УДК: 531.091
MSC2010: 01A55

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РАБОТАХ АБЕЛЯ, ЯКОБИ, ВЕЙЕРШТРАССА, СОМОВА

© А. О. Юлина, Г. И. Синкевич
Военно-Космическая академия имени А.Ф. Можайского
e-mail: *parfenova19761976@mail.ru*

The history of the development of the theory of elliptic functions in the works of Abel, Jacobi, Weierstrass, Somov..

Yulina A. O. and Sinkevich G. I.

Abstract. The article explores the practical necessity of using elliptic functions. The history of the origin of the concept of an elliptic function is considered in detail. Clear conclusions on the formation of the apparatus of the theory of elliptic functions in the works of Abel, Jacobi, Weierstrass and Somov are proposed. Based on the proof of Abel's theorem, a representation of elliptic functions in terms of theta functions is shown.

The introduction and use of elliptic and hyperelliptic functions bring the problems of control and orientation of mechanical objects to the simplest elements. The sought parameters of motion (direction cosines of the Euler angles) are the composition of such functions. General concepts and definitions of elliptic functions are reduced to the operation of integration. All methods of integration consist either in reducing the considered integral to elementary functions, or in its direct investigation, when this reduction is possible. Therefore, integral calculus is divided into separate sections. Among them, the first place after the theory of logarithmic and circular functions is occupied by the theory of elliptic functions.

Giulio Carlo Fagnano (1682-1766, Italian mathematician, the first to pay attention to the theory of elliptic functions) discovered a remarkable relationship between arcs taken on one ellipse or one hyperbola. Euler proved analytically and generalized the property discovered by Fagnano.

Soon John Landen (1719-1790, British mathematician, his transformations refer to elliptic integrals and elliptic functions) found that the arc of a hyperbola can be expressed in terms of two arcs belonging to ellipses with different eccentricities.

The first systematic presentation on the theory of elliptic functions in Russia was presented by the St. Petersburg academician Osip Ivanovich Somov. This difficult and to this day branch of integral calculus is described in detail and clearly in his fundamental work "Foundations of the theory of elliptic functions"(1850). The book contains seven chapters, and a separate chapter is devoted to applications of elliptic functions to some questions of geometry and mechanics. In the presented article, the solution of the problem of the rotation of a rigid body about a fixed point, presented by Somov, will be presented.

Keywords: *Elliptic function, theorem, Abel, Jacobi, Weierstrass, Somov.*

Введение

В статье рассмотрена история развития и применения теории эллиптических функций. Введение и использование эллиптических и гиперэллиптических функций сводит задачу о вращении твердого тела после первоначального удара к простейшим элементам. Искомые параметры движения (направляющие косинусы углов Эйлера) являются композицией таких функций. Общие понятия и определения эллиптических функций сводятся к операции интегрирования. Все способы интегрирования состоят или в приведении рассматриваемого интеграла к элементарным функциям, или в непосредственном его исследовании, когда это приведение возможно. Поэтому интегральное исчисление распадается на отдельные разделы. Между ними первое место после теории логарифмических и круговых функций занимает теория эллиптических функций.

1. Эллиптические функции. История возникновения.

Это название дают трансцендентным функциям, к которым приводятся интегралы алгебраических выражений вида $f(x, \sqrt{R})dx$, где $\sqrt{R}$ целая функция третьей или четвертой степени относительно x, а f рациональная относительно x и $\sqrt{R}$. Подобные интегралы встречаются уже у Ньютона, основателя этого исчисления, он дает разложение в ряды эллиптических функций, которыми выражаются дуги эллипса и гиперболы (1676 год). После этого эллиптические функции встречаются в задаче об упругой линии[5]. Яков Бернулли в своем решении этой задачи находит, что ордината упругой линии относительно абсциссы выражается интегралом: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$, а дуга интегралом $\int \frac{a^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$, и полагает, что эти интегралы не могут быть приведены ни к квадратурам, ни к спрямлению (вычисление длины дуги кривой) какого-либо сечения. Того же мнения, сначала был и Эйлер. Иван Бернулли старший нашел, что сумма этих интегралов может быть выражена дугою эллипса, у которого малая ось равна $2a$, а большая $2a\sqrt{2}$. Он также заметил, что $\int \frac{a^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$ приводится к спрямлению кривой, называемой лемнискатой.

Джулио Карло Фаньяно (1682-1766 гг., итальянский математик, первый обратил внимание на теорию эллиптических функций) открыл замечательное соотношение между дугами, взятыми на одном эллипсе или на одной гиперболе. Эйлер доказал аналитически и обобщил свойство, открытое Фаньяно: он нашел алгебраическое

уравнение между переменными x и y, удовлетворяющее дифференциальному уравнению вида [3]: $\dfrac{dx}{\sqrt{[f(x)]}} = \dfrac{dy}{\sqrt{[f(y)]}}$, где f целая функция четвертой степени; оно совместно с трансцендентным уравнением $\dfrac{dx}{\sqrt{[f(x)]}} = \dfrac{dy}{\sqrt{[f(y)]}} + C$, в котором для постоянного C можно взять значение интеграла $\dfrac{dx}{\sqrt{[f(x)]}}$, соответствующее частному значению переменной x. На основе этих двух уравнений Эйлер вывел способ для сравнения эллиптических функций через сложение, вычитание, умножение и деление, посредством алгебраических действий над переменными, от которых зависят эти функции [5].

Вскоре Джон Ланден (1719–1790 гг., британский математик, его преобразования относятся к эллиптическим интегралам и эллиптическим функциям) нашел, что дуга гиперболы может быть выражена посредством двух дуг, принадлежащих эллипсам с различными эксцентриситетами. В этом важном свойстве заключается соотношение между эллиптическими функциями, отличающимися на константу, и входящими в корень $\sqrt{f}$. То же соотношение нашел Лагранж и применил его к приблизительному вычислению всякой эллиптической функции. В этом состоянии находилась теория эллиптических функций к началу 19 века. Значительные усовершенствования в теорию эллиптических функций внёс Лежандр. Распределив на виды и приведя к простейшим выражениям все эллиптические функции, Лежандр упростил и значительно продвинул вперёд исследования своих предшественников; разобрал много новых интегралов, приводимых к эллиптическим функциям, решил некоторые вопросы геометрии и механики, оставшиеся нерешенными из-за несовершенства способов вычисления эллиптических функций. Лежандр составил таблицы, с помощью которых эллиптические функции могут быть использованы в анализе, таким же образом, как и круговые и логарифмические функции. Первый его опыт систематического изложения теории эллиптических функций находится в мемуаре “Memoire sur les transcendantes elliptiques, des methodes faciles pour comparer et evaluer ces transcendantes” (1792 год) [3]. Лежандр, ориентируясь более на практические цели исследования, упустил из виду некоторые важные теоретические вопросы, связанные с высшими трансцендентными выражениями, тесно связанные с эллиптическими функциями. С выходом в свет первых двух томов «Traite des fonctions elliptiques» в математических журналах Крелле и Шумахера стали появляться гениальные открытия Якоби и Абеля [1]. В номерах 123 и 127 журнала Шумахера Якоби дал общий способ для преобразования эллиптических функций, включающий как частный случай преобразование Лагранжа и другое подобное, найденное Лежандром.

Этот способ послужил источником важных открытий в теории эллиптических функций. Одновременно с открытиями Якоби во втором томе журнала Крелле появилась статья Абеля, в которой автор доказывает основные свойства обратных эллиптических функций и, через введение в анализ мнимых величин, обнаруживает в этих функциях двойную периодичность. («Recherches sur les fonctions elliptiques», 1827). Он приводит общие формулы для умножения и деления эллиптических функций на целое число; рассматривает подробно способы для решения в радикалах алгебраических уравнений, относящихся к делению, и выводит выражения эллиптических функций в виде произведений, состоящих из бесконечного числа множителей, а также в виде быстро сходящихся бесконечных рядов. В следующей работе («Ueber die Functionen welche der Gleichung genugthun») опубликованной в 3-м номере журнала Крелле, Абель предлагает способ решения алгебраических уравнений, относящиеся к делению лемнискаты. После этого Абель доказал общим способом формулы Якоби, относящиеся к преобразованию эллиптических функций. В том же томе журнала Крелле он дал общую теорему, относящуюся к сравнению интегралов вида $\frac{dx}{\sqrt{R}}$, гдеR целая функция x какой-нибудь степени; эта теорема заключает в себе, как частный случай, теорему Эйлера и распространяется на высшие трансцендентные, названные ультра–эллиптическими или Абелевыми функциями; потом Абель распространил ее на все трансцендентные, имеющие алгебраические дифференциалы. Эта его работа была удостоена премией Парижской Академии Наук.

Все аналитические приемы Абеля отличаются общностью и математической точностью. Абель, поставив себе аналитический вопрос, ищет его решение самым логичным, естественным путем, а потому достигает решения самого общего, если таковое возможно; в противном случае доказывает невозможность решения. Таким образом он доказал невозможность общего радикального решения уравнений 5-й степени и рассмотрел случаи, в которых интегралы вида $\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ могут быть приведены к алгебраическим и логарифмическим функциям. Абель умер очень рано, в 26 лет, но оставил науке богатое наследие, в котором разбираемся мы до сих пор. Все творения Абеля изданы вместе, под заглавием «Oeuvres completes de N.H. Abel, mathematicien, avec des notes et developpements». Теория эллиптических функций, обогатившись открытиями Лежандра, Абеля и Якоби, заняла важное место в математическом анализе и теоретической механике в период с 18 по 19 век.

Первое систематическое изложение по вопросам теории эллиптических функций в России представлено у петербургского академика Осипа Ивановича Сомова. Подробно и ясно изложена эта непростая и поныне отрасль интегрального исчисления в его фундаментальном труде «Основания теории эллиптических функций» (1850 год).

Книга содержит семь глав, и отдельная глава посвящена приложениям эллиптических функций к некоторым вопросам геометрии и механики.

К середине восемнадцатого века в теории эллиптических функций был сформирован следующий аппарат.

2. Понятие эллиптической функции. Приведение, сравнение и преобразование таких функций

В том случае, когда интеграл от алгебраической функции не приводится к другой алгебраической функции, его рассматривают как трансцендентную функцию. Это интегралы вида $z = \int f(x, \sqrt{R})$, где R целая функция относительно x, а f — рациональная относительно x и R. Если R имеет первую или вторую степень, то соответствующий интеграл $z = \int f(x, \sqrt{R})$ приводится или к алгебраической функции или к обратной тригонометрической функции (круговые функции). Если же степень третья и выше, то подобные интегралы называют эллиптическими, а обращение таких интегралов, соответственно, эллиптическими функциями [3]. Названия этих функций пошли с задачи вычисления длины дуги эллипса.

Уравнение, определяющее связь между алгебраическими функциями и интегралами вида $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$ записывается следующим образом:

$$b_0 \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + b_1 \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + b_2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \ldots + b_m \int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-3} x^{m-3})\sqrt{R}.$$

Это уравнение дает возможность замены эллиптического интеграла на простейшие алгебраические разложения в том случае, когда $m > 2$.

Множитель при $\sqrt{R}$ во второй части уравнения должен содержать только положительные степени x (исходное предположение), тогда m должно быть не меньше 3. Отсюда делается важное следствие: интеграл $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$, при условии, что степень целой функции P ниже 3 не может быть выражен алгебраической функцией. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

не имеют алгебраического представления, и являются трансцендентными относительно функции x.

Аналогичные выводы справедливы и в том случае, когда P — правильная дробь.

$P = \dfrac{A}{(x-\alpha)^m}$, где A и α — постоянные, а m — целое положительное число. Тогда, рассматриваемый интеграл $\displaystyle\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ разложится на члены вида

$$A\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{R}}$$

Представленный интеграл приводится к простейшим таким же образом, что и $\displaystyle\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$ с помощью замены: $x-\alpha = \dfrac{1}{z}$. Тогда уравнение, определяющее связь между алгебраическими функциями и интегралами вида $\displaystyle\int \frac{(x-\alpha)^m dx}{\sqrt{R}}$ записывается следующим образом:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{R}} \;=\; b_0\int \frac{dx}{\sqrt{R}} \;+\; b_1\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}} \;+$$
$$+\, b_2\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2\sqrt{R}} + \left(\frac{a_0}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{(x-\alpha)^3} + \ldots + \frac{a_{m-3}}{(x-\alpha)^{m-3}}\right)\sqrt{R}$$

В том случае, когда $m > 1$ рассмотренный интеграл приводится к трансцендентным вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}}.$$

Из сказанного выше, заключаем, что $\int \dfrac{Pdx}{\sqrt{R}}$, где P — некая рациональная функция, выражается алгебраическими функциями и трансцендентными вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}}.$$

Выполняя замены $x = \dfrac{p+qy}{1+y}$, $R_1 = c(y^2 \pm a)(y^2 \pm b)$, $\lambda = \dfrac{p-\alpha}{q-\alpha}$, где p, q, a, c — произвольные константы в соответствующих алгебраических разложениях, переходим на интегралы вида:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R_1}}, \int \frac{y^2dy}{\sqrt{R_1}}, \int \frac{dy}{(y^2-\lambda^2)\sqrt{R_1}}.$$

Последний интеграл запишем через тригонометрические функции:

$$\int \frac{f(\sin^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}},$$

где f — рациональная функция, k — действительное положительное число> 1 и φ-действительная угловая величина.

Используя, подстановку $y^2 = \dfrac{A + B\sin^2\varphi}{C + D\sin^2\varphi}$, и последовательно, рассматривая возможные знаки в выражении $R_1 = c(y^2 \pm a)(y^2 \pm b)$ получаем:

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R_1}} = \int \frac{\alpha + \beta\sin^2\varphi}{\gamma + \delta\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ — постоянные, причем $k^2 > 1$. Такие интегралы Абель называл *модулярными функциями* [2] для сокращения, вводя обозначения $\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)} = \Delta(k, \varphi)$ или просто $\Delta\varphi$. Дуга φ — амплитуда, постоянная k — модуль, величина $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительный модуль.

После введенных обозначений, эллиптический интеграл или модулярная функция запишется:

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R_1}} = \int \frac{\alpha + \beta\sin^2\varphi}{\gamma + \delta\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

Абель рассмотрел этот интеграл как функцию φ:

$$H(\varphi) = \int \frac{\alpha + \beta\sin^2\varphi}{\gamma + \delta\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Теперь рассмотрим некоторые свойства этой функции:

Во-первых эта функция нечетная $H(-\varphi) = -H(\varphi)$; во-вторых функция периодическая $H(\varphi) = H(n\pi \pm \psi) = 2nH(\frac{\pi}{2}) \pm H(\psi), 0 < \psi < \dfrac{\pi}{2}$.

Далее, работая с функцией $H(\varphi)$, а именно, перебирая все возможные значения коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ приходим к выводу, что все эллиптические функции приводятся к трем:

$$F(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \text{ функция первого рода,}$$

$$E(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \Delta\varphi \cdot d\varphi - \text{ функция второго рода,}$$

$$\Pi(n, \varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} - \text{ функция третьего рода.}$$

где $n = \dfrac{\delta}{\gamma}$ — параметр эллиптической функции $\Pi(n, \varphi)$. Этот параметр может быть мнимым, и тогда выделяется особый класс функций — *гиперэллиптические или ультраэллиптические.*

Иногда заменяют функции $F(\varphi), E(\varphi), \Pi(n,\varphi)$ тремя другими, в которых переменной величиной является $\sin\varphi = x$:

$$T_1(x) = \int\limits_0^x \frac{d\ x}{\Delta x}, \quad T_2(x) = \int\limits_0^x \frac{x^2 d\ x}{\Delta x}, \quad T_3(n,x) = \int\limits_0^x \frac{d\ x}{(1+nx^2)\Delta x},$$

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2(1-k^2x^2))}.$$

Карл Якоби дополнительно ввел обозначения для обратных функций. Если α величина функции $F(\varphi)$, тогда для обозначения обратной функции используем обозначение:

$$\varphi = am(\alpha).$$

Тогда α называется аргументом своей амплитуды φ. Соответствующие тригонометрические зависимости φ от своей амплитуды α:

$$\sin am(\alpha), \quad \cos am(\alpha), \quad \tan am(\alpha) \quad \text{и т. д.}$$

$$\Delta\varphi = \Delta am(\alpha).$$

Общее свойство всех эллиптических функций открыл Фаньяно, что полностью доказано Леонардом Эйлером (“Institutionum calculi integralis. V.I.”). Оно состоит в следующем. Если $\psi(x)$ трансцендентная функция, а $\dfrac{d\psi(x)}{dx}$ алгебраическая, то можно найти такую алгебраическую зависимость между частными значениями $x = x_1, x_2, \ldots x_n$, при которой сумма

$$m_1\psi(x_1) + m_2\psi(x_2) + \ldots m_n\psi(x_n),$$

где $m_1, m_2, \ldots m_n$ соизмеримые положительные или отрицательные числа, может быть выражена или постоянными, или алгебраической функцией относительно $x_1, x_2, \ldots x_n$, или же логарифмической функцией этих величин [1].

На все трансцендентные функции, имеющие алгебраические дифференциалы, распространил это свойство Абель. Это обобщение является центральной теоремой теории эллиптических функций и носит название *теоремы Абеля*. Формулировка и доказательство этой теоремы иложено Абелем в “Precis d$'$une theorie des fonctions elliptiques”.

Издали этот труд Абеля уже после его смерти в 1841 году, “Memoires par divers savants a l$'$ Academie royale des sciences de l$'$ Institut de France. T. VII, 1841.”

Теорема (Абель). *Задана эллиптическая функция* $T_3(x) = \int \frac{d\,x}{(1-\frac{x^2}{a^2})\Delta x}$, *где* $\Delta x = \sqrt{(1-x^2(1-k^2x^2))}$, $k^2 > 1$ *и* a *— постоянная. Допускается следущее разложение:*

$$\psi(x) = A(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)\dots(x^2 - x_\mu^2),$$

функция $\psi(x)$ *есть композиция двух функций* $\varphi(x)$ *и* $f(x)$*:*

$$\psi(x) = [f^2(x)] - [\varphi^2(x)](\Delta x)^2$$

$f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *— целые функции с неопределенными коэффициентами,* $f(x)$ *— четная,* $\varphi(x)$ *— нечетная.*

Тогда сумма значений функции $T_3(x)$ *для* $x = x_1, x_2, \dots x_\mu$ *выразится логарифмической функцией:*

$$T_3(x_1) + T_3(x_2) + \dots T_3(x_\mu) = const - \frac{a}{2\Delta a} \cdot \log\left[\frac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}\right].$$

Доказывая теорему Абеля, Карл Якоби ввел знаменитые θ функции, с помощью которых гиперэллиптические интегралы могут быть представлены алгебраическими разложениями или быстросходящимися рядами. Последнее представление, с помощью рядов, очень важно в задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки. Используя эти разложения Сомов О. И., получил кинематические параметры движения в задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара [1].

Петербургский математик и механик, профессор Сомов О. И., к 1851 г. дал первое обобщенное решение задачи вращения тела вокруг неподвижной точки. О. И. Сомов получил решение задачи о вращении твердого тела около точки после первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром. Решение Сомова показало, что основные параметры движения выражаются через композицию эллиптических функций простейшего вида и, вводя их, задача о вращении твердого тела относительно неподвижной точки сводится к простейшим элементам. В 1871 году Карл Вейерштрасс упрощает систему эллиптических функций Якоби, вводя вместо трех тета-функций одну, имеющую своим аргументом комплексное время. Поэтому дальнейшее исследование задачи о движении волчка имело продолжение на комлексной плоскости, направляющие косинусы при вращении тела были получены в виде частных θ или σ-функций. Получают ясность и кватернионные выражения для кинематики движения в задаче о вращения твердого тела около неподвижной точки.

Таким образом, рассмотренное решение задачи, представленное Сомовым О. И. в 1850 году, вполне объясняет дальнейшее направление исследований как в кватернионном представлении, так и в решении Ковалевской С. В. Представленное решение очень важно в практических задачах ориентации и управления космических и других объектов механического движения.

3. Представление эллиптических функций через тета функции

Коротко изложим доказательство теоремы Абеля [1].

Возьмем для x одну из величин: $x_1, x_2, \dots x_\mu$, тогда

$$\psi(x) = [f^2(x)] - [\varphi^2(x)](\Delta x)^2 = 0$$

Это уравнение определяет зависимости x от коэффициентов функций $\varphi(x)$ и $f(x)$. Рассматривая эти коэффициенты как переменные запишем дифференциал для этого уравнения:

$$\psi^{'}(x)dx + \delta\psi(x) = 0,$$

где $\psi^{'}(x)$ - производная $\psi(x)$ по x, а $\delta\psi(x)$ - дифференциал той же функции относительно переменных коэффициентов функций $\varphi(x)$ и $f(x)$. При этом дифференцировании, x будем считать, соответственно постоянной величиной.

$$\delta\psi(x) = 2[f(x)\delta f(x) - \varphi(x)\delta\varphi(x)](\Delta x)^2$$

Соответствующие функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ выразим из уравнения:

$\psi(x) = [f^2(x)] - [\varphi^2(x)](\Delta x)^2 = 0$. Получим: $f(x) = \pm\varphi(x)\Delta x, \varphi(x)(\Delta x)^2 = \pm f(x)\Delta x$.

Следовательно

$$\delta\psi(x) = -2[\varphi(x)\delta f(x) - f(x)\delta\varphi(x)]\Delta x = -\Theta(x)\Delta x$$

Вводя обозначения:

$$\Theta(x) = 2[\varphi(x)\delta f(x) - f(x)\delta\varphi(x)]$$

Получим:

$$\psi^{'}(x)dx = \Theta(x)\Delta x \Rightarrow \tfrac{dx}{\Delta x} = \frac{\Theta(x)}{\psi'(x)} \Rightarrow T_3(x) = \int \frac{\Theta(x)}{(1 - \dfrac{x^2}{a^2})\psi'(x)}$$

Подставив в это выражение $x_1, x_2, \dots x_\mu$ вместо x и суммируя результаты (обозначая для сокращения $\sum$), получим:

$$\sum T_3(x) = \int \sum \left[\frac{\Theta(x)}{(1 - \dfrac{x^2}{a^2})\psi'(x)} \right]$$

Подынтегральное выражение представляет собой рациональную симметричную функцию корней уравнения $\psi(x) = [f^2(x)] - [\varphi^2(x)](\Delta x)^2 = 0$, поэтому она может быть выражена рациональной функцией его коэффициентов и следовательно рациональной функцией коэффициентов функций $\varphi(x)$ и $f(x)$.

Таким образом:

$$\sum T_3(x) = \int \frac{\Theta(x)}{(1 - \frac{x^2}{a^2})\psi'(a)} = \int \frac{a\Theta(a)}{2\psi(a)}.$$

Подставляя сюда значения функций $\Theta(x)$ и $\psi(x)$, имеем

$$\sum T_3(x) = \frac{a}{2} \int \frac{\varphi(a)\delta f(a) - f(a)\delta\varphi(a)}{[f^2(a) - \varphi^2(a)](\Delta a)^2}$$

Теперь проинтегрируем, пользуясь заменой $\dfrac{\varphi(a)\Delta a}{f(a)} = z$. Получим

$$\sum T_3(x) = -\frac{a}{2\Delta a} \int \frac{\delta z}{1 - z^2} = Const. - \frac{a}{4\Delta a} \log \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2.$$

Таким образом, окончательно

$$\sum T_3(x) = Const. - \frac{a}{4\Delta a} \log \left[\frac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}\right]^2$$

Доказанная теорема дает аналогичные формулы и для эллиптических функций первого и второго рода:

$$T_1(x) = \int \frac{d\ x}{\Delta x}, T_2(x) = \int \frac{x^2 d\ x}{\Delta x.}$$

Функция $T_1(x)$ есть значение функции $T_3(x)$ при $a = \infty$, а $T_2(x)$ значение функции $a^2[T_3(x) - T_1(x)]$ при $a = \infty$.

$$a = \infty \Rightarrow \frac{a}{4\Delta a} = 0, \log(\frac{1+z}{1-z})^2 = \log(1) = 0, \Rightarrow \sum T_1(x) = Const,$$

$$\sum T_2(x) = Const. - \frac{a^3}{4\Delta a} \log[\frac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2_{a=\infty}.$$

Некоторые из величин $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ берутся произвольно, оставшиеся определяются по ним.

Рассмотрим применение теоремы Абеля к простейшему (но практически очень важному) случаю $\mu = 3$. Тогда

$$f(x) = (a0 + x^2)x, \varphi(x) = b_0,$$

$$\psi(x) = (a_0x + x^3)^2 - b_0^2(1 - x^2)(1 - k^2x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2).$$

Предполагая x_1 и x_2 заданными, для определения неизвестных коэффициентов a_0, b_0 будем иметь два линейных уравнения:

$$a_0x_1 + x_1^3 + b_0\Delta x_1 = 0, a_0x_2 + x_2^3 + b_0\Delta x_2 = 0.$$

Из этих уравнений получаем значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{x_2^3\Delta x_1 - x_1^3\Delta x_2}{x_1\Delta x_2 - x_2\Delta x_1}, \quad b_0 = \frac{x_1^3x_2 - x_2^3x_1}{x_1\Delta x_2 - x_2\Delta x_1}.$$

Далее, домножим каждую дробь на $(x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1)$ и в уравнении для $\psi(x)$ возьмем $x = 0$.

Тогда x_3 определится следующим образом:

$$x_3 = \pm\frac{x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1}{1 - k^2x_1^2x_2^2}.$$

Для определения Δx_3 используем уравнение:

$$f(x_3) + i\Delta x_3 \cdot \varphi(x_3) = 0, \quad i = \pm 1.$$

Отсюда получим

$$\Delta x_3 = \frac{\pm f(x_3)}{\varphi(x_3)}$$

Далее, обозначая $y = \pm x_3$, т.е $y = \dfrac{b_0}{x_1x_2}$ получим: $y = \dfrac{x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1}{1 - k^2x_1^2x_2^2}$

Окончательно, получаем следующие соотношения для эллиптических функций первого, второго и третьего рода:

$$\begin{cases} T_1(x_1) + T_1(x_2) - T_1(y) = Const, \\ \\ T_2(x_1) + T_2(x_2) - T_2(y) = Const - \dfrac{a^3}{4\Delta a}\log[\dfrac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2_{a=\infty}, \\ \\ T_3(x_1) + T_3(x_2) - T_3(x) = Const. - \dfrac{a}{4\Delta a}\log[\dfrac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2. \end{cases}$$

Ранее мы говорили о том,что иногда заменяют функции $F(\varphi), E(\varphi), \Pi(n, \varphi)$ тремя другими, в которых переменной величиной является $\sin\varphi = x$. Тогда, полагая

$$x_1 = \sin\varphi, \quad x_2 = \sin\psi, \quad y = \sin\mu$$

получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} (F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = Const \\ \\ E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = Const + k^2 \dfrac{a^3}{4\Delta a} \log[\dfrac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2_{a=\infty} \\ \\ \Pi(-\dfrac{1}{a^2}, \varphi) + \Pi(-\dfrac{1}{a^2}, \psi) - \Pi(-\dfrac{1}{a^2}, \mu) = Const. - \dfrac{a}{4\Delta a} \log[\dfrac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2) \end{cases}$$

Далее, работая с логарифмами, Карл Якоби получает две тета-функции и раскладывает их в быстросходящиеся ряды.

Блестящее продолжение теория эллиптических функций нашла в работах Карла Вейерштрасса [3]. Работая под руководством знаменитого профессора Гудермана, молодой ученый увлекся исследованиями Абеля и Якоби в области эллиптических функций. Вейрштрассу удалось не только вникнуть, но и решить проблемы, которые были Абелем и Якоби только обозначены. Так, он нашел представление модулярной функции в виде частного двух рядов, обобщил это представление на другие известные эллиптические функции. Это ему удалось сделать летом 1840 года, а осенью того же года защитить свою работу “Ueber die Entwickelung der Modular-Functionen”. Часть этой работы вошла в его мемуары об абелевых функциях, напечатанных в 52 журнале Крелле (I том его Mathematische Werke). Все частные виды θ-функции Вейерштрасс заменил одной $\wp$-функцией [5]. В 1871 году Вейерштрасс упрощает систему эллиптических функций Якоби, вводя вместо трех тета-функций одну, имеющую своим аргументом комплексное время.

4. Заключение

Исследования Вейерштрасса в области теории эллиптических функций обратили на него внимание ученых Германии, и в 1856 году он был приглашени в Берлинский университет экстраординарным профессором на кафедру чистой математики, а в 1857 году был избран в члены Берлинской Академии наук. В дальнейшем, Вейерштрасс, обобщая и уточняя выводы Абеля и Якоби, показал, что условия интегрируемости эллиптического интеграла в логарифмических функциях могут быть выведены, если такие интегралы разбить на три класса: первого, второго и третьего

рода. Свести их, как показано выше в представленной работе, к эллиптическим интегралам третьего рода, которые на основании теоремы Абеля приводятся к алгебраическим соотношениям. Основные исследования, относящиеся к гиперэллиптическим интегралам Вейерштрасс сообщал или на своих лекциях, или в письмах к ученым.

Список литературы

1. Сомов О. И. Основания теории эллиптических функций. СПб: АН, 1850 г. — 250 с.

   SOMOV, O. I. (1850) *Foundations of the theory of elliptic functions.* St. Petersburg: Academy of Sciences.

2. Пшеборский А. П. О методах Абеля, Якоби, Лиувилля и Вейерштрасса в теории эллиптических функций. — Киев, 1895 г. — 198 с.

   PSHEBORSKY, A. P. (1895) *On the methods of Abel, Jacobi, Liouville and Weierstrass in the theory of elliptic functions.* Kiev.

3. Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. — М.:ГИТТЛ; 1951. — 128 с.

   MARKUSHEVICH, A. I. (1951) *Essays on the history of the theory of analytic functions.* Moscow, GITT.

4. М. А. Тихомандрицкий. Обращение гиперэллиптических интегралов. Харьков. Университетская типография. — 254 с. 1885 год.

   TIKHOMANDRITSKIY, M. A. (1885) *Inversion of hyperelliptic integrals.* Kharkiv, University printing house.

5. Теория аналитических и эллиптических функций. Гурвиц; ред. Н. Е. Кочина. — М: Изд.-во ЛКИ. — 1933 г. — 187 с.

   Hurwitz; ed. by N. E. Kochina (1993) *Theory of analytic and elliptic function.* Moscow, Publishing house of LKI.