине для студентов университетов.

[1]В метрической книге Спаса-на-Прогнаньи Боровского уезда Калужской губернии записано: “4 мая 1821 г. сельца Окатово у помещика корнета Льва Павловича Чебышева родился сын Пафнутий. Крещен 16 мая”.

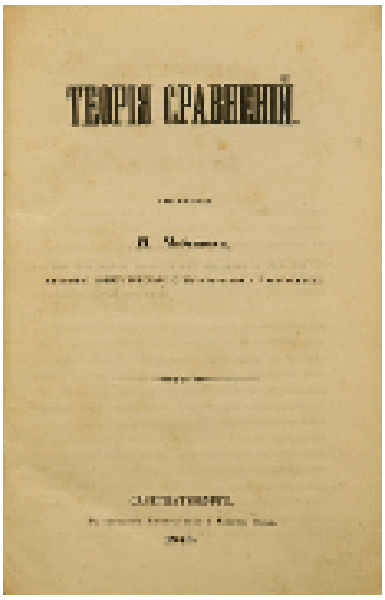


Рис. 2: П. Л. Чебышёв. Теория сравнений (1849). Фото автора (1852)

Вскоре Пафнутий Львович особенно близко сошёлся с профессором И.И. Сомовым и академиком В.Я. Буняковским, при этом Иосиф (Осип) Иванович, зная прекрасно научную литературу, помогал в первые годы П.Л. Чебышёву ориентироваться в ней (это было важно до тех пор, пока П.Л. Чебышёв не открыл совершенно новые области исследований в математике и механике). В свою очередь, Виктор Яковлевич (бывший, кстати, в 1864–1889 гг. вице-президентом Академии наук) начинает вводить Пафнутия Львовича в состав Академии – в 1853 г. он становится адъюнктом Академии наук.

## 2. О научно-педагогической и общественной деятельности П.Л. Чебышёва.

Научно-педагогическая и общественная деятельность П.Л. Чебышёва проходила, в первую очередь, в стенах Академии наук и Санкт-Петербургского университета, в которых он проработал соответственно 48 и 35 лет [2]. В 1856 г. его избирают экстраординарным академиком, а в 1859 г. – ординарным академиком. В свою очередь, в Университете в 1853 г. он становится экстраординарным профессором, а с 1857 г. – ординарным профессором. Обращает на себя внимание близость дат, когда Пафнутий Львович получает «ординарные» звания в Академии и в Университете. В 1872 г. ему присуждается звание Заслуженного ординарного профессора, а в 1882 г. Пафнутий Львович выходит в отставку от службы в Университете и целиком посвящает себя научной деятельности. Таким образом, П.Л. Чебышёв проработал профессором в Санкт-Петербургском университете более 30 лет.

Характер лекций и их особенности ярко описаны в воспоминаниях А.А. Маркова и И.И. Сомова [1, с.4]: «К чтению своих лекций Чебышев относился с педантичной строгостью; лекций никогда почти не пропускал, никогда на них не опаздывал и ни одной лишней минуты после звонка не оставался в аудитории, хотя для этого приходилось прерывать лекции иногда на полуслове. Недоконченный на какой-либо лекции вывод всегда начинал на следующей с самого начала, если только эта лекция не была немедленным продолжением предыдущей.

Всякой сколько-нибудь сложной выкладке предпосылал разъяснение её цели и хода в общих чертах, а затем производил вычисление на доске, большей частью молча, предоставляя студентам следить за ним глазами, а не ухом».

Рис. 3: Пафнутий Львович Чебышёв (фото 1865 г.)

И далее: «выкладки делал довольно быстро и настолько подробно, что следить за ним было легко. Во время лекций Чебышев часто делал отступления от систематического изложения курса, сообщал свои взгляды и разговоры с другими математиками по затронутым на лекции вопросам и выяснял сравнительное значение и взаимную связь между различными вопросами математики. Эти отступления очень оживляли изложение, давали отдых напряжённому вниманию слушателей и возбуждали интерес к изучению предмета в более широких рамках. На экзаменах Чебышев был сдержан и безукоризненно корректен».

Как пример лекторского мастерства можно обозначить лекции по теории вероятностей, записанные А.М. Ляпуновым [3]. Вот что пишет в предисловии к этой книге А.Н. Крылов: «П.Л. Чебышев знаменит не только как математик-творец, но и как превосходный лектор, умевший соединить простоту, ясность и краткость изложения, поэтому его курсы при небольшом объёме отличались богатством содержания.

В 1879/1880 учебном году Чебышев читал теорию вероятностей. ... В это время в числе его слушателей был А.М. Ляпунов, который особенно тщательно записывал лекции Чебышева, а вечером в тот же день приводил свои записи в порядок и переписывал своим замечательным каллиграфическим почерком; а так как Ляпунов отличался не только своими познаниями, но и превосходной памятью, то его запись воспроизводит лекции Чебышева именно в том виде, как они прочитаны, со всеми тонкостями попутных замечаний, которыми Чебышев умел оживлять свои лекции».

К особой заслуге П.Л. Чебышёва следует отнести создание им всемирно известной Петербургской математической школы. Многочисленные его ученики, среди которых можно выделить учеников-гениев А.М. Ляпунова и А.А. Маркова, отметились выдающимися работами в различных областях математики и механики.

Помимо плодотворной научно-преподавательской деятельности П.Л. Чебышёв вёл огромную общественно-административную работу (подробнее об этом см. статью [2]): со свойственной ему ответственностью, добросовестностью и обстоятельностью он работал 40 лет в Артиллерийском отделении Военного ученого комитета и 17 лет в Учёном комитете Министерства народного просвещения. Если в первом из них он помогал решать важнейшие военные задачи научно-практического значения, то во втором участвовал в решении задач государственного значения, начиная с вопросов учебников и преподавания в начальных школах и гимназиях и кончая созданием нового университетского устава 1863 года.

Отметим, что П.Л. Чебышёв был награжден золотым наперсным крестом за активную работу в качестве члена Св. Синода Русской Православной церкви.

Заслуги Пафнутия Львович были удостоены высших орденов Российской Империи, а сам он получил чин действительного статского советника.

## 3. О научных трудах П. Л. Чебышёва. Задача Чебышёва в синтезе механизмов

Общеизвестны выдающиеся работы П.Л. Чебышёва в области математики. Отметим основные направления его исследований, пользуясь, так сказать, «терминологией» статьи [4]: теория чисел (фундаментальный результат о распределении простых чисел), теория вероятностей (предельные теоремы, законы больших чисел), теория приближения функций (наилучшие приближения, полиномы Чебышёва-Эрмита), геометрия (чебышёвские сети и уравнение, известное в настоящее время как Sin-Gordon), математический анализ (приближенное решение уравнений, интегрирование алгебраических функций, разложение в непрерывные дроби, «теорема об ужах»).

Обсудим теперь более подробно исследования Пафнутия Львовича в области механики.

П.Л. Чебышёв опубликовал около семидесяти научных работ, из них примерно четвертая часть относится к механике или к смежным с нею областям. Отметим, что свои научные исследования Пафнутий Львович излагал весьма подробно, стремясь максимально доходчиво донести их до читателей.

Пафнутий Львович неоднократно подчёркивал необходимость неразрывной связи теории и практики, их взаимное обогащение [5]. Большую роль в постановке задач из области практической механики играли его научные командировки за границу, первая из которых состоялась в 1852 году [6]. Через два года после неё появился мемуар «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов», в котором ставилась одна из первых минимаксных задач.

Как известно, для превращения прямолинейного движения поршня паровой машины во вращательное движение коромысла Уаттом был предложен специальный механизм, имевший параллелограмм из стержней. Этот механизм блестяще работал в машинах, созданных Уаттом. Но с развитием техники и с повышением мощности и скорости вращения машин возникла необходимость изменения их габаритов. Новые соотношения рычагов не давали необходимой точности прямолинейного движения штока поршня, что приводило к усиленному износу уплотнительных соединений машины. Для решения этой сугубо технической задачи Чебышёв построил теорию полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, названных позже его именем. Он сформулировал первоначально без доказательства знаменитую теорему, называемую ныне также теоремой Чебышёва, о том, что «между наибольшими и наименьшими значениями разности $f(x) - U$ в пределах от $x = a - h$ до $x = a + h$ встречается по крайней мере $n + 2$ раза одно и то же численное значение». Здесь $U$ обозначает полином степени $n$, аппроксимирующий функцию $f(x)$.

К доказательству этой теоремы Чебышёв вернулся в 1859 году, опубликовав самый большой свой трактат «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций». Эту работу Жозеф Бертран охарактеризовал как «un miracle d'analyse» («чудо анализа»).

Разработанный метод Чебышёв собирался применить непосредственно к расчёту механизмов Уатта, но это исследование он не опубликовал. В работе «О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта», подготовленной в 1861 г., он путём нового соединения стержней механизма Уатта добивается того, что «точность хода механизма может быть доведена до предела, недостижимого для технических средств изготовления механизмов». В работе 1869 г. «Об одном механизме» он предлагает еще одно изменение, скрещивая рычаги

в сокращённом параллелограмме Уатта, что улучшает точность хода более, чем в два раза.

В дальнейшем, в 1879-89 годах в цикле своих работ Чебышёв рассматривает возможность движения с заданной точностью конкретных точек механизмов по заданным кривым. Как указывает Н.И. Левитский [7], «указанная Чебышевым постановка задачи, соответствующая взвешенному приближению, дала возможность дать широкое определение общей постановки задачи о синтезе механизмов с применением теории наилучшего приближения функций». Постановку и решение подобных задач мы будем в дальнейшем называть задачами Чебышёва в синтезе механизмов.

Касаясь работ П.Л. Чебышёва, которые также широко используются в теории машин и механизмов, следует назвать его мемуары «О параллелограммах» (1870 г.) и «О простейших сочленениях» (1878 г.). В первом из них Чебышёв приводит на 13 лет раньше Грюблера структурную формулу для плоских механизмов (Мартин Фюрхтегот Грюблер (1851 - 1935) —немецкий математик и механик), а во второй – на 3 года позже Робертса (Сэмюэль Робертс (1827 – 1913) – английский математик) фактически формулирует аналогичную теорему о возможности получения одной и той же кривой тремя различными четырёхзвенниками (третий механизм, правда, Чебышёв не выделяет, возможно, из-за его очевидности, ибо он оказывается симметричным одному из предыдущих). Предложенный в этом мемуаре Пафнутием Львовичем механизм получил название «лямбдаобразного механизма Чебышёва», он широко используется и поныне в технике, так как одна из его точек выполняет прямолинейное движение с точностью до шестой степени. Отметим, что в этой работе появилось использование «пассивных связей», как стали их называть позднее.

Теорию полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, Чебышёв успешно применяет и к ряду других задач, например, к расчёту зубчатых колёс (работа 1872 года «О зубчатых колёсах») или к выбору рациональных размеров видоизмененного им регулятора Уатта (работа 1871 года «О центробежном уравнителе»). В последнем мемуаре Чебышёв подбором параметров добивается того, что «Центробежный уравнитель ... будет очень близко подходить к изохроническому».

П.Л. Чебышёв не публиковал работ непосредственно по вопросам гидроаэромеханики и упругости, но, согласно отзывам о нём и его собственным рецензиям, он занимался отчасти и задачами их этих областей механики. Что касается работ по другим разделам механики, то необходимо отметить вклад учёного в решение задач внешней и внутренней баллистики. По просьбе главного командира порта и военного губернатора Кронштадта, генерал-адъютанта, адмирала Новосильского Федора Михайловича (губернатор с 1855 до 1866 г.) академик разработал чугунный продолговатый снаряд со стальной вершиной против железных неприятельских судов для уже имевшихся в крепости гладкоствольных орудий. Получены интересные результаты по устойчивости снаряда в полёте и сделан вывод о необходимости вращения снаряда. Действительно, опыты с гладкоствольными орудиями дали отрицательные результаты. За труды в области артиллерии П.Л. Чебышёв был избран в 1870 году почётным членом Артиллерийской академии.

