ФИЗИКА

А.О. Юлина
старший преподаватель
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
Санкт-Петербург, Российская Федерация

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ РАЗВИТИЯ ПРОБЛЕМЫ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В XVIII–XX ВЕКАХ

В статье рассмотрена история аналитического решения классической задачи сферического движения твердого тела. Методология представленной проблемы показана в тесной взаимосвязи с историей развития математических методов решения задач механики. На основе полученного историко-математического исследования получена новая хронология основных случаев решения задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В работе воссоздана целостная картина исследования вопросов динамики твердого тела в XVII–XIX вв. Классифицированы основные методы XVIII в. решения задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. На основе изучения работ математиков и механиков XVII–XVIII вв. показана взаимосвязь этой задачи с развитием в механике математических методов решения. Как результат, представлена новая классификация различных случаев интегрируемости задачи о вращении.

Уточнены и дополнены описание подхода Л. Эйлера к решению классической задачи, практическое и аналитическое продвижение задачи Ж.Л. Лагранжем, и, наконец, окончательные и полные решения, выполненные К. Якоби и О.И. Сомовым с использованием гиперэллиптических функций. Результатом анализа явилась проблемно-хронологическая систематизация полного аналитического решения задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.

В работе проведен историко-научный анализ аналитических решений в работах Л. Эйлера, Ж.Л. Лагранжа, Л. Пуансо; анализ развития аппарата теории эллиптических функций в трудах Н. Абеля, О.И. Сомова, К. Якоби, К. Вейерштрасса и Б. Римана. Результатом этого анализа стало определение двух основных теоретических подходов применительно к задачам динамики твердого тела: геометрического в трудах Римана, и аналитического на базе теории эллиптических функций.

Ключевые слова: *вращение твердого тела, история и методология аналитического решения, основные математические методы, Лаграгж, Эйлер, Якоби, Сомов.*

A.O. Yulina
Senior Lecturer
St. Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering
St. Petersburg, Russian Federation

ON THE HISTORY AND METHODOLOGY OF PROGRESS OF THE PROBLEM OF ROTATION OF A RIGID BODY AROUND A FIXED POINT IN THE 18–20th CENTURIES

The article considers the history of the analytical solution of the classical problem of spherical motion of a rigid body. The methodology of the presented problem is shown in close connection with the history of the development of mathematical methods for solving problems in mechanics. Based on the obtained historical and mathematical research, a new chronology of the main cases of solving the problem of rotation of a rigid body about a fixed point is obtained. The work recreates a complete picture of the study of issues of rigid body dynamics in the 17th-19th centuries. The main methods of the 18th century for solving the problem of rotation of a rigid body about a fixed point are classified. Based on the study of the works of mathematicians and mechanics of the 17th-18th centuries, the relationship of this problem with the development of mathematical methods for solving it in mechanics is shown. As a result, a new classification of various cases of integrability of the rotation problem is presented.

The description of L. Euler's approach to solving the classical problem, the practical and analytical advancement of the problem by J.L. Lagrange, and, finally, the final and complete solutions performed by K. Jacobi and O.I. Somov using hyperelliptic functions are clarified and supplemented. The result of the analysis was a problem-chronological systematization of the complete analytical solution to the problem of rotation of a rigid body around a fixed point.

The work contains a historical and scientific analysis of analytical solutions in the works of L. Euler, J.L. Lagrange, L. Poinsot; an analysis of the development of the apparatus of the theory of elliptic functions in the works of N. Abel, O.I. Somov, K. Jacobi, K. Weierstrass and B. Riemann. The result of this analysis was the definition of two main theoretical approaches applicable to the problems of rigid body dynamics: geometric in the works of Riemann, and analytical based on the theory of elliptic functions.

Keywords: *Rotation problem, impact, elliptic functions, L. Euler, J.L. Lagrange, O.I. Somov, K. Jacobi, K. Weirstrass.*

Введение

Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки является модельной или наиболее типичной для всей динамики твердого тела, с точки зрения теории, а с практической стороны, ее появление сгенерировало очень много инженерных работ.

В историко-математической литературе, имеется много работ [1–10], посвященных этой теме, но недостаточно проявлена хронология решения задачи, как относительно интегрируемости, так и относительно свойств эллиптических и гиперэллиптических функций, необходимых для полного исследования задачи о вращении твердого тела.

Проблема движения твердого тела относительно неподвижной точки является одной из классических задач, которую описывают во всех учебных курсах теоретической механики. До нашей работы история постановки и решения этой задачи имела следующие этапы:

– Леонард Эйлер – 1758 г.

– Жозеф Луи Лагранж – 1773 г.

– Софья Васильевна Ковалевская – 1887 г.

Разрыв между первым и вторым этапами – 15 лет, между вторым и третьим – 114 лет! Лагранж в 1773 г. показал, что аналитическое решение сводится к эллиптическим интегралам. Математики ждали решения Ковалевской 100 лет?

Мы ставим своей целью рассмотреть работы математиков между концом XVIII и серединой XIX века в надежде заполнить пробел в истории аналитического решения, поэтому установить и обосновать обобщение и систематизацию основных этапов и их итогов.

История задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки

Механика Эйлера

Леонард Эйлер (1707–1783) – выдающийся ученый, оказавший большое влияние на развитие физико-математических наук в XVIII веке. Его работы поражают глубиной исследовательской мысли, широтой и универсальностью дарования. Им оставлено научное наследие огромного объема. Эйлер составил программу грандиозного и всеобъемлющего цикла работ по механике в первые годы научной деятельности. Эта программа изложена в его первой двухтомной монографии «Механика, т. е. наука о движении, изложенная аналитическим методом», изданной в Петербурге в 1736 г. «Итак, разнообразие тел предопределяет для нас первоначальное деление нашей работы. Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, – тем, которые являются твердыми, не позволяющими менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел. По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, представленные сами себе, продолжают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т. е. силы» [11, с. 8]. Реализация намеченной программы, естественно, растянулась на десятилетия. В первой монографии Эйлер изложил основания динамики точки. Под механикой он понимал науку о движении в отличие от науки о равновесии сил, или статики. Отличительной чертой «Механики» Эйлера явилось широкое использование нового математического анализа, дифференциального и интегрального исчисления. История дифференциального и интегрального исчисления показывает, что механика была постоянно источником вопросов, для решения которых придумывали новые способы интегрирования функций и уравнений. Два внушительных тома Механики Эйлера представляют, можно сказать, сборники задач интегрального исчисления. Одна из линий исследований Эйлера, которые относятся к 50-м гг. XVIII в. – динамика твердого тела. Те принципиальные упрощения в трактовке механики континуума, к которым Эйлер пришел в эти годы, были основой его успехов и в этой области. Их итоги находим в знаменитой «Теории движения твердых тел» (1760). Ряд разделов этого труда содержит то, что мы теперь называем геометрией массы. Вначале даются определения центра масс или центра инерции твердого тела (Эйлер обращает внимание на то, что этим терминам надо отдать предпочтение перед термином «центр тяжести») и способы его определения. Потом излагается теория моментов инерции. Почти все, что тут изложено, является личным достижением Эйлера. Собственно, моменты инерции относительно определенной оси встречаются до Эйлера, например, у Гюйгенса при рассмотрении физического маятника и у Даламбера, но эти понятия у предшественников Эйлера не сформировалось в самостоятельные

конструкты. Единственное, что было добавлено в этой теории после Эйлера, – это геометрическая интерпретация Пуансо, эллипсоид инерции (1834 г.). Все остальное находим в «Теории движения тел», например, теорему, которую почему-то называют теоремой Штейнера – геометра XIX в.!

После применения общих формул для вычисления моментов инерции в некоторых отдельных случаях подробное решение задачи о вращении тела вокруг неподвижной оси по инерции и под действием силы тяжести. В связи с этим доказывается существование свободных осей вращения твердого тела и вводится понятие главных осей инерции, что также является открытием Эйлера. В основном, мы находим эти понятия у Эйлера еще в «Морской науке» (1749). Это дает Эйлеру возможность перейти к рассмотрению движения свободного твердого тела. Он разлагает это движение на поступательное движение с центром инерции и на движение вокруг центра инерции – вращение вокруг точки. Это вращение он представляет как вращение вокруг оси, проходящей через центр инерции, направление которой изменяется с течением времени. Перед ним встает задача дать кинематическое описание такого движения и составить для него динамические уравнения. В «Теории движения», исходя из динамических соотношений (связи скоростей и силовых характеристик), Эйлер ставит следующую проблему: дана угловая скорость ω вращения твердого тела вокруг оси, проходящей через его центр инерции I и образующей углы α, β, γ с центральными главными осями инерции, которые приняты за оси координат; какими должны быть компоненты X, Y, Z сил, приложенных к элементу тела массы dm, которое занимает положение, определенное точкой (x, y, z), чтобы за время dt ось и угловая скорость вращения получили заданные изменения $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\omega$? В связи с тем, что в соответствии с основными принципами механики (вторым законом Ньютона) компоненты искомой силы после умножения на dt и деления на dm пропорциональны (а при соответствующем подборе единиц измерения – равны) приращениям компонентов скоростей $\left(\frac{Xdt}{dm} = du, \ldots\right)$, остается вычислить последние [12, с. 34–37].

Полученные динамические уравнения позволяют дать ответ на вопрос, обратный приведенному выше: заданы силы, действующие на тело, вращающееся вокруг оси, проведенной через его центр инерции, с угловой скоростью ω; как за время dt изменятся положение оси вращения и угловая скорость тела?

Вместе с тем выявляется потребность использовать подвижную систему координат, неподвижно связанную с телом, – систему его главных осей инерции.

Введение подвижного трехгранника было важным этапом как в развитии механики, так и в развитии геометрии. В связи с этим Эйлер ввел различные способы определения положения подвижной координатной системы относительно неподвижной, в частности, названные его именем углы (впервые введенные им в 1748 г.). В этих исследованиях Эйлера важное место занимают методы сферической тригонометрии, в которую он внес значительный вклад. Самое важное применение полученных кинематических и динамических уравнений, которое Эйлеру удалось продемонстрировать, – решение с их помощью задачи о вращении твердого тела вокруг точки по инерции.

Таким образом, Леонард Эйлер разделил все задачи динамики на два класса, соответствующие дифференциальному и интегральному исчислению. Показал тем самым, который из этих инструментариев требуется при решении каждого типа задач. Эйлер поставил задачу о вращении твердого тела, определил терминологию применимую к этой задаче, получил первый случай интегрируемости поставленной проблемы, рассматривая вращение твердого тела около неподвижной точки при условии равенства нулю момента внешних сил.

Заметим, что астрономические углы с тех пор с тех пор стали называться углами Эйлера.

Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях Эйлера, Лагранжа, Якоби и Сомова

Впервые задачу о вращении твердого тела, причем сразу в общем виде, поставил Эйлер в 1758 г. В работе «Теория движения твердых тел» [12] он рассмотрел случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки (полюса). В этом случае тело имеет три степени свободы. Такие три параметра Леонард Эйлер называет углами: прецессии – ψ, собственного вращения – φ, нутации – θ, которые однозначно определяют положение подвижной системы отсчета, жестко связанной с телом, относительно неподвижной системы координат. При вращении твердого тела углы Эйлера меняются, являясь некоторыми функциями времени, которые он вывел еще в работе «Открытие нового принципа механики» (1750). Были получены кинематические уравнения (связи угловых скоростей тела и параметров движения). Далее Эйлер устанавливает

зависимости между параметрами движения и силами, действующими на тело – динамические уравнения. Далее Эйлер решает задачу для случая трех или двух равных главных моментов инерции. В случае попарно неравных моментов при отсутствии внешних сил он выражает закон движения через дуги конических сечений, т. е. через эллиптические интегралы, и рассматривает условия, при которых решение сводится к элементарным интегралам.

Следующий шаг вперед вскоре сделал Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). Существенно новым достижением Лагранжа в этой проблеме была постановка задачи о движении твердого тела, получившая в дальнейшем наименование «случая Лагранжа»: точка опоры или подвеса не совпадает с центром тяжести тела Лагранж ввел упрощающие предположения о динамической симметрии твердого тела и о расположении точки опоры на оси симметрии. Этот важный результат вместе с выделением практически интересного случая движения тяжелого симметричного гироскопа (как стали позже называть случай Лагранжа) представляет чрезвычайно большое достижение в динамике твердого тела. Таким образом, Лагранж привел задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки к квадратурам. В 1773 г. он исследовал вращение твердого тела некоторой формы около неподвижной точки, рассмотрев и усовершенствовав решение Эйлера задачи о вращении тела без действия внешних сил. Позже, при подготовке второго издания «Аналитической механики» в начале XIX в., Лагранж вернулся к этой проблеме, начав более глубокое ее исследование. Он вводит понятие мгновенной оси вращения твердого тела около неподвижной точки, опираясь на обоснование примененного им подхода, детально разработанного ранее. Далее заново выводятся кинематические уравнения Эйлера вращения твердого тела в дифференциальной форме. Затем заново выводятся динамические уравнения Эйлера, исходя из той формы дифференциальных уравнений движения системы, которые теперь называют «уравнениями Лагранжа второго рода». Лагранж подчеркивает, что свободные оси в твердом теле открыл Эйлер, и наиболее изящная и удобная во многих случаях форма дифференциальных уравнений движения впервые выведена Эйлером. Однако Лагранж этим не ограничился: он наметил путь интегрирования и двух первых уравнений движения, довел их до квадратур в эллиптических функциях.

Рассматривая второй эпизод истории задачи о вращении твердого тела, мы переходим к историографии работ Ж. Лагранжа. Назовем прежде всего книгу И.А. Тюлиной о Лагранже [7, с. 140–143]. Замечательно, что, говоря о задаче малых колебаний, Тюлина обращает внимание на то, что т.н. парадокс Даламбера-Лагранжа в 1858–1859 гг. был разрешен независимо друг от друга О.И. Сомовым и К. Вейерштрассом, но это осталось незамеченным математической общественностью. Помимо научной биографии и общего обзора работ Лагранжа немало внимания уделено истории решения Лагранжем второго случая задачи о вращении [7, с. 143–147]. Тюлина дает экспозицию истории задачи начиная с Эйлера, упоминает Л. Пуансо (1834) и подробно обращается к решению Лагранжа (1773, 1775), привлекает посмертное систематизированное издание черновиков Лагранжа, выполненное Бине. Тюлина выделяет положительные стