М

А.О. Юлина
старший преподаватель
Военно-космическая академия
имени. А.Ф. Можайского
Санкт-Петербург, Российская Федерация

К ИСТОРИИ ЗАДАЧИ О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНОГО УДАРА

Классическая задача о вращении твердого тела ведёт свою историю от Л.Эйлера и Ж.Л. Лагранжа. Профессор Санкт-Петербургского университета Осип Иванович Сомов привлёк для решения этой задачи аппарат эллиптических функций Якоби. В 1850 г. Сомов получил решение этой задачи в случае первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром. Его работа связывает и по времени и по логике решения поставленной Эйлером задачи о вращении твёрдого тела, с работами С.В. Ковалевской, а теорию эллиптических функций Якоби с эллиптическими функциями Вейерштрасса. К 1871 г. К. Вейерштрасс упростил систему эллиптических функций Якоби, добавил гиперэллиптические функции, а С.В. Ковалевская расширила задачу о вращении твёрдого тела около неподвижной точки, смещая центр тяжести тела в произвольное положение.

Ключевые слова: *Задача о вращении, удар, эллиптические функции, Л. Эйлер, Ж.Л. Лагранж, О.И. Сомов, К. Якоби, К. Вейерштрасс.*

A.O. Yulina
Senior Lecturer
A.F. Mozhaisky Military-Space Academy
St. Petersburg, Russian Federation

ON THE HISTORY OF THE PROBLEM OF A RIGID BODY ROTATION ABOUT A FIXED POINT IN THE CASE OF AN INITIAL IMPACT

The classical problem of a rigid body rotation dates back to L. Euler and J.L. Lagrange. Professor of St. Petersburg University Osip Ivanovich Somov used the apparatus of Jacobi elliptic functions to solve this problem. In 1850, Somov obtained a solution to this problem in the case of an initial impact by integrating the differential equations of motion with the help of Jacobi elliptic functions of the third kind with an imaginary parameter. His work connects both in time and logic of solving the problem of a rigid body rotation posed by Euler with the works of S.V. Kovalevskaya, and the theory of Jacobi elliptic functions with Weierstrass elliptic functions. By 1871 K. Weierstrass simplified the system of Jacobi elliptic functions, added hyperelliptic functions, and S.V. Kovalevskaya expanded the rigid body rotation problem around a fixed point, shifting the center of gravity of the body to an arbitrary position.

Keywords: *Rotation problem, impact, elliptic functions, L. Euler, J.L. Lagrange, O.I. Somov, K. Jacobi, K. Weirstrass.*

Введение

Впервые задачу о вращении твердого тела, причем сразу в общем виде, поставил Л. Эйлер (1707–1783) в 1758 г. В работе «Теория движения твердых тел» [1] он рассмотрел случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки (полюса). В этом случае тело имеет три степени свободы. Такие три параметра Леонард Эйлер называет углами: прецессии – ψ, собственного вращения – φ, нутации – θ, которые однозначно определяют положение подвижной системы отсчета, жестко связанной с телом, относительно неподвижной системы координат. При вращении твердого тела углы Эйлера меняются, являясь некоторыми функциями времени, которые он вывел еще в работе «Открытие нового принципа механики» (1750). Были получены кинематические уравнения (связи угловых скоростей тела и параметров движения). Далее Л. Эйлер устанавливает зависимости между параметрами движения и силами, действующими на тело – динамические уравнения. Эйлеру удалось продемонстрировать самое важное применение уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной

точки – решение с их помощью задачи о вращении твердого тела вокруг точки по инерции. Далее Эйлер решает задачу для случая трех или двух равных главных моментов инерции. В случае попарно неравных моментов при отсутствии внешних сил он выражает закон движения через дуги конических сечений, т.е. через эллиптические интегралы, и рассматривает условия, при которых решение сводится к элементарным интегралам.

Следующий шаг вперед сделал вскоре Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). Существенно новым достижением Лагранжа в этой проблеме была постановка задачи о движении твердого тела, получившая в дальнейшем наименование «случая Лагранжа»: точка опоры или подвеса не совпадает с центром тяжести тела [2]. Лагранж ввел упрощающие предположения о динамической симметрии твердого тела и о расположении точки опоры на оси симметрии. Этот важный результат вместе с выделением практически интересного случая движения тяжелого симметричного гироскопа (как стали позже называть случай Лагранжа) представляет чрезвычайно большое достижение в динамике твердого тела. Таким образом, Лагранж привел задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки к квадратурам.

Существенный шаг в развитии динамики твердого тела, сделал Карл Якоби, введя эллиптические функции [6]. С помощью этих функций время становится независимой переменной и основные параметры вращения твердого тела ψ, φ и θ являются однозначными функциями времени. Работа Карла Якоби по эллиптическим функциям была выполнена им в 1849 году, а опубликована уже посмертно в его втором томе сочинений Берлинской академией наук в 1882 году [6]. Таким образом, созданный Карлом Якоби математический аппарат эллиптических функций, позволил Осипу Ивановичу Сомову в 1850 году блестяще решить задачу о вращении твердого тела в случае первоначального удара. В представленной работе мы проанализируем ход рассуждений О.И. Сомова [3].

В 1850 году Осип Иванович Сомов решил задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки в новой постановке, отличной от Эйлера и Лагранжа: для того случая, когда движение происходит только от первоначального удара. Он показал, как эллиптические функции Якоби применяются в механике твердого тела. «Якоби дал новые формулы, отличающиеся своей изящностью и разрешающие вполне вопрос. Они были сперва напечатаны без доказательства, а потом в 39 томе журнала Креля, с доказательством и новым развитием (C.G. J. Jacobi, sur la rotation d' un corps)» [3].

Якоби основывает свои выводы на формулах, находящихся во втором томе Механики Пуассона. Дифференциальные уравнения движения (2-я часть Механики Пуассона) могут быть написаны в виде:

$$\begin{cases} dt = \dfrac{A}{B-C}\cdot\dfrac{dp}{qr}, \\ dt = \dfrac{B}{A-C}\cdot\dfrac{dq}{pr}, \\ dt = \dfrac{C}{A-B}\cdot\dfrac{dr}{pq}. \end{cases} \qquad (1)$$

В этом случае тело имеет три степени свободы и начинает вращаться от первоначального удара. Далее ударные нагрузки отсутствуют, действует только сила тяжести. Здесь A, B, C – моменты инерции относительно осей, параллельных главным осям вращающегося тела. При этом предполагается, что B – средняя между этими тремя величинами. Положение этих осей определяется углами Эйлера ψ, φ, θ. Соответственно p, q, r – угловые скорости вращения относительно этих осей, составляющие мгновенную скорость вращения $\omega = \sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$. Домножая каждое из уравнений (1) на Ap, Bq, Cr соответственно, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{d(A^2p^2)}{dt} = \dfrac{B-C}{A}\cdot qr, \\ \dfrac{d(B^2q^2)}{dt} = \dfrac{A-C}{B}\cdot pr, \\ \dfrac{d(C^2r^2)}{dt} = \dfrac{A-B}{C}\cdot pq. \end{cases}$$

Складывая все три равенства, получаем:

$$\frac{d((A^2p^2)+(B^2q^2)+(C^2r^2))}{dt} = 0,$$
$$\Rightarrow A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2,$$

где l^2 – момент первоначального удара. Далее, домножая каждое из уравнений (1) на p, q, r и выполняя те же операции, получим:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

где h – сумма живых сил (кинетическая энергия). Таким образом, получаем систему алгебраических интегралов:

$$\begin{cases} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h. \end{cases} \quad (2)$$

Проектируя вектор кинетического момента на подвижные оси координат, связанные с телом, для определения углов ψ, φ, θ будем иметь:

$$\begin{cases} d\psi = -\dfrac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2} \cdot l \cdot dt, \\ \dfrac{Ap}{l} = -\sin\varphi \cdot \sin\theta, \\ \dfrac{Cr}{l} = \cos\theta, \\ \dfrac{Bq}{l} = -\sin\theta\cos\varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Так как B есть средняя из трех величин: A, B, C, то разности $(A - B)$ и $(B - C)$ будут иметь всегда одинаковые знаки с разностью $(A - C)$; все три разности будут положительны, когда момент инерции A – наибольший момент инерции, будут отрицательны в противном случае. Предположим, что A – наибольший момент инерции при $Bh - l^2 > 0$, и наименьший при $Bh - l^2 < 0$. Допустив это, из уравнений (2) получаем следующие выводы:

$$\begin{cases} A(A-C)\cdot p^2 + B(B-C)\cdot q^2 = l^2 - Ch, \\ B(A-B)\cdot q^2 + C(A-C)\cdot r^2 = Ah - l^2, \\ A(B-A)\cdot p^2 + C(B-C)\cdot r^2 = Bh - l^2. \end{cases} \quad (4)$$

Из соотношений (4) следует, что величины $Ah - l^2$, $Bh - l^2$, $l^2 - Ch$ всегда имеют одинаковые знаки с разностями: $A–C$, $A–B$, $B–C$.

Из уравнений (4) выводим:

$$\begin{cases} p^2 = \dfrac{l^2 - Ch - B(B-C)\cdot q^2}{A(A-C)}, \\ r^2 = \dfrac{Ah - l^2 - B(A-B)\cdot q^2}{C(A-C)}. \end{cases} \quad (5)$$

Так как эти величины должны быть положительны, то q^2 не должно превосходить меньшую из двух величин:

$$\frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}, \frac{Ah - l^2}{B(B-C)}. \quad (6)$$

Но разность

$$\frac{(Ah - l^2)}{(A-B)} - \frac{(l^2 - Ch)}{(B-C)} = \frac{(A-C)}{(A-B)}\ \frac{(Bh - l^2)}{(B-C)}$$

положительна, значит величина $(l^2–Ch)/B(B–C)$ – меньшая и является высшим пределом q^2.

Таким образом, q изменяется в пределах от $-\sqrt{((l^2 - Ch)/B(B-C))}$ до $\sqrt{((l^2 - Ch)/B(B-C))}$.

Вследствие этого величина r^2 не может обратиться в ноль, а потому сохраняет свой знак, который зависит от выбора направления координатных осей. Возьмем эти направления так, чтобы r и $Bh–l^2$ или $A–C$ имели одинаковые знаки.

Уравнение $dq = –(A – C)rpdt/B$ показывает, что dq обращается в ноль только при $p = 0$; следовательно, пока p не равно нулю, величина q не перестает возрастать или уменьшаться, достигая своих пределов. Таким образом, пределы

величины p: $\pm\sqrt{((l^2 - Ch)/A(A-C))}$;

величины r: $\pm\sqrt{((Ah - l^2)/C(A-C))}$ – высший предел, $\pm\sqrt{((Bh - l^2)/C(B-C))}$ – низший.

Далее Сомов вводит обозначения:

$$q' = \sqrt{((l^2 - Ch)/B(B-C))}, p' = \\ = \sqrt{((l^2 - Ch)/A(A-C))}, r^0 = \\ = \pm\sqrt{((Bh - l^2)/C(B-C))}, r' = \\ = \pm\sqrt{((Ah - l^2)/C(A-C))}.$$

Заключаем, что функции p, q, r меняются периодически:

q в пределах: $-q', 0, +q', ...$

p в пределах: $0, -p', +p', 0, ...$

r в пределах: $r', r^0, r', r^0, r', ...$

Далее на основании формул (1) определяются периоды соответствующих функций p, q, r.

$$T = m\int_{-q'}^{+q'} \frac{dq}{pr}, \tau - t = m\int_{q}^{q'} \frac{dq}{pr}.$$

Здесь $m = -\dfrac{B}{A-C}$; T – время, в продолжении которого величина q изменяется, переходя от $-q'$ к q'; t – время, соответствующее какому-нибудь значению q; а $\tau–t$ – время за которое q переходит от текущего значения к своему высшему пределу q'. Так как pr для одного и того же значения q, равны по величине, но противоположны по знаку (в зависимости от возрастания или убывания q), пределы

интегрирования можно поменять. Переход от q к $-q^{/}$ соответствует времени:

$$T-(\tau-t)=m\int_{q^{/}}^{-q^{/}}\frac{dq}{pr}-m\int_{q^{/}}^{q}\frac{dq}{pr}.$$

Это же время является временем перехода от $-q^{/}$ к q. Увеличивая время t последовательно на $(\tau-t)$, получим, что полный период функции $q = 2T$. Тот же период соответствует функциям p и r, равно как и синусам и косинусам углов φ и θ, определенных уравнениями (3).

Рассмотрим теперь изменение угла

$$\psi=-l\int\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\cdot dt.$$

Подынтегральная функция, как следует из предыдущего разбора, периодическая функция с периодом $2T$, а значит и угол ψ – тоже периодическая функция с тем же периодом.

Найдем теперь выражения функций p и r. Выражения (5) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} p^2=\dfrac{l^2-Ch}{A(A-C)}[1-\dfrac{B(B-C)}{l^2-Ch}\cdot q^2], \\ r^2=\dfrac{Ah-l^2}{C(A-C)}[1-\dfrac{B(A-B)}{Ah-l^2}\cdot q^2]. \end{cases}$$

Так как величины (6) положительны, то

$$\frac{B(B-C)}{l^2-Ch}\cdot q^2,\frac{B(A-B)}{Ah-l^2}\cdot q^2$$

также положительны и условия: $p^2 > 0$, $r^2 > 0$ требуют, чтобы они были меньше единицы. На основании этого можно записать:

$$\sqrt{\frac{B(B-C)}{l^2-Ch}}\cdot q=\sin\xi,\ \sqrt{\frac{B(A-B)}{Ah-l^2}}\cdot q=k\sin\xi,$$

где

$$k=\sqrt{\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}};\ k^{/}=\sqrt{1-k^2};\Delta\xi=\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}.$$

Поэтому будем иметь

$$p=-\sqrt{\frac{l^2-Ch}{A(A-C)}}\cos\xi,$$

$$q=\sqrt{\frac{l^2-Ch}{B(B-C)}}\sin\xi,$$

$$r=\pm\sqrt{\frac{l^2-Ch}{B(B-C)}}\Delta\xi.$$

Подставляя эти функции в одно из уравнений (1), получим:

$$\frac{d\xi}{\Delta\xi}=\sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}\cdot dt=ndt,$$

где $n=\sqrt{\dfrac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}$

Полагая $\dfrac{d\xi}{\Delta\xi}=du$ будем иметь: $\xi = am(u)$, $u = n(t-t_0)$. Иногда функцию $F(u)$ заменяют другой функцией, в которой рассматривают $\sin\xi$ как независимую переменную:

$$F(u)=\int_0^u\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

где $\sin\xi = u$, а для обозначения обратной функции пользуются обозначением$\xi = am(u)$ [5].

Таким образом

$$\begin{cases} p=-\dfrac{l}{A}\sin\theta\sin\varphi=-\sqrt{\dfrac{l^2-Ch}{A(A-C)}}\cos am(u), \\ q=-\dfrac{l}{B}\sin\theta\cos\varphi=\sqrt{\dfrac{l^2-Ch}{B(B-C)}}\sin am(u), \\ r=\dfrac{l}{C}\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{Ah-l^2}{C(A-C)}}\Delta am(u). \end{cases}$$

Найдем теперь выражение для угла ψ. Интегрируя первое уравнение системы (3), получим:

$$\psi=-\frac{l}{A}\int_{t_0}^{t}dt-\frac{l(A-B)}{A}\int_{t_0}^{t}\frac{Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}dt.$$

Подставив сюда полученные в (7) выражения p, q в функции $u,\dfrac{du}{n}$, получим:

$$\psi = -\frac{l}{An}\cdot u - \frac{l(A-B)(A-C)}{An}\int_0^u \frac{\sin^2 am(u)du}{A(B-C)\cos^2 am(u) + +B(A-C)\sin^2 am(u)}$$

$$= -\frac{l}{An}\cdot u - \frac{l(A-B)(A-C)}{A^2(B-C)n}\int_0^u \frac{\sin^2 am(u)du}{1+\frac{C(A-B)}{A(B-C)}\sin^2 am(u)}. \quad (8)$$

Последний интеграл есть эллиптическая функция третьего вида с положительным параметром $\frac{C(A-B)}{A(B-C)}$. Аргумент этой функции мнимый $a\sqrt{-1} = ai$. Поэтому параметр запишется: $\frac{C(A-B)}{A(B-C)} = -k^2\sin^2 am(ai)$. Учитывая введенные ранее обозначения, получим:

$$\begin{cases} \sin am(ai) = i\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A(l^2-Ch)}}, \\ \cos am(ai) = l\sqrt{\frac{(A-C)}{A(l^2-Ch)}}, \\ \Delta am(ai) = \sqrt{\frac{B(A-C)}{A(B-C)}}, \\ n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}} = \pm\frac{l(A-C)}{iAC}\cdot\frac{\mathrm{tg}am(ai)}{\Delta am(ai)}. \end{cases} \quad (9)$$

Используя соотношения (9), находим:

$$\frac{l}{An} = \frac{\pm iC}{A-C}\cdot\frac{\Delta am(ai)}{\mathrm{tg}am(ai)},$$

$$\frac{l(A-B)(A-C)}{A^2(B-C)n} = \pm ik^2\sin am(ai)\cos am(ai)\Delta am(ai).$$

Следовательно, выражение (8) может быть записано:

$$\psi = \pm\frac{iC\Delta am(ai)\cdot u}{(A-C)\mathrm{tg}am(ai)} \pm \pm i\int_0^u \frac{k^2\sin am(ai)\cos am(ai)\Delta am(ai)\sin^2 am(u)du}{1-k^2\sin^2 am(ai)\sin^2(u)}.$$

Подставляя сюда вместо эллиптической функции третьего рода ее алгебраическое выражения и заметив, что

$$\frac{i\Delta am(ai)}{\mathrm{tg}am(ai)} = \frac{i\cos am(ai)\Delta am(ai)}{\sin am(ai)} = = \frac{dlog\sin am(ai)}{da} = \frac{dlogH(ai)}{da} - \frac{dlog\Theta(ai)}{da},$$

окончательно получим выражение для угла ψ:

$$\psi = -n^{/}u \pm \frac{i}{2}\cdot\log\frac{\Theta(u-ai)}{u+ai},$$

$$n^{/} = \pm[\frac{C}{A-C}\cdot\frac{dlogH(ai)}{da} - \frac{A}{A-C}\cdot\frac{dlog\Theta(ai)}{da}]. \quad (10)$$

Логарифмы, которые приведены в формулах – натуральные.

Заключение

Петербургский математик и механик, профессор Осип Иванович Сомов, к 1851 г. дал первое обобщенное решение задачи вращения тела вокруг неподвижной точки. О.И. Сомов получил решение в виде (7) и (10) задачи о вращении твердого тела около точки после первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения (1) с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром. Таким образом, решение Сомова показало, что основные параметры движения выражаются через композицию эллиптических функций простейшего вида и, вводя их, задача о вращении твердого тела относительно неподвижной точки сводится к простейшим математическим преобразованиям. Далее, в 1871 году Карл Вейерштрасс упрощает систему эллиптических функций Якоби, вводя вместо трех тета-функций одну, имеющую своим аргументом комплексное время [4].Поэтому дальнейшее исследование задачи о движении волчка имело продолжение на комплексной плоскости, направляющие косинусы при вращении тела были получены в виде частных θ или σ-функций. Получают ясность и кватернионные выражения для кинематики движения в задаче о вращения твердого тела около неподвижной точки.

Список литературы

1. Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable // *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 1765. T. XIV. Pp. 154–193.

2. Лагранж Ж.Л. *Аналитическая механика*, т. 1, 2. М. Л., ГТТИ, 1950.

3. Сомов О.И. *Основания теории эллиптических функций*. СПб: АН, 1850 г. 250 с.

4. Кочина П.Я. *Вейерштрасс. 1815–1897*. М.: Изд-во «Наука». 1985.

5. Смирнов В.И. *Курс высшей математики*. Том III, часть 2. Санкт-Петербург: Гос.тех.издат., 1950.

6. Пшеборский А.П. *О методах Абеля, Якоби, Лиувилля и Вейерштрасса в теории эллиптических функций*. Киев. 1895.

References

1. Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 1765. T. XIV. Pp. 154–193.

2. Lagrange J.L. *Analiticheskaya mekhanika*, t. 1, 2 [Analytical mechanics, v. 1, 2]. M. -L., GTTI, 1950.

3. Somov O.I. *Osnovaniya teorii ellipticheskih funkcij* [Foundations of the theory of elliptic functions]. SPb: AN, 1850. 250 p.

4. Kochina P.Ya. *Vejershtrass. 1815–1897* [Weirstrass. 1815–1897]. M.: Publishing house «Science». 1985.

5. Smirnov V.I. *Kurs vysshej matematiki.* Tom III, chast' 2 [Higher mathematics course. Volume III, part 2]. St. Petersburg: Gos.tekh.izdat., 1950.

6. Psheborskiy A.P. *O metodah Abelya, Yakobi, Liuvillya i Vejershtrassa v teorii ellipticheskih funkcij* [On the methods of Abel, Jacobi, Liouville and Weierstrass in the theory of elliptic functions]. Kiev. 1895.

Информация об авторе

Юлина Анна О., старший преподаватель

Военно-космическая академия имени. А.Ф. Можайского
195253, Санкт-Петербург, Российская Федерация, ул. Маршала Тухачевского, 3

Information about author

Yulina Anna O., Senior Lecturer

Military Space Academy named after. A.F. Mozhaisky
195253, Saint-Petersburg, Russian Federation, Marshal Tukhachevsky st., 3