Рассматривая научное наследие П.Л. Чебышёва по механике, нельзя не упомянуть о его инженерном мастерстве в создании и изучении приборов и механизмов. Как пишут его ученики, академики А.А. Марков, Н.Я. Сонин и профессор К.А. Поссе [8], «единственным предметом, на который Чебышев никогда не жалел денег, были модели изобретаемых им механизмов; на их устройство он тратил сотни и тысячи рублей. С раннего детства он любил устраивать различные приборы и, начав с игрушки, сделанной перочинным ножом, дошел до своей сложной арифметической машины, хранящейся в Conservatoire des arts et métiers в Париже. Многие из его приборов хранятся в С.-Петербургском университете и в Академии наук». На Всемирной выставке в Филадельфии в 1876 году были присуждены 3 медали за экспонировавшиеся паровую машину с параллелограммом и регулятором системы П. Л. Чебышёва, модели, инструмент, практические работы учащихся и коллекции учебных пособий».

Механизмы П. Л. Чебышёва выставлялись на 4-х Всемирных выставках:

– в Лондоне, 1876 г., где были представлены круговая линейка, табурет и прямило;

– в Филадельфии, 1876 г., где экспонировались круговая линейка, табурет, паровая машина с параллелограммом и регулятором;

– в Париже, 1878 г., где демонстрировался стопоход;

– в Чикаго, 1893 г., где были показаны семь плоских шарнирных механизмов, самокатное кресло и сортировалка [9].

И.И. Артоболевский и Н.И. Левитский, подробно обследовавшие 41 механизм Чебышёва и около 80 различных их вариантов, отмечают [10], что наличие многочисленных карандашных пометок на моделях, сделанных собственноручно Пафнутием Львовичем, «с наглядностью показывают, что Чебышев при подборе размеров звеньев механизма и изучении свойств траекторий, описываемых отдельными его точками, не чуждался эксперимента, а создавал свои оригинальные экспериментальные установки и вёл кропотливые опыты, сочетая их с теоретической разработкой поставленных задач». И далее: «В истории развития наук о механизмах нельзя назвать ни одного имени ученого, творчеству которого принадлежало бы такое большое количество замечательных по своим свойствам механизмов. Создание подобных механизмов под силу только таким высоко одарённым ученым, каким был Чебышев».

## 4. Формулировка и решение обобщенной задачи Чебышёва, относящейся к новому классу задач теории управления

В предыдущем пункте была сформулирована задача Чебышёва из теории синтеза механизмов. Перейдем теперь к формулировке и обсуждению методов решения обобщенной задачи Чебышёва [11, 12, 13]. Рассмотрим движение механической системы с s степенями свободы под действием обобщенных сил

$$Q = Q(Q_1, ..., Q_s). \tag{1}$$

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma, \quad \sigma = \overline{1,s}, \tag{2}$$

где $T = \dfrac{M}{2} g_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$, $\alpha, \beta = \overline{0,s}$ , $q^0 = t$, $\dot{q}^0 = 1$.

Поставим новую задачу об отыскании такого движения нашей механической системы под действием активных обобщенных сил (1), которое одновременно удовлетворяло бы дополнительной системе дифференциальных уравнений, линейной относительно старших производных от обобщенных координат порядка $n$

$$f_n^{\varkappa} \equiv a_{n\sigma}^{l+\varkappa}\big(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(n-1)}{q}\big)\overset{(n)}{q^\sigma} + a_{n0}^{l+\varkappa}\big(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(n-1)}{q}\big) = 0, \tag{3}$$

где $\sigma = \overline{1,s}$, $\varkappa = \overline{1,k}$, $k \leqslant s$, $l = s - k$, причем $n \geqslant 3$. Назовем такие задачи *обобщёнными задачами Чебышёва*.

Отметим, что обобщённые задачи Чебышёва можно относить к *новому классу задач управления*, в которых программа движения задана в виде дополнительной системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Очевидно, что для решения подобных задач в правых частях уравнений (2) должны появиться дополнительные неизвестные силы $R = (R_1, \ldots, R_s)$, которые и будут играть роль управляющих сил, выполняющих программу движения (3).

Для решения подобных задач на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета были созданы две теории

движения неголономных систем со связями высокого порядка, в которых дополнительная система дифференциальных уравнений (3) рассматривается как набор $k$ неголономных связей порядка $n$ [12].

Как пример применения первой теории рассматривается движение космического аппарата (ИСЗ) после требования неизменности величины ускорения, которое имеет спутник в некоторой точке своей траектории, при его движении в дальнейшем. Тем самым, рассматривается при использовании полярной системы координат наложение на дальнейшее движение материальной точки в поле притяжения Земли нелинейной неголономной связи второго порядка. Для применения созданной теории движения дифференцируем эту связь по времени и записываем её в виде линейной относительно третьих производных от полярных координат неголономной связи, после чего применяем первую теорию движения неголономных систем при связях высокого порядка [12]. Отметим, что подобная задача является первым реальным примером движения систем с неголономной связью высокого порядка, не рассматриваемой в классической неголономной механике. На рис. 4 представлены траектории движения одного из советских спутников системы «Молния»: расстояния указаны в километрах, в начале координат расположен центр Земли, до наложения связи спутник движется по красной штрихованной эллипсовидной траектории, после фиксации величины его ускорения в перигее космический аппарат начинает двигаться по черным «эллипсам», которые медленно поворачиваются и попеременно касаются двух синих концентрических штрихованных окружностей.

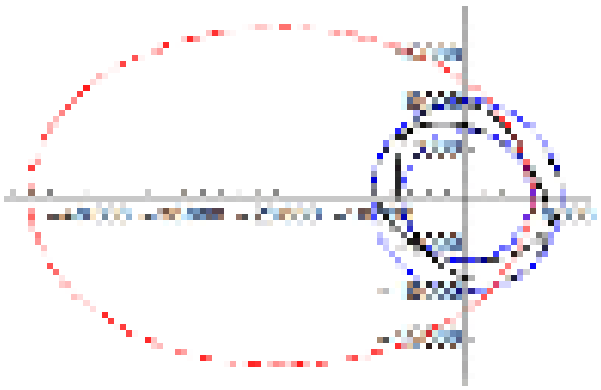


Рис. 4: Движение спутника «Молния» при закреплении величины его ускорения в перигее

Особенно интересным оказывается использование второй теории, базирующейся на применении обобщенного принципа Гаусса [14]. Весьма полезным оказывается её применение для отыскания оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему с конечным числом степеней свободы за указанное время из имеющегося фазового состояния в новое заданное фазовое состояние. Рассмотрим ее применение на примере решения конкретной задачи управления.

Пусть требуется найти закон изменения горизонтальной оптимальной управляющей силы $F$, перемещающей тележку с маятниками за время $\hat{T}$ на расстояние $S$ из имеющегося состояния покоя в новое состояние покоя (см. рис 5).

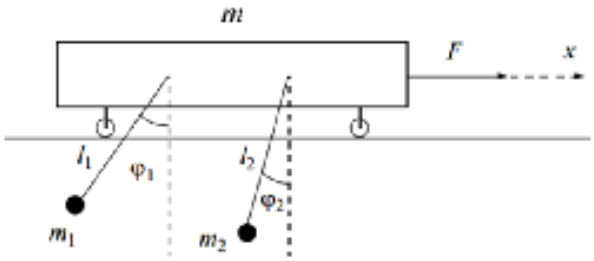



Рис. 5: Тележка с двумя маятниками

Подобную задачу управления часто решают классическим методом теории управления с привлечением принципа максимума Понтрягина, минимизирующего некоторый функционал, например, от квадрата искомой управляющей силы. Решения, полученные таким методом, на следующих рисунках изображены штрихованными кривыми. Можно показать, что при этих движениях непрерывно выполняется линейная неголономная связь высокого порядка, которая имеет вид

$$a_{8,x}\frac{d^8x}{dt^8} + a_{8,\varphi_1}\frac{d^8\varphi_1}{dt^8} + a_{8,\varphi_2}\frac{d^8\varphi_2}{dt^8} + a_{6,x}\frac{d^6x}{dt^6} + a_{6,\varphi_1}\frac{d^6\varphi_1}{dt^6} + a_{6,\varphi_2}\frac{d^6\varphi_2}{dt^6} + \\ + a_{4,x}\frac{d^4x}{dt^4} + a_{4,\varphi_1}\frac{d^4\varphi_1}{dt^4} + a_{4,\varphi_2}\frac{d^4\varphi_2}{dt^4} = 0, \quad (4)$$

где все коэффициенты выражаются через параметры механической системы. Связь (4) является одним из конкретных примеров задания системы (3) в виде одного дифференциального уравнения восьмого порядка. При появлении связи (4) исходную задачу управления можно трактовать как неголономную задачу с требованием выполнения связи восьмого порядка (4). В этом случае программа движения рассматривается как идеальная неголономная связь высокого порядка, реакция которой оказывается искомой управляющей силой. Применяя для решения задачи в такой постановке обобщенный принцип Гаусса, получаем управление в виде полинома пятой степени, коэффициенты которого находятся из поставленных граничных условий для конца движения механической задачи. Отметим, что при классическом решении задачи управления с привлечением принципа максимума Понтрягина оптимальное управление содержало гармоники с собственными частотами системы, что при длительном движении раскачивает систему !!!

На рисунках 6 и 7 приведены результаты расчётов по обоим методам, кривые, соответствующие новому методу, выполнены сплошными линиями. Система дифференциальных уравнений записывалась в безразмерном виде и в главных координатах, на печать выводились безразмерные управление $u$, координаты $x_0$, $x_1$, $x_2$ (здесь $x_0$ – безразмерное смещение центра масс системы), $T_1$ и $T_2$ – безразмерные периоды колебаний, соответствующие первой и второй собственным ненулевым частотам системы. При коротком движении оба решения практически совпадают (это показывает доброкачественность нового предложенного метода), а с увеличением времени движения системы в решении, полученном классическим путем, развиваются интенсивные колебания.

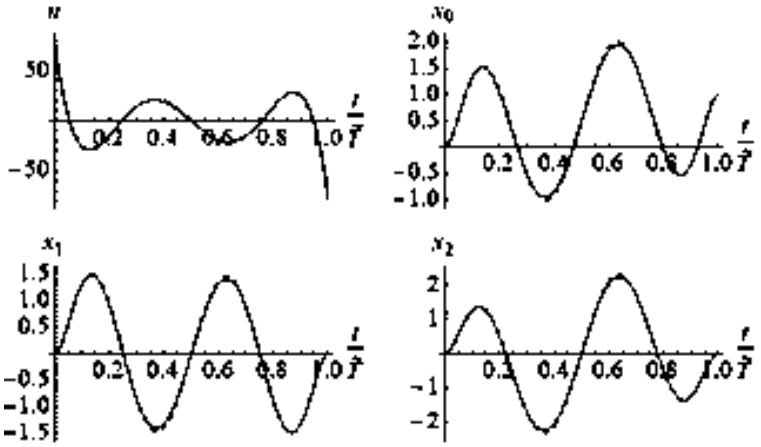



Рис. 6: $T = T_2$, $T_2 = 0.5T_1$

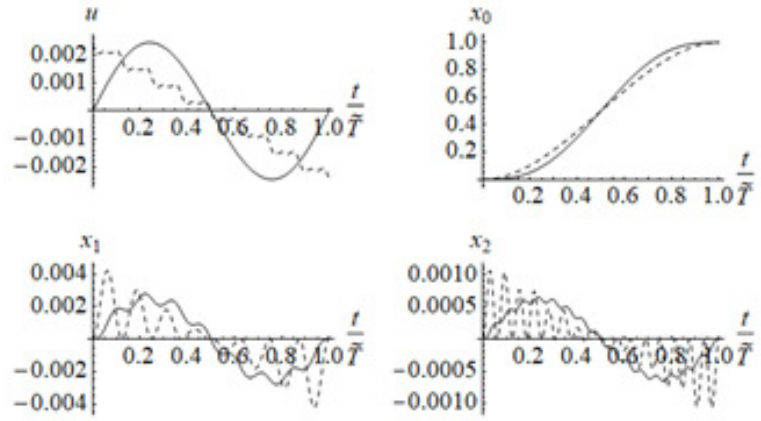



Рис. 7: $T = 16T_2$, $T_2 = 0.5T_1$

## 5. Дополнительные возможности обобщенной задачи Чебышёва

Обратим внимание на то, что при кратковременном движении (см. рис. 6) почти при полном совпадении решений, полученных обоими методами, имеются скачки управления в начале и в конце движения системы. Интересно, что при увеличении времени движения в 16 раз (см. рис. 7) в первом решении скачки управления сохранились (применение принципа максимума Понтрягина всегда дает скачки управляющей силы на концах её графика), а при использовании обобщённого принципа Гаусса подобные скачки исчезли. Это наводит на мысль уничтожения скачков управления и в случае кратковременного движения. С этой целью расширим граничные условия для начала и для конца движения дополнительным требованием равенства нулям ускорений тележки в эти моменты времени (при этом будут равны нулям и вторые производные от остальных координат системы). В результате применения обобщенного принципа Гаусса, порядок которого увеличиваем на две единицы, удается погасить скачки управления в начале и в конце движения системы даже при её кратковременном перемещении. Этот результат отражен на рис. 8. Отметим, что решить расширенную краевую задачу с использование принципа максимума Понтрягина не удаётся, так как при этом в получаемом выражении для управления будет недостаток произвольных постоянных для удовлетворения всех поставленных граничных условий. В свою очередь, увеличивая и дальше порядок используемого обобщенного принципа Гаусса, можно добиться любой гладкости изменения закона управле-

ния вблизи начала и конца движения, для этого требуется ещё более расширять количество граничных условий требованием обращения в эти моменты времени более высоких порядков производных от координаты тележки.

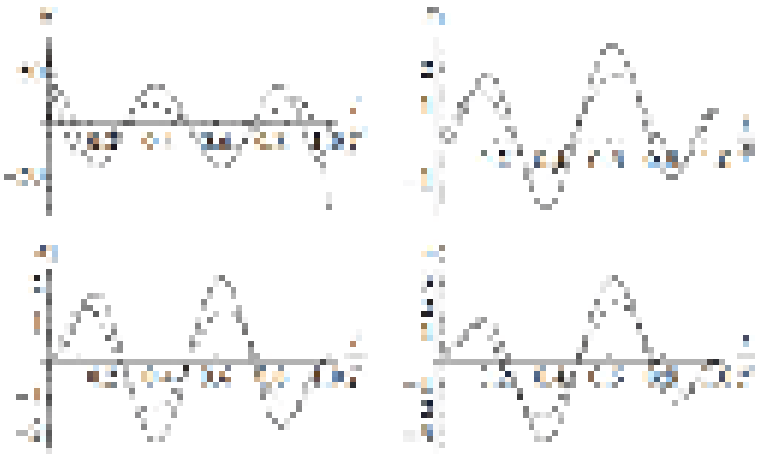


Рис. 8: $T = T_2$, $T_2 = 0.5T_1$

Отметим, что материал двух последних пунктов отражен в двухтомном учебнике для классических университетов [15]: в томе 1 имеется глава «Вариационные принципы механики», а в томе 2 теория движения неголономных систем со связями высокого порядка изложена в главе «Обобщенная задача Чебышёва. Неголономная механика и теория управления».

## 6. О правильном произношении фамилии Пафнутия Львовича

Надо отметить, что в середине прошлого века при наличии старшего поколения преподавателей, хранившего славные традиции Санкт-Петербургской математической школы, все преподаватели и студенты математико-механического факультета Ленинградского государственного университета правильно произносили фамилию своего великого предшественника, делая ударение на последнем слоге. К большому сожалению, в связи с исчезновением из русского алфавита буквы «ё» все чаще можно было услышать неверное ударение в этой фамилии на первом слоге. Это явление все более разрасталось и стало почти нормой.

Отрадно отметить, что силами филологической университетской школы русистов под руководством профессора Л.А. Вербицкой, ректора университета с 1994 по 2004 гг., Президента Российской Академии образования с 2013 по 2018 гг. и других лингвистов приказом Министерства образования и науки от 3 мая 2007 г. была подтверждена норма об обязательности употребления буквы ё в собственных именах, в школьных учебниках и в случаях, когда замена буквы ё на букву е искажает смысл и значение слова, а также ударение на слоге, её содержащем. В этом отношении очень полезными были и «Чебышёвские чтения», которые происходили в 90-ые годы прошлого века на механико-математическом факультете МГУ под председательством проф. В.В. Александрова. Очень большую роль в проведении «Чтений» сыграли неуемная энергия и работоспособность заместителя председателя, профессора С.Н. Кружкова. Он организовал, в частности, в сентябре 1994 г. посещение памятных мест на родине Пафнутия Львовича. При этой поездке профессор М.П. Юшков вручил Спас-Прогнанской школе имени П.Л. Чебышёва деревянное собственноручное изделие Пафнутия Львовича с его личными пометками. Механизм был выполнен в виде зубчатого колеса со сложным профилем зубьев. Это изделие П.Л. Чебышёва хранилось в Кабинете прикладной механики при кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Ленинградского

университета. По настоятельной, неоднократной и настойчивой просьбе С.Н. Кружкова декан факультета, профессор Г.А. Леонов и заведующий кафедрой, профессор П.Е. Товстик доверили М.П. Юшкову отобрать из коллекции Кабинета прикладной механики соответствующий уникальный экземпляр.

Необычайно важно с исторической точки зрения, что в открытии и закрытии «Чебышёвских чтений», проходивших в 1993-1994 учебном году, приняли участие Клавдия Владимировна Чебышёва, Петр Владимирович Чебышёв и Лев Максимилианович Лебедев, внучатые племянница и племянники Пафнутия Львовича. Особо существенно, что на одной из этих встреч на вопрос о правильном произношении их семейной фамилии Клавдия Владимировна (см. её автограф на рис. 9) ответила, что **дома ударение всегда ставилось на последнем слоге**. Поэтому для недопущения недоразумений полезно писать фамилию Пафнутия Львовича как «**Чебышёв**».

Рис. 9: Автограф К.В.Чебышёвой

Рис. 10: Портрет из Музея истории СПбГУ

Любопытно, что в Музее истории Санкт-Петербургского университета находится дореволюционный портрет П.Л. Чебышёва (рис. 10) с табличкой «Пафнутій Львовичъ Чебышовъ».

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов А. Н. Пафнутий Львович Чебышев. Биографический очерк. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1944. 32 с.

2. Тихонов А. А. Пафнутий Львович Чебышев: человек науки на службе России (к 200-летию со дня рождения) // Чебышевский сборник. 2021. Том XXII. Вып. 3(79). С. 406-423.

3. Теория вероятностей. Лекции академика П.Л.Чебышева. Читанные в 1879-80 гг. По записи А.М. Ляпунова. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1936. 253 с.

4. Кружков С. Н. К 100-летию со дня смерти Пафнутия Львовича Чебышева // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 6. С. 3-10.

5. Стеклов В. А. Теория и практика в исследованиях Чебышева. Речь произнесенная на торжественном чествовании столетия со дня рождения Чебышева Российской Академией Наук. Петроград: 1921. Российская Государственная Академическая Типография. 21 с.

6. Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 5. Прочие сочинения. Биографические материалы. –М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1951. – 474 с.

7. Левитский Н. И. Синтез механизмов по Чебышеву. Москва, Ленинград, Изд-во Акад. наук СССР, 1946. - 168 с.

8. Чебышев П. Л. Сочинения П.Л. Чебышева, изданные под ред. А.А. Маркова и Н.Я. Сонина. СПб.: Имп. Академия Наук. Том I, 1899, 714 с. Том II, 1907, 736 с.

9. Кутеева Г. А., Лопатухина И. Е., Павилайнен Г. В., Тихонов А. А. и др. Очерки по истории механики и физики. Учебное пособие. СПб.: Изд-во «ВВМ». 2016. 204 с.

10. Научное наследие Чебышева. Выпуск второй. Теория механизмов. (Отв. редакторы Н.Г. Бруевич и И.И. Артоболевский). М.-Л.: Изд. АН СССР. 1945. 192 с.

11. Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А. Неголономная механика и теория управления. М.: Наука. Физматлит. 2018. 234 с.

12. Юшков М. П. Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. I // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Том 6 (64). Вып.4. С. 680-701.

13. Юшков М. П. Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. II // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Том 7 (65). Вып.4. С. 714-733.

14. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Доклады АН СССР. 1983. Том 269. № 6. С. 1328-1330.

15. Поляхов Н. Н., Товстик П. Е., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая и прикладная механика. 4-е издание, переработанное и расширенное. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2022. Том 1. Общие вопросы теоретической механики. 559 с. Том 2. Динамика. Некоторые прикладные вопросы теоретической механики. 548 с.

## REFERENCES

1. Krylov, A.N. 1944, “Pafnutii Lvovich Chebyshev. Bibliographical essay”, *Moscow–Leningrad, “AN SSSR”.*

2. Tikhonov, A. A. 2021, “Pafnutiy Lvovich Chebyshev (1821-1894), a man of science in the service of Russia (On the occasion of the bicentennial of his birth)”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 405–422.

3. “Probability theory. Lectures by academician P.L. Chebyshev. Read in 1879-80. According to the record of A.M. Lyapunov”. 1936, *Publishing House of the USSR Academy of Sciences*, Moscow, Leningrad.

4. Kruzhkov, S. N. 1995, “On the 100-th anniversary of the death of Paphnutiy Lvovich Chebyshev”, *Bulletin of the Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics*, no. 6, pp. 3-10.

5. Steklov, V. A. 1921, Theory and practice in Chebyshev's research. A speech delivered at the solemn celebration of the centenary of Chebyshev's birth by the Russian Academy of Sciences", *Petrograd, Russian State Academic Printing House*. 21 p.

6. Chebyshev, P. L. 1951, "Complete set of works. vol. 5. Other works. Biographical materials", *Moscow, Leningrad, Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR*. 474 p.

7. Levitsky, N. I. 1946, "Synthesis of Chebyshev mechanisms", *Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR*, Moscow, Leningrad.

8. Chebyshev, P. L. 1899, "The works of P.L.Chebyshev, published under the editorship of A.A. Markov and N.Ya. Sonin", *St. Petersburg: Imp. Academy of Sciences*. vol. I, 714 p.; vol. II, 1907, 736 p.

9. Lopatukhina, I. E., Kuteeva, G. A., Pavilainen, G. V., Polyakhova, E. N., Rudakova, T. V., Sabaneev, V. S., Tikhonov, A. A. 2016, "Essays on the history of mechanics and physics. A study guide", *Publishing house "VVM"*, St. Petersburg.

10. "Chebyshev's scientific legacy. Issue two. Theory of mechanisms (Editors N.G. Bruevich and I.I. Artobolevsky)". 1945, *Publishing House of the USSR Academy of Sciences*, Moscow, Leningrad. 192 p.

11. Zegzhda, S. A., Yushkov, M. P., Soltakhanov, S. H., Shatrov, E. A. 2018, "Nonholonomic mechanics and control theory", *Nauka*. Physical education. Moscow. 234 p.

12. Yushkov, M. P. 2019, "Formulation and solution of the generalized Chebyshev problem. I", *Bulletin of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. vol. 6 (64). Iss. 4. pp. 680-701.

13. Yushkov, M. P. 2020, "Formulation and solution of the generalized Chebyshev problem. II", *Bulletin of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. vol. 7 (65). Iss. 4. pp. 714-733.

14. Polyakhov, N. N., Zegzhda, S. A., Yushkov, M. P. 1983, "Generalization of the Gauss principle in the case of nonholonomic systems of higher orders", *Reports of the USSR Academy of Sciences*. vol. 269. no. 6. pp. 1328-1330.

15. Polyakhov, N. N., Tovstik, P. E., Zegzhda, S. A., Yushkov, M. P. 2022, "Theoretical and applied mechanics. 4th edition, revised and expanded", *Publishing House of St. Petersburg University*. St. Petersburg. vol. 1. *General questions of theoretical mechanics*. 559 pp.; vol. 2. *Dynamics. Some applied questions of theoretical mechanics*. 548 p.

Получено: 09.07.2024
Принято в печать: 26.12.2024

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-292-306

# Влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн в анизотропных средах[1]

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, Д. В. Праведников

**Соколова Марина Юрьевна** — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
*e-mail: m.u.sokolova@gmail.com*
**Христич Дмитрий Викторович** — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
*e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru*
**Праведников Даниил Вячеславович** — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
*e-mail: zumastral@mail.ru*

**Аннотация**

Для модели гипоупругого анизотропного материала получены динамические уравнения распространения акустических волн, записанные относительно поля скоростей, связанного с прохождением волны. Рассматривается распространение плоской монохроматической волны в среде с однородными предварительными конечными деформациями и начальными напряжениями. Предполагается, что при распространении звуковых волн градиенты перемещений и скоростей малы, а поле начальных напряжений однородно. С использованием этих допущений записаны уравнения движения, линеаризованные в окрестности начального напряженно-деформированного состояния.

В рамках построенной модели получены обобщенные на случай гипоупругой среды уравнение Кристоффеля, выражение для вектора лучевой скорости, уравнение поверхности рефракции. Эти уравнения позволяют проанализировать влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн.

Определены векторы лучевых скоростей, описывающие перенос энергии при прохождении акустических волн. Найдено выражение для угла, который характеризует отклонение направления переноса энергии от направления распространения волны. Рассмотрено влияние начальных напряжений и учета нелинейности на отклонение вектора лучевой скорости от вектора фазовой скорости по сравнению с классическим решением.

Решена задача об отражении плоской упругой волны от жесткой преграды. Рассмотрено влияние начальных напряжений на изменение угла отражения квазипродольных и квазипоперечных волн от жесткой преграды.

На примере анизотропного материала с симметрией свойств, присущих кубическим кристаллам, проведена оценка влияния предварительных напряжений на такие характеристики распространения волн, как фазовые скорости, направления векторов поляризации, векторы лучевых скоростей и векторы рефракции.

*Ключевые слова:* гипоупругие анизотропные материалы, акустические волны, начальные напряжения, конечные деформации, фазовая скорость, лучевая скорость, отражение волны, вектор рефракции.

*Библиография:* 17 названий.

[1]Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

**Для цитирования:**
Соколова, М.Ю., Христич, Д.В., Праведников, Д.В. Влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн в анизотропных средах // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 292–306.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-292-306

# The effect of initial stresses on main characteristics of elastic waves in anisotropic media

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, D. V. Pravednikov

**Sokolova Marina Yurievna** — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
*e-mail: m.u.sokolova@gmail.com*
**Khristich Dmitrii Viktorovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
*e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru*
**Pravednikov Daniil Vyacheslavovich** — postgraduate student, Tula State University (Tula).
*e-mail: zumastral@mail.ru*

**Abstract**

For a model of a hyperelastic anisotropic material, dynamic equations of acoustic wave propagation, written with respect to the velocity field associated with the passage of the wave are obtained. The propagation of a plane monochromatic wave in a medium with homogeneous preliminary finite strains and initial stresses is considered. It is assumed that during the propagation of sound waves, the gradients of displacements and velocities are small, and the field of initial stresses is homogeneous. Using these assumptions, the equations of motion, linearized in the vicinity of the initial stress-strained state are written.

Within the framework of the constructed model, the Christoffel equation, the expression for the radial velocity vector, and the equation of the refraction surface are generalized for the case of a hypoelastic medium. These equations make it possible to analyze the effect of initial stresses on the main characteristics of elastic waves.

The radial velocity vectors describing the energy transfer during the passage of acoustic waves are determined. An expression for the angle that characterizes the deviation of the direction of energy transfer from the direction of wave propagation is obtained. The effect of initial stresses and account of nonlinearity on the deviation of the radial velocity vector from the phase velocity vector compared with the classical solution is considered.

The problem of reflection of a plane elastic wave from a rigid barrier is solved. The influence of initial stresses on the change in the angle of reflection of quasi-longitudinal and quasi-transverse waves from a rigid barrier is considered.

For an anisotropic material with symmetry of properties inherent in cubic crystals, the influence of prestresses on wave propagation characteristics such as phase velocities, directions of polarization vectors, radial velocity vectors and refraction vectors is estimated.

*Keywords:* pypoelastic anisotropic materials, acoustic waves, initial stresses, finite strains, phase velocity, radial velocity, wave reflection, refraction vector.

*Bibliography:* 17 titles.

**For citation:**
Sokolova, M.Yu., Khristich, D.V., Pravednikov, D.V. 2024, “The effect of initial stresses on the main characteristics of elastic waves in anisotropic media”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 292–306.

## Введение

Анизотропные материалы широко применяются в современных приборах и устройствах. Особенности распространения упругих волн в таких материалах, главным образом в кристаллах, делают их незаменимыми в акустооптической технике. Обычно распространение акустических (звуковых) волн в кристаллах рассматривается в рамках линейной теории упругости [1, 2, 3, 4, 5, 6]. В работах [1, 2] подробно рассмотрены основные законы и характеристики упругих волн в кристаллах, определены понятия фазовых и лучевых (групповых) скоростей, векторов рефракции (медленностей). В работе [2] приведены сечения поверхностей фазовых и лучевых скоростей, поверхностей медленностей различными кристаллографическими плоскостями для кристаллов, относящихся к разным кристаллографическим системам (сингониям). Вид этих сечений демонстрирует анизотропию акустических свойств рассматриваемых кристаллов. В работах [4, 5, 6] подробно изучается анизотропия упругих волн в кристалле теллура, отражение и преломление упругих волн в акустооптических кристаллах, обладающих сильной анизотропией. Рассмотрены некоторые особенности поведения упругих волн на границе раздела, в том числе связанные с перераспределением потоков энергии в отраженных волнах.

Развитие технологий получения композиционных материалов позволяет создавать анизотропные материалы с заданными свойствами. Изделия из таких материалов при эксплуатации подвергаются механическому нагружению, которое может сопровождаться конечными деформациями. При этом возникающие напряжения могут существенно изменить степень анизотропии свойств материала. Если акустические волны распространяются в анизотропной среде с конечными деформациями и начальными напряжениями, то использование линейной теории упругости становится некорректным. Наибольшее число работ, посвященных распространению волн в нелинейно упругой среде, использует модели гиперупругих изотропных и анизотропных материалов [3, 7, 8]. Другой подход связан с использованием моделей гипоупругих материалов, в которых постулируется квазилинейная связь между скоростью изменения напряжений и тензором деформации скорости. Распространению волн в гипоупругих изотропных материалах посвящены работы [9, 10, 11, 12]. Волны в гипоупругих анизотропных материалах рассмотрены в работах [13, 14]. В работе [13] исследовалось влияние предварительных конечных деформаций на вид поверхностей фазовых скоростей кубических кристаллов, а в работе [14] проведен анализ изменения фазовых скоростей распространения волн в кубических кристаллах при действии начальных напряжений.

Учет начальных напряжений и предварительных конечных деформаций требует преобразования основных динамических уравнений. Динамические уравнения распространения волн для гиперупругих и гипоупругих материалов получены в работах [13, 15, 16]. В данной статье уравнения распространения акустических волн в гипоупругих материалах будет записано относительно поля скоростей, связанного с прохождением волны в среде с однородными конечными деформациями и начальными напряжениями. На примере анизотропного материала, по типу симметрии относящегося к кристаллам кубической сингонии, будет рассмотрено влияние напряжений одноосного сжатия на основные характеристики распространения волн: фазовые скорости, векторы поляризации, векторы лучевых скоростей, а также на изменение углов отражения в средах с начальными напряжениями.

## 1. Основные уравнения модели

Будем рассматривать конечные деформации анизотропных материалов в рамках модели гипоупругости. В этом случае постулируется квазилинейная связь между объективной производной обобщенного тензора истинных напряжений $\mathbf{\Sigma}$ с тензором деформации скорости $\mathbf{W}$. Обобщенный тензор истинных напряжений связан с тензором напряжений Коши $\mathbf{S}$ выражением [17]:

$$\mathbf{\Sigma} = J\mathbf{S}, \quad J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho}, \tag{1.1}$$

где $J$ — относительное изменение объема, $\rho_0$, $\rho$ — плотность материала в естественном и текущем состояниях соответственно.

Тензор деформации скорости представляет собой симметричную часть градиента поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\right), \tag{1.2}$$

где $\nabla(\ldots) = \dfrac{\partial(\ldots)}{\partial\mathbf{x}}$ — набла-оператор текущего состояния с радиус-вектором $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$.

В качестве объективной производной тензора напряжений используем производную Яуманна [17]:

$$\mathbf{\Sigma}^{\nabla} = \dot{\mathbf{\Sigma}} + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{\Sigma} - \mathbf{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{1.3}$$

где $\dot{\mathbf{\Sigma}} = \dfrac{d\mathbf{\Sigma}}{dt}$ — полная производная тензора $\mathbf{\Sigma}$ по времени, точкой обозначено скалярное произведение.

В определение (1.3) входит тензор вихря $\boldsymbol{\omega}$, определяемый по полю скоростей выражением [17]:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla\right). \tag{1.4}$$

Определяющие соотношения гипоупругого анизотропного материала записываются в виде

$$\mathbf{\Sigma}^{\nabla} = \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{W}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{N}$ — тензор четвертого ранга, определяемый свойствами среды.

Будем считать, что в некоторый момент времени $t_0$ в среде отсутствуют деформации и напряжения (среда находится в естественном состоянии). Также предположим, что в процессе деформаций компоненты тензора $\mathbf{N}$ в главных осях анизотропии, определяемых векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j = \delta_{ij}$, не изменяются. Результатом интегрирования соотношений (1.5) на бесконечно-малом временном интервале $[t_0, t_0+\Delta t]$ является обобщенный закон Гука, поэтому в естественном состоянии тензор $\mathbf{N}$ совпадает с тензором упругости материала, компоненты которого выражаются через константы упругости. Для анизотропных материалов с различным типом симметрии свойств тензор $\mathbf{N}$ имеет различное число ненулевых компонент [1, 2, 17].

Пусть к моменту времени $t_1$ в среде создано однородное напряженно-деформированное состояние, которое назовем начальным. Полагаем, что переход от естественного состояния в начальное состояние сопровождается конечными деформациями, поэтому конфигурации начального и естественного состояний различны ($\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$). В начальном состоянии поле напряжений определяется тензором $\mathbf{\Sigma}_1 = J_1\mathbf{S}_1$, удовлетворяющим условиям равновесия, записанным при отсутствии массовых сил:

$$\nabla_1\cdot\mathbf{S}_1 = \nabla_1\cdot\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{0}, \tag{1.6}$$

так как $\nabla_1 J_1 = 0$ для однородного состояния. Здесь $\nabla_1(\ldots) = \dfrac{\partial(\ldots)}{\partial\mathbf{x}_1}$ — набла-оператор начального состояния с радиус-вектором $\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_0, t)$.

В момент времени $t_1$ в среде возбуждается звуковая волна, что приводит к изменению полей деформаций и напряжений. В любой момент времени $t > t_1$ напряжения в среде определяются тензором $\mathbf{S}$, удовлетворяющим уравнениям движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \tag{1.7}$$

При использовании модели гипоупругого материала удобно записать уравнения (1.7) через скорость изменения напряжений. Результатом дифференцирования (1.7) по времени являются уравнения [17]:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{S}} - \mathbf{S} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = J^{-1} \rho_0 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{v}\mathbf{v} \right) \right). \tag{1.8}$$

Полагая, что при распространения звуковых волн градиенты перемещений и скоростей малы, в правой части (1.8) конвективными слагаемыми можно пренебречь. Учитывая также однородность начального состояния и уравнения (1.6), получим линеаризованные в окрестности начального состояния уравнения в виде

$$\nabla_1 \cdot J_1 \dot{\mathbf{S}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}. \tag{1.9}$$

Уравнения (1.9), записанные через обобщенный тензор истинных напряжений (1.1), принимают вид

$$\nabla_1 \cdot \dot{\mathbf{\Sigma}} - \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \nabla_1 (\nabla_1 \cdot \mathbf{v}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}. \tag{1.10}$$

Подставляя в (1.10) определяющие соотношения (1.5), после преобразований получим:

$$\mathbf{N} \cdot\cdot \nabla_1 \mathbf{W} - \mathbf{\Sigma}_1 \cdot (\nabla_1 \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{\Sigma}_1 \cdot\cdot \nabla_1 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \nabla_1 (\nabla_1 \cdot \mathbf{v}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}. \tag{1.11}$$

Подставим в уравнения (1.11) выражения (1.2) и (1.4) для тензоров $\mathbf{W}$ и $\boldsymbol{\omega}$ через поле скоростей:

$$\mathbf{N} \cdot\cdot\cdot \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{v} + \frac{1}{2} \left( \mathbf{\Sigma}_1 \cdot\cdot \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{v} - \nabla_1 \mathbf{v} \nabla_1 \cdot\cdot \mathbf{\Sigma}_1 \right) - \frac{1}{2} \mathbf{\Sigma}_1 \cdot (\nabla_1 \cdot \nabla_1 \mathbf{v} + \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{v}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}. \tag{1.12}$$

Уравнения (1.12) записаны относительно поля скоростей частиц среды, связанного с прохождением звуковой волны в анизотропной гипоупругой среде с начальными напряжениями $\mathbf{\Sigma}_1$.

## 2. Плоская монохроматическая волна

Пусть в анизотропной гипоупругой среде с начальными напряжениями $\mathbf{\Sigma}_1$ распространяется плоская монохроматическая волна, которая задана полем скоростей

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_1, \tau) = A\mathbf{p} \exp\left(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega\tau)\right), \tag{2.1}$$

где $A$ — амплитуда скорости, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации ($\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 1$), $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ — волновой вектор, $k$ — волновое число, $\mathbf{n}$ — вектор волновой нормали ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$), $\omega$ — круговая частота, $\tau = t - t_1 > 0$ — время.

Выразим входящие в (1.11) тензоры $\mathbf{W}$ и $\boldsymbol{\omega}$ через поле скоростей (2.1), воспользовавшись выражениями (1.2) и (1.4):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} ikA \exp\left(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega\tau)\right) (\mathbf{np} + \mathbf{pn}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} ikA \exp\left(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega\tau)\right) (\mathbf{np} - \mathbf{pn})$$

и вычислим также

$$\nabla_1 \cdot \mathbf{v} = ikA \exp\left(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - \omega\tau)\right)\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\omega^2 A \exp\left(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - \omega\tau)\right)\mathbf{p}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (1.11), получим аналог уравнений Кристоффеля [1, 2]:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{n}, \boldsymbol{\Sigma}_1\right)\cdot\mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{A}\left(\mathbf{n}, \boldsymbol{\Sigma}_1\right)$ — акустический тензор, $c = \dfrac{\omega}{k}$ — фазовая скорость распространения волны.

Входящий в уравнения (2.2) акустический тензор имеет вид

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{n}, \boldsymbol{\Sigma}_1\right) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{n} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_1\cdot\mathbf{n}\mathbf{E} - \boldsymbol{\Sigma}_1\right) - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Sigma}_1\cdot\mathbf{n}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_1\right), \tag{2.3}$$

где $\mathbf{E} = \delta_{ij}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ — единичный тензор.

Уравнения (2.2) отличаются от классических уравнений Кристоффеля [1, 2]

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{p} = \rho_0 c^2\mathbf{p}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}, \tag{2.4}$$

тем, что в них вместо тензора Кристоффеля $\mathbf{M}$ используется акустический тензор $\mathbf{A}\left(\mathbf{n}, \boldsymbol{\Sigma}_1\right)$, зависящий не только от свойств среды и направления распространения волны, но и от начальных напряжений в среде. В соответствии с (2.2) фазовые скорости распространения волн и векторы поляризации находятся как результат решения задачи на нахождение собственных значений и собственных векторов акустического тензора. Из уравнений (2.4) следует, что в классическом случае фазовые скорости $c$ и векторы поляризации $\mathbf{p}$ определяются через тензор Кристоффеля. Таким образом, фазовые скорости и векторы поляризации, определенные по уравнениям (2.2), зависят от действующих в среде начальных напряжений.

Будем характеризовать изменение фазовой скорости распространения волны $c_{\mathbf{n}}$ в направлении вектора $\mathbf{n}$, вызванное действием начальных напряжений, относительной величиной

$$\Delta = \frac{c_{\mathbf{n}} - c_{\mathbf{n}0}}{c_{\mathbf{n}0}}, \tag{2.5}$$

где $c_{\mathbf{n}0}$ — фазовая скорость распространения волны в среде при отсутствии начальных напряжений.

В изотропной среде без начальных напряжений распространяются продольная волна, у которой вектор поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{n}$, и множество поперечных волн с векторами поляризации, перпендикулярными вектору $\mathbf{n}$. В анизотропной среде наряду с продольными волнами могут распространяться квазипродольные волны, у которых вектор поляризации отклоняется от вектора волновой нормали. Такие волны можно характеризовать углом поляризации $\chi$, косинус которого определяется выражением

$$\cos\chi = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}. \tag{2.6}$$

В рассматриваемой модели угол $\chi$ также зависит от действующих в среде начальных напряжений.

## 3. Определение лучевой скорости в гипоупругих материалах

Известно [1, 2], что распространение акустических волн не сопровождается переносом вещества, а сопровождается переносом энергии. В изотропных средах без начальных напряжений энергия переносится в направлении вектора фазовой скорости $\mathbf{c} = c\mathbf{n}$, нормального к

фронту волны. В анизотропных средах в общем случае направление потока энергии не совпадает с вектором $\mathbf{c}$. Скорость и направление потока энергии характеризуется вектором лучевой (групповой) скорости

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{3.1}$$

В определении вектора лучевой скорости (3.1) удобно перейти от дифференцирования по волновому вектору $\mathbf{k}$ к дифференцированию по вектору волновой нормали $\mathbf{n}$, учитывая связь между ними $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, а также связь угловой частоты с фазовой скоростью $\omega = kc$. Тогда вектор лучевой скорости

$$\mathbf{w} = \mathbf{c} + (\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \cdot \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}}. \tag{3.2}$$

Вектор $\mathbf{s} = \dfrac{\partial c}{\partial \mathbf{n}}$ характеризует отклонение вектора лучевой скорости $\mathbf{w}$ от вектора фазовой скорости $\mathbf{c}$. Волны, для которых $\mathbf{s} = 0$, называют обыкновенными волнами [2]. Для отыскания вектора $\mathbf{s}$ в рамках рассматриваемой модели гипоупругого материала умножим скалярно обе части уравнений (2.2) на вектор поляризации $\mathbf{p}$ и продифференцируем получившееся выражение по вектору $\mathbf{n}$:

$$2\rho_0 c \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{p},$$

откуда с учетом выражения для акустического тензора (2.3) после преобразований получим

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\rho_0 c} \left( \mathbf{P} + \frac{1}{4} \left( (I_1 \mathbf{E} - 2\boldsymbol{\Sigma}_1) \cdot \mathbf{pp} - \mathbf{pp} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 \right) \right) \cdot \mathbf{n}, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}$ –– второй тензор Кристоффеля [2], $I_1 = \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot\cdot \mathbf{E}$ — первый инвариант тензора напряжений $\boldsymbol{\Sigma}_1$.

В линейной теории упругости вектор $\mathbf{s}$ определяется выражением

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\rho_0 c} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \tag{3.4}$$

поэтому второе слагаемое в (3.3) определяет влияние начальных напряжений на отклонение вектора лучевой скорости от вектора фазовой скорости.

Обозначим через $\gamma$ угол между векторами $\mathbf{w}$ и $\mathbf{c}$, который характеризует отклонение направления переноса энергии $\mathbf{w}$ от направления распространения волны $\mathbf{n}$. Косинус угла $\gamma$ можно найти по формуле

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s^2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}, \tag{3.5}$$

где $s = \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}$ –– длина вектора $\mathbf{s}$.

Если соотношения (3.3) переписать в виде

$$\mathbf{s} = \frac{1}{c} \mathbf{A}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{A}_\mathbf{p} = \frac{1}{\rho_0} \left( \mathbf{P} + \frac{1}{4} \left( (I_1 \mathbf{E} - 2\boldsymbol{\Sigma}_1) \cdot \mathbf{pp} - \mathbf{pp} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1 \right) \right),$$

то $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = \dfrac{1}{c^2} \mathbf{n} \cdot {\mathbf{A}_\mathbf{p}}^T \cdot \mathbf{A}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \dfrac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$.

Пусть начальные напряжения являются гидростатическими $\boldsymbol{\Sigma}_1 = I_1 \mathbf{E}$, тогда выражение (3.3) для вектора $\mathbf{s}$ принимает вид:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\rho_0 c} \left( \mathbf{p} \cdot \left( \mathbf{N} - \frac{1}{2} I_1 \mathbf{EE} \right) \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \mathbf{n}, \tag{3.6}$$

Из выражения (3.6) следует, что начальные гидростатические напряжения влияют только на длину вектора $\mathbf{s}$ и не влияют на его направление по сравнению с классическим решением (3.4).

## 4. Отражение волн в средах с начальными напряжениями

Для решения задачи об отражении (преломлении) упругих волн в монографиях [1, 2] вводят в рассмотрение так называемый вектор рефракции $\mathbf{m} = \frac{1}{c}\mathbf{n}$, имеющий направление вектора волновой нормали и длину, обратную величине фазовой скорости. Обычно полагают, что для падающей волны вектор рефракции $\mathbf{m}_* = \frac{1}{c_*}\mathbf{n}_*$ известен, а для отраженных волн векторы $\mathbf{m}_i$ требуется найти. Для этого используют общий закон отражения (преломления) волн, в соответствии с которым проекции векторов рефракции падающей и отраженных (преломленных) волн на поверхность раздела равны между собой [1], а также уравнение поверхности рефракции, которое в классическом случае линейной упругости имеет вид:

$$\det(\mathbf{\Lambda_m} - \mathbf{E}) = 0, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{\Lambda_m} = \frac{1}{\rho_0}\mathbf{m}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{m} = \frac{1}{\rho_0 c^2}\mathbf{M}$ — тензор рефракции.

Запишем уравнение поверхности рефракции для гипоупругой среды с начальными напряжениями. Для этого представим акустический тензор (2.3) через вектор $\mathbf{m}$ и введем тензор

$$\mathbf{A_m}(\mathbf{m}, \mathbf{\Sigma}_1) = \frac{1}{\rho_0}\left[\mathbf{m}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{m} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{m}\cdot\mathbf{\Sigma}_1\cdot\mathbf{m}\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\mathbf{\Sigma}_1\right) - \frac{1}{2}(\mathbf{\Sigma}_1\cdot\mathbf{m}\mathbf{m} + \mathbf{m}\mathbf{m}\cdot\mathbf{\Sigma}_1)\right]. \tag{4.2}$$

Уравнения (2.2) через тензор (4.2) записываются в виде

$$(\mathbf{A_m} - \mathbf{E})\cdot\mathbf{p} = \mathbf{0}. \tag{4.3}$$

Характеристическое уравнение системы (4.3) имеет вид

$$\det(\mathbf{A_m} - \mathbf{E}) = 0. \tag{4.4}$$

Сравнивая (4.4) и (4.1), назовем тензор $\mathbf{A_m}$ тензором рефракции для гипоупругого материала. Уравнение (4.4) является уравнением поверхности рефракции для анизотропной гипоупругой среды с начальными напряжениями.

Рассмотрим отражение плоской волны от жесткой преграды, перпендикулярной оси анизотропии $\mathbf{a}_1$. Будем считать, что вектор волновой нормали падающей волны $\mathbf{n}_* = \cos\alpha\mathbf{a}_1 + \sin\alpha\mathbf{a}_2$. Тогда $\alpha$ — угол падения волны, а плоскость с базисными векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ является плоскостью падения (рис. 1).

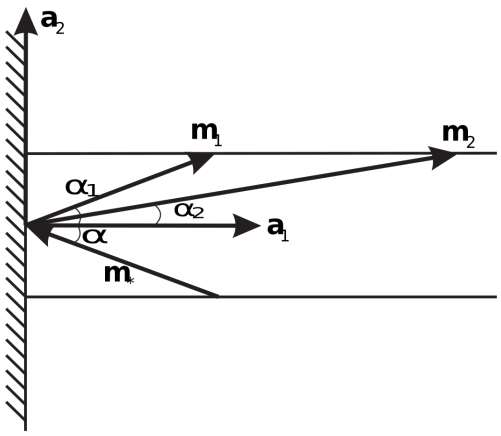



Рис. 1: Отражение упругой волны от жесткой преграды

Отраженные от жесткой преграды поляризованные в плоскости падения волны имеют векторы рефракции $\mathbf{m}_1 = \dfrac{1}{c_1}\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{m}_2 = \dfrac{1}{c_2}\mathbf{n}_2$. В соответствии с общим законом отражения

$$\mathbf{m}_* \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \quad \text{или} \quad \frac{\sin\alpha}{c_*} = \frac{\sin\alpha_1}{c_1} = \frac{\sin\alpha_2}{c_2}.$$

Для отраженных волн представим векторы рефракции в виде

$$\mathbf{m}_1 = \xi_1\mathbf{a}_1 + \frac{\sin\alpha}{c_*}\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{m}_2 = \xi_2\mathbf{a}_1 + \frac{\sin\alpha}{c_*}\mathbf{a}_2. \tag{4.5}$$

Коэффициенты $\xi_1$, $\xi_2$ являются корнями уравнения (4.4) и для отраженных волн принимают положительные значения. Поскольку тензор $\mathbf{A}_\mathbf{m}$ зависит от начальных напряжений $\mathbf{\Sigma}_1$, корни уравнения (4.4) также зависят от $\mathbf{\Sigma}_1$. Углы отражения $\alpha_1$ и $\alpha_2$ определяются через коэффициенты $\xi_1$, $\xi_2$ в соответствии с выражениями

$$\cos\alpha_1 = \xi_1 c_1, \quad \cos\alpha_2 = \xi_2 c_2. \tag{4.6}$$

Отметим, что уравнение (4.4) после подстановки в него выражений (4.2) и (4.5) оказывается уравнением шестой степени относительно неизвестных коэффициентов $\xi_i$, решение которого в общем случае затруднительно. В работе [1] предложен графический метод определения векторов рефракции $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$, основывающийся на построении поверхностей рефракции.

## 5. Особенности распространения волн в анизотропных материалах при действии начальных напряжений

Рассмотрим анизотропную среду, обладающую симметрией свойств, присущей кристаллам кубической сингонии. Для таких сред тензор упругости $\mathbf{N}$ может быть представлен разложением по собственным базисным тензорам [14, 16]:

$$\mathbf{N} = N_1\mathbf{\Omega}^{(1)} + N_2\mathbf{\Omega}^{(2)} + N_3\mathbf{\Omega}^{(3)}, \tag{5.1}$$

где $N_1$, $N_2$, $N_3$ связаны с упругими константами кубических кристаллов $C_{11}$, $C_{12}$, $C_{44}$ [2] соотношениями

$$N_1 = C_{11} + 2C_{12}, \quad N_2 = C_{11} - C_{12}, \quad N_3 = 2C_{44}.$$

Собственные тензоры рассматриваемого анизотропного материала выражаются через тензоры обобщенного канонического базиса А.А. Ильюшина $\mathbf{I}^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ в виде [14, 16]:

$$\mathbf{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^0\mathbf{I}^0, \quad \mathbf{\Omega}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^1\mathbf{I}^1 + \mathbf{I}^2\mathbf{I}^2), \quad \mathbf{\Omega}^{(3)} = \frac{1}{3}(\mathbf{I}^3\mathbf{I}^3 + \mathbf{I}^4\mathbf{I}^4 + \mathbf{I}^5\mathbf{I}^5), \tag{5.2}$$

где

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3).$$

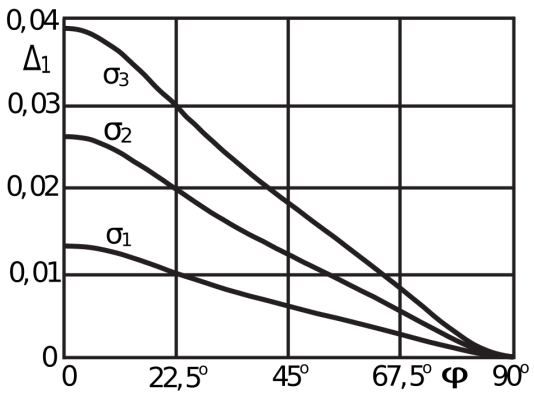
При рассмотрении анизотропных материалов важно, что тензоры $\mathbf{I}^\alpha$ определяются в базисе главных осей анизотропии $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

Степень упругой анизотропии кубического кристалла характеризуется отношением $A = \dfrac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \dfrac{N_3}{N_2}$. Если $A = 1$, то среда с тензором упругости (5.1) является изотропной,

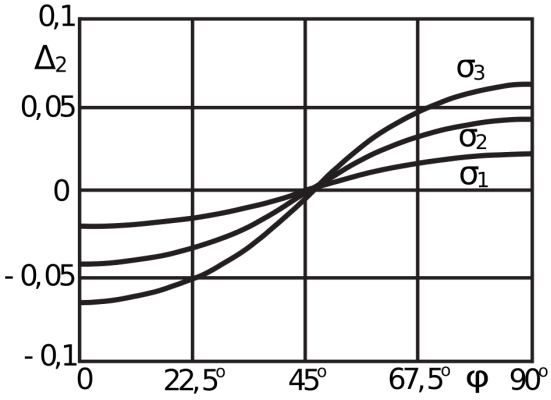
если $0 < A < 1$, то среда обладает отрицательной анизотропией, если $A > 1$, то среда обладает положительной анизотропией. У сред с положительной и отрицательной анизотропией различными являются формы фазовых поверхностей, определяемых годографом вектора фазовой скорости $\mathbf{c}$ [2].

Пусть в рассматриваемой анизотропной среде создано однородное напряженно-деформированное состояние с тензором напряжений $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1$. При $\sigma > 0$ это одноосное растяжение, при $\sigma < 0$ — одноосное сжатие. Рассмотрим распространение в такой среде упругих волн с вектором волновой нормали, лежащим в плоскости с базисными векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ так, что $\mathbf{n} = \cos\varphi \mathbf{a}_1 + \sin\varphi \mathbf{a}_2$. Угол $\varphi$ характеризует направление распространения волны в рассматриваемой плоскости.

Подставляя (5.1) и (5.2) в выражение для акустического тензора (2.3), из обобщенного уравнения Кристоффеля можно найти фазовые скорости и векторы поляризации продольных (квазипродольных) и поперечных (квазипоперечных) волн как функции угла $\varphi$ и величины начальных напряжений $\sigma$. По соотношениям (2.5) и (2.6) определяем относительные изменения фазовых скоростей распространения квазипродольной ($c_1$) и квазипоперечной ($c_2$) волн, поляризованных в плоскости осей анизотропии $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, а также угол поляризации квазипродольной волны $\chi_1$. Соответствующие графики представлены на рис. 2 и 3 для анизотропной среды со степенью анизотропии $A = 1,73$. Графики построены для значений начальных напряжений $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = -200$МПа, $\sigma_2 = -400$МПа, $\sigma_3 = -600$МПа.




а) продольные (квазипродольные) волны




б) поперечные (квазипоперечные) волны

Рис. 2: Относительные изменения фазовых скоростей распространения волн

Из графиков, приведенных на рис. 2, следует, что с ростом величины начальных напряжений изменение фазовых скоростей как квазипродольных, так и квазипоперечных волн возрастает, хотя в рассмотренном примере не превышает 4% для квазипродольных волн и 6% для квазипоперечных волн. Из графиков, приведенных на рис. 3, следует, что с ростом величины начальных напряжений изменение угла поляризации относительно естественного состояния, когда начальные напряжения не действуют, может достигать 50%. Если в естественном состоянии рассматриваемые волны оказываются продольными при $\varphi|_{\sigma_0} = 0$, $\varphi|_{\sigma_0} = 45°$ и $\varphi|_{\sigma_0} = 90°$, то при действии сжимающих напряжений продольными оказываются волны при $\varphi|_{\sigma_3} = 0$, $\varphi|_{\sigma_3} = 36,4°$ и $\varphi|_{\sigma_3} = 90°$, то есть положение одной из продольных волн меняется с изменением величины напряжений.

Вычисляя по тензору упругости (5.1) второй тензор Кристоффеля и по формулам (3.2), (3.3) вектор лучевой скорости, находим по соотношениям (3.4) зависимость угла $\gamma$ отклонения вектора лучевой скорости от вектора фазовой скорости как функцию угла $\varphi$ и величины напряжений $\sigma$. Для значений $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ строим соответствующие графики, представленные на рис. 4.

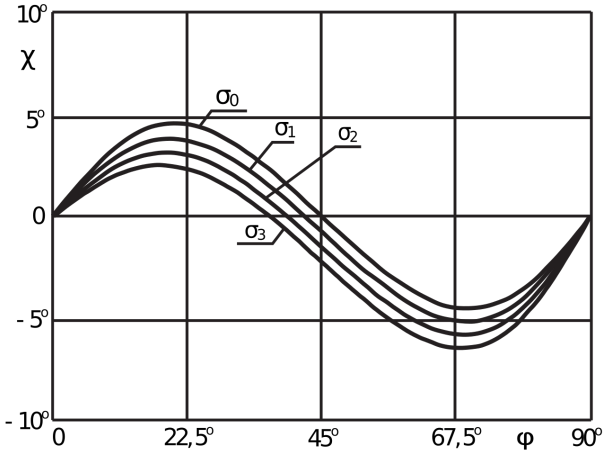
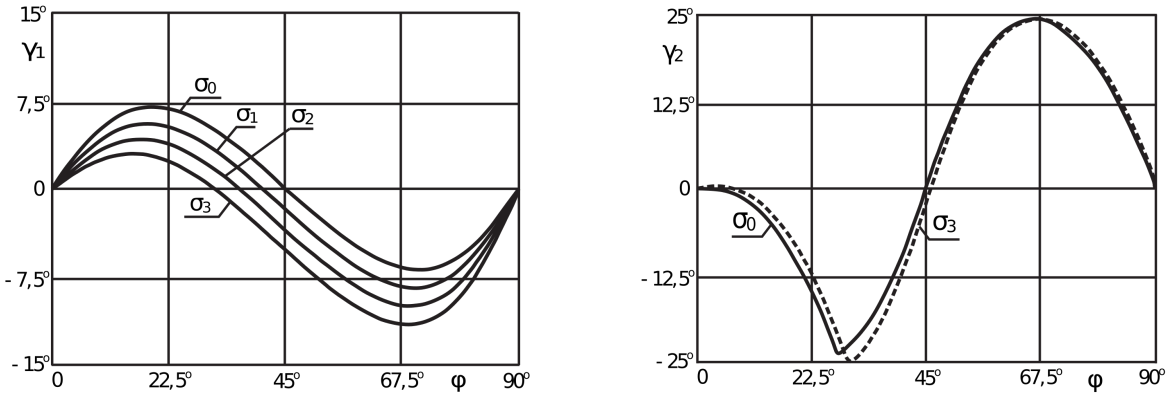



Рис. 3: Углы поляризации квазипродольных волн




а) продольные (квазипродольные) волны

б) поперечные (квазипоперечные) волны

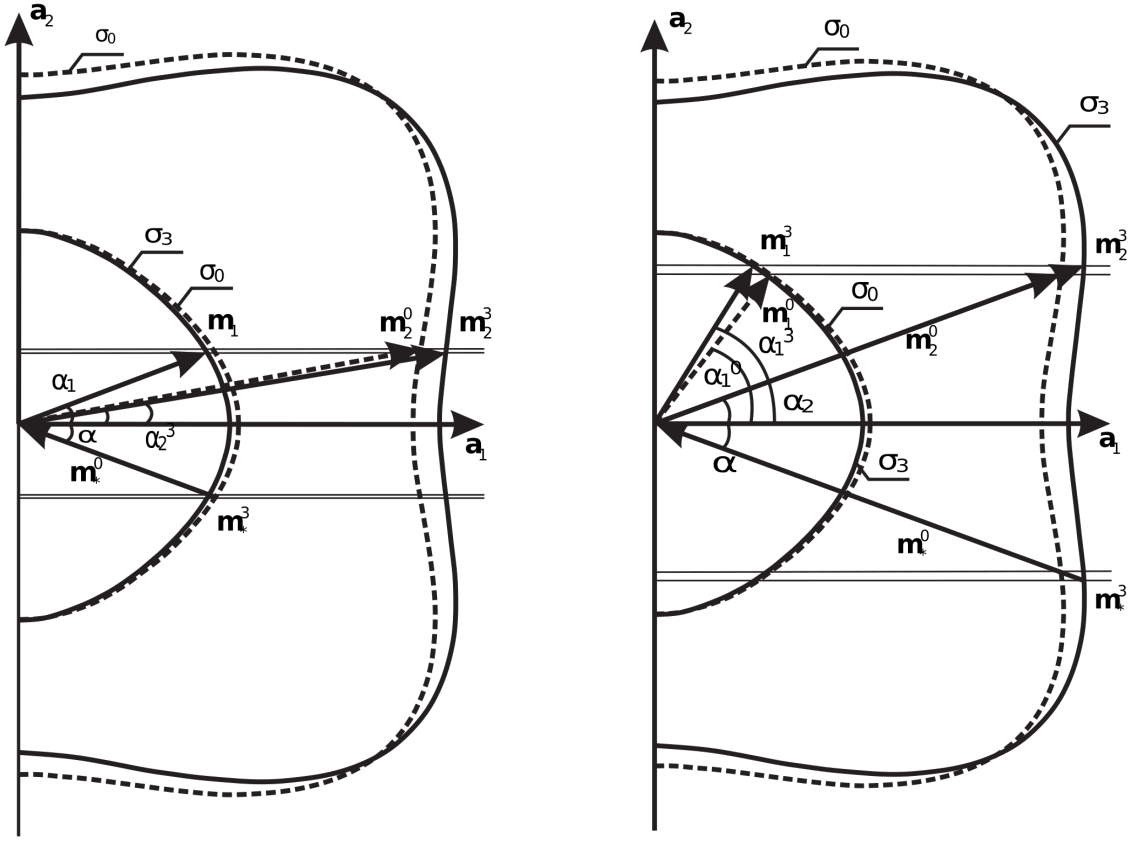
Рис. 4: Углы между векторами лучевой скорости и фазовой скорости

Из построенных графиков следует, что отклонение направления переноса энергии от направления распространения волны по абсолютной величине больше углов поляризации и достигает в естественном состоянии для квазипродольных волн максимально 10°, а для квазипоперечных волн максимально 25°. Изменение угла $\gamma$ вследствие действия начальных напряжений более существенно для квазипродольных волн, чем для квазипоперечных. Эти изменения в первом случае достигают 6°, а во втором только 3°. В естественном состоянии в рассматриваемом материале обыкновенные волны, как продольные, так и поперечные, имеют направления распространения $\varphi|_{\sigma_0} = 0$, $\varphi|_{\sigma_0} = 45°$ и $\varphi|_{\sigma_0} = 90°$. При действии начальных напряжений продольные и поперечные волны, распространяющиеся в направлениях $\varphi|_{\sigma_3} = 0$ и $\varphi|_{\sigma_3} = 90°$, являются обыкновенными. Направление распространения обыкновенной квазипродольной волны определяется углом $\varphi|_{\sigma_3} = 31,0°$, а в случае обыкновенной квазипоперечной волны $\varphi|_{\sigma_3} = 45,9°$.

Рассмотрим влияние начальных напряжений на изменение угла отражения квазипродольных и квазипоперечных волн от жесткой преграды в соответствии со схемой, представленной на рис. 1. Для этого построим сечения поверхностей рефракции для этих волн в естественном состоянии и при действии сжимающих напряжений $\mathbf{\Sigma}_1 = \sigma_3 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1$. Исходя из общего закона отражения, построим прямые, параллельные вектору $\mathbf{a}_1$, отстоящие от него на величину, равную проекции вектора рефракции падающей волны на поверхность раздела. На рис. 5,а показано определение векторов рефракции отраженных волн в случае, если падающая волна является

квазипродольной, а на рис. 5,б падающая волна является квазипоперечной.

Угол падения $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ принят одинаковым для падающих квазипродольной и квазипоперечной волн при $\sigma = \sigma_0$ и $\sigma = \sigma_3$. В силу симметрии свойств рассматриваемого анизотропного материала углы отражения равны углу падения одноименных волн, поэтому на рис. 5,а $\alpha_1 = \alpha$, а на рис. 5,б $\alpha_2 = \alpha$ независимо от величины действующих напряжений. Если падающая волна является квазипродольной (рис. 5,а), то результатом действия сжимающих напряжений является уменьшение угла отражения квазипоперечной волны ($\alpha_2|_{\sigma_3} < \alpha_2|_{\sigma_0}$). Если падающая волна является квазипоперечной (рис. 5,б), то результатом действия сжимающих напряжений является увеличение угла отражения квазипродольной волны ($\alpha_1|_{\sigma_3} > \alpha_1|_{\sigma_0}$).




а) падающая волна квазипродольная

б) падающая волна квазипоперечная

Рис. 5: Поверхности и векторы рефракции при отражении волн от жесткой преграды

## 6. Выводы

В работе получено уравнение распространения звуковых волн в гипоупругих анизотропных материалах, записанное относительно поля скоростей, связанных с распространением волны. Это уравнение позволяет определить все характеристики упругих волн, принятые в линейной теории упругости, по заданному полю скоростей начального возмущения. В статье получены обобщенные на случай гипоупругой среды уравнение Кристоффеля (2.2), выражение для вектора лучевой скорости, уравнение поверхности рефракции. Эти уравнения позволяют проанализировать влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн.

Рассмотрен пример анизотропной гипоупругой среды с симметрией свойств, присущей кубическим кристаллам. Показано, что начальные напряжения одноосного сжатия влияют на

величины фазовых скоростей распространения волн, направления векторов поляризации, векторов лучевых скоростей и векторов рефракции при решении задачи об отражении упругих волн. Предложенные соотношения позволяют для любой анизотропной среды при любых начальных напряжениях выявлять особенности распространения упругих волн.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. 383 с.

2. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 640 с.

3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями // Киев: Наукова Думка, 1986.

4. Поликарпова Н. В., Мальнева П. В., Волошинов В. Б. Анизотропия упругих волн в кристалле теллура // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 3. С. 332-338.

5. Поликарпова Н. В., Волошинов В. Б., Иванова П. А. Отражение плоских акустических волн при наклонном падении на грань кристалла диоксида теллура // Акустический журнал. 2019. Т. 65. № 6. С. 740-750.

6. Поликарпова Н. В., Марунин М. В. Необычные случаи поведения акустических волн на границе раздела в кристалле парателлурита // Известия РАН. Серия физическая. 2021. Т. 85. № 6. С. 799-803.

7. Telichko A. V., Erohin S. V., Kvashnin G. M., Sorokin P. B., Sorokin B. P., Blank V. D. Diamond's third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation // J. Mater. Sci. 2017. V. 52. P. 3447-3456.

8. Роменский Е. И., Лысь Е. В., Чеверда В. А., Эпов М. И. Динамика деформирования упругой среды с начальными напряжениями // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5. С. 178-189.

9. Rushchitsky J. J. Nonlinear plane waves in hypoelastic materials // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. Springer, Cham, 2014.

10. Rushchitsky J. J. On the types and number of plane waves in hypoelastic materials // International Applied Mechanics. 2005. V. 41. No. 11. P. 1288-1298.

11. Demidov V. N. Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses // Key Engineering Materials. 2016. V. 712. P. 384-389.

12. Демидов В. Н. О расщеплении волн сдвига в изотропных гипоупругих материалах // Физическая мезомеханика. 2000. Т. 3. № 2. С. 15-36.

13. Markin A. A., Sokolova M. Yu. Dynamic equations for the propagation of acoustic waves in pre-deformed materials // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59. No. 2. P. 679-688.

14. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипоупругих анизотропных материалах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. Т. 91.

15. Соколова М. Ю., Христич Д. В. Акустические волны в гипоупругих телах. I. Изотропные материалы // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 2. С. 318-333.

16. Соколова М. Ю., Христич Д. В. Акустические волны в гипоупругих телах. II. Анизотропные материалы // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 2. С. 334-349.

17. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.

## REFERENCES

1. Fedorov, F. I. 2012, "Theory of Elastic Waves in Crystals", *Springer*.

2. Sirotin, Yu. I. & Shaskol'skaya, M. P. 1982, "Fundamentals of Crystal Physics", *Mir Publishers*, Moscow.

3. Guz', A N. 1986, "*Elastic waves in bodies with initial stresses*", in two volumes, *Naukova Dumka*, Kiev, [in Russian].

4. Polikarpova, N. V., Mal'neva, P. V. & Voloshinov, V. B. 2013, "Anisotropy of elastic waves in a tellurium crystal", *Acoustic Journal*, vol. 59, no. 3, p. 332-338 [in Russian].

5. Polikarpova, N. V., Voloshinov, V. B. & Ivanova, P. A. 2019, "Reflection of plane acoustic waves at an inclined incidence on the face of a tellurium dioxide crystal", *Acoustic Journal*, vol. 65, no. 6, p. 740-750 [in Russian].

6. Polikarpova, N. V. & Marunin, M. V. 2021, "Unusual cases of acoustic wave behavior at the interface in a paratellurite crystal", *News of the Russian Academy of Sciences. The Physical Series*, vol. 85, no. 6, p. 799-803 [in Russian].

7. Telichko, A. V., Erohin, S. V., Kvashnin, G. M., Sorokin, P. B., Sorokin, B. P. & Blank, V. D. 2017, "Diamond's third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation", *J. Mater. Sci.*, vol. 52, p. 3447-3456.

8. Romenskii E. I., Lys E. B., Cheverda V. A. & Epov, M. I. 2017, "Dynamics of deformation of an elastic medium with initial stresses", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 5 [in Russian].

9. Rushchitsky J. J. 2014, "*Nonlinear plane waves in hypoelastic materials*" // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. Springer, Cham.

10. Rushchitsky J. J. 2005, "On the types and number of plane waves in hypoelastic materials", *International Applied Mechanics*, vol. 41, no. 11, p. 1288-1298.

11. Demidov V. N. 2016, "Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses", *Key Engineering Materials*, vol. 712, p. 384-389.

12. Demidov V. N. 2000, " On the splitting of shear waves in isotropic hypoelastic materials", *Physical Mesomechanics*, vol. 3, no. 2, p. 15-36 [in Russian].

13. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2024 "Dynamic equations for the propagation of acoustic waves in pre-deformed materials", *Mechanics of Solids*, vol. 59, no. 2, p. 679-688.

14. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2024 "The influence of initial stresses on the propagation of sound waves in hypoelastic anisotropic materials", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*, vol. 91 [in Russian].

15. Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2024, “Acoustic waves in hypoelastic solids. I. Isotropic materials“ *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 2, p. 318-333.

16. Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2024, “Acoustic waves in hypoelastic solids. II. Anisotropic materials“ *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 2, p. 334-349.

17. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2015, “ *Thermomechanics of elastoplastic deformation*“, Cambridge International Science Publishing, Cambridge.

Получено: 15.06.2024
Принято в печать: 26.12.2024

# РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 25 Выпуск 5

Главный редактор

**Чубариков Владимир Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
*e-mail: chubarik2020@mail.ru*

Заместители главного редактора

**Добровольский Николай Михайлович** — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
*e-mail: dobrovol@tsput.ru*

**Нижников Александр Иванович** — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.
*e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru*

Ответственные секретари

**Добровольский Николай Николаевич** — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Реброва Ирина Юрьевна** — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
*e-mail: i_rebrova@mail.ru*

Члены редколлегии

**Боровков Алексей Иванович** — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
*e-mail: borovkov@spbstu.ru*

**Бухштабер Виктор Матвеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий отделом геометрии и топологии Математического института им. В.А. Стеклова РАН.
*e-mail: buchstab@mi.ras.ru*

**Быковский Виктор Алексеевич** — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.
*e-mail: vab@iam.khv.ru*

**Востоков Сергей Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.
*e-mail: sergei.vostokov@gmail.com*

**Геворкян Павел Самвелович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа имени академика П.С. Новикова Московского педагогического государственного университета.
*e-mail: ps.gevorkyan@mpgu.su*

**Георгиевский Дмитрий Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

**Горбачёв Владимир Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
*e-mail: vigorby@mail.ru*

**Гриценко Сергей Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
*e-mail: s.gritsenko@gmail.com*

**Демидов Сергей Сергеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.
*e-mail: serd42@mail.ru*

**Дурнев Валерий Георгиевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.
*e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru*

**Зубков Андрей Михайлович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
*e-mail: zubkov@mi.ras.ru*

**Иванов Александр Олегович** — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
*e-mail: aoiva@mech.math.msu.su*

**Иванов Валерий Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.
*e-mail: ivaleryi@mail.ru*

**Королёв Максим Александрович** — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
*e-mail: korolevma@mi-ras.ru*

**Кузнецов Валентин Николаевич** — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.
*e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru*

**Матиясевич Юрий Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.
*e-mail: yumat@pdmi.ras.ru*

**Мищенко Сергей Петрович** — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.
*e-mail: mishchenkosp@mail.ru*

**Нестеренко Юрий Валентинович** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
*e-mail: nester@mi.ras.ru*

**Панин Владимир Алексеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член Академии информатизации образования, президент Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
*e-mail: tgpu@tula.net*

**Пачев Урусби Мухамедович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.
*e-mail: urusbi@rambler.ru*

**Семёнов Алексей Львович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
*e-mail: alsemno@ya.ru*

**Толоконников Лев Алексеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.
*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Чирский Владимир Григорьевич** — доктор физико-математических наук, доцент, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ.
*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Аллаков Исмаил** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).
*e-mail: iallakov@mail.ru*

**Белов Алексей Яковлевич** — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).
*e-mail: Kanelster@gmail.com*

**Берник Василий Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).
*e-mail: bernik@im.bas-net.by*

**Лауринчикас Антанас** — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).
*e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt*

**Лю Юнпин** — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).
*e-mail: ypliu@bnu.edu.cn*

**Мисир Джумаил оглы Марданов** — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).
*e-mail: rmi@lan.ab.az*

**Мусин Олег Рустамович** — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).
*e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com*

**Рахмонов Зарулло Хусейнович** — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).
*e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru*

**Салиба Холем Мансур** — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).
*e-mail: qwe123@rocketmail.com*

**Табари Абдулло Хабибулло** — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета им. Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).
*e-mail: rektor@kgu.tj*

**Фукшанский Леонид Евгеньевич** — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).
*e-mail: lenny@cmc.edu*

**Шяучюнас Дарюс** — доктор математических наук, профессор, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).
*e-mail: darius.siauciunas@su.lt*

# THE EDITORIAL BOARD

Volume 25 Issue 5

The main editor

**Chubarikov Vladimir Nikolaevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
*e-mail: chubarik2020@mail.ru*

The assistants of the main editor:

**Dobrovolsky Nikolai Mihailovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
*e-mail: dobrovol@tsput.ru*

**Nijnikov Alexander Ivanovich** — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Moscow Pedagogical State University; Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.
*e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru*

Executive secretaries

**Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich** — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Rebrova Irina Yuryevna** — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
*e-mail: i_rebrova@mail.ru*

Editorial Board

**Borovkov Aleksey Ivanovich** — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University.
*e-mail: borovkov@spbstu.ru*

**Buchshtaber Victor Matveyevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Department of Geometry and Topology of the V.A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences.
*e-mail: buchstab@mi.ras.ru*

**Bykovsky Victor Alekseevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.
*e-mail: vab@iam.khv.ru*

**Vostokov Sergey Vladimirovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.
*e-mail: sergei.vostokov@gmail.com*

**Gevorkyan Pavel Samvelovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis named after Academician P.S. Novikov at Moscow Pedagogical State University.

{noindent*e-mail: ps.gevorkyan@mpgu.su*

**Georgievsky Dmitry Vladimirovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

**Gorbachev Vladimir Ivanovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
*e-mail: vigorby@mail.ru*

**Gritsenko Sergey Alexandrovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
*e-mail: s.gritsenko@gmail.com*

**Demidov Sergey Sergeyivich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.
*e-mail: serd42@mail.ru*

**Durnev Valery Georgievich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.
*e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru*

**Zubkov Andrey Mihailovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
*e-mail: zubkov@mi.ras.ru*

**Ivanov Aleksandr Olegovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
*e-mail: aoiva@mech.math.msu.su*

**Ivanov Valery Ivanovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.
*e-mail: ivaleryi@mail.ru*

**Korolev Maxim Aleksandrovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
*e-mail: korolevma@mi-ras.ru*

**Kuznetsov Valentin Nikolaevich** — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.
*e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru*

**Matiyasevich Yuri Vladimirovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.
*e-mail: yumat@pdmi.ras.ru*

**Mishchenko Sergey Petrovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.
*e-mail: mishchenkosp@mail.ru*

**Nesterenko Yury Valentinovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
*e-mail: nester@mi.ras.ru*

**Panin Vladimir Alexeyevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, President of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
*e-mail: tgpu@tula.net*

**Pachev Urusbi Mukhamedovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov.
*e-mail: urusbi@rambler.ru*

**Semenov Alexey Lvovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.
*e-mail: alsemno@ya.ru*

**Tolokonnikov Lev Alekseevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.
*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

**Fomin Aleksandr Aleksandrovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

**Chirsky Vladimir Grigoryevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration.
*e-mail: vgchirskii@yandex.ru*

**Allakov Ismail** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).
*e-mail: iallakov@mail.ru*

**Belov Alexey Yakovlevich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).
*e-mail: Kanelster@gmail.com*

**Bernik Vasily Ivanovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).
*e-mail: bernik@im.bas-net.by*

**Laurinchikas Antanas** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).
*e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt*

**Liu Yongping** — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).
*e-mail: ypliu@bnu.edu.cn*

**Mardanov Misir Jumayil oglu** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).
*e-mail: rmi@lan.ab.az*

**Musin Oleg Rustamovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)
*e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com*

**Rakhmonov Zarullo Huseinovich** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).
*e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru*

**Mansour Saliba Holem** — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).
*e-mail: qwe123@rocketmail.com*

**Habibullo Abdullo** — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki» (Tajikistan).
*e-mail: rektor@kgu.tj*

**Fukshansky Leonid** — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).
*e-mail: lenny@cmc.edu*

**Šiaučiūnas Darius** – Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).
*e-mail: darius.siauciunas@su.lt*

# TABLE OF CONTENTS

Volume 25 Issue 5

S. A. Aldashev. Ill-posedness of the Tricomi problem for a multidimensional hyperbolic-parabolic equation ..... 5

E. N. Bazhanova. $\sigma_\Omega$-foliated Fitting classes of multioperator $T$-groups and its satellites ..... 16

V. N. Bezverkhnii, N. B. Bezverhnaya. On the degree conjugacy of words in groups with small reduction ..... 32

N. B. Bezverhnaya. On the property of antinormality of two-born subgroups of a free group ..... 45

Vit. V. Volchkov, G. V. Krasnoschekikh. On the zeros of mean-periodic functions with respect to the Bessel convolution ..... 57

G. Jangibekov, G. M. Koziev. On the theory of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations ..... 74

A. N. Kirillov. Periodic control of biocommunity and circle homeomorphisms ..... 90

S. A. Meshaik. On the group of form classes of large degree ..... 113

T. D. Nguyen, I. Z. Akhmetov, A. F. Galimyanov. Numerical method for solving Fredholm and Volterra integral equations using artificial neural networks ..... 126

P. G. Potseiko. On rational approximations of a singular integral on a segment by Abel — Poisson sums ..... 140

I. Rakhimov, H. Jamil, R. N. Mohd Nasir. Complete classification of two classes of two-dimensional PI-algebras over any basic field ..... 164

Kh. M. Khuromonov. The best joint approximation of some classes of functions in the Bergman space $B_2$ ..... 183

A. V. Shutov. On some analogue of the Gelfond problem for Zeckendorf representations ..... 195

A.O. Yulina. Variational problems in the works of academician O. I. Somov. Brachistochrone and tautochrone ..... 216

BRIEF MESSAGE

E. Almukhur, A. Adaileh, T. Sasa, A. Al-Nana. Topological foundations of three-dimensional symmetry breaking dynamics for both abelian and non-abelian Higgs models ..... 228

R. M. Ashrapov, P. S. Dergach. On covering sets of a special type by geometric progressions with a certain restrictions ..... 237

I. A. Tsybin, G. N. Titov. On question about semi-modularity of lattice of subgroups of finite groups ..... 254

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

A. V. Romanov. Size effects of micropolar medium in problem on the cylindrical body torsion ..... 262

G. V. Pavilaynen, A. A. Tikhonov, M. P. Yushkov. Pafnuty Lvovich Chebyshev – academician of the Imperial St. Petersburg Academy of Sciences (to the 300-th anniversary of the Russian Academy of Sciences and St. Petersburg State University) ..... 277

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, D. V. Pravednikov. The effect of initial stresses on the main characteristics of elastic waves in anisotropic media ..... 292

РЕДКОЛЛЕГИЯ ..... 307

THE EDITORIAL BOARD ..... 311

TABLE OF CONTENTS ..... 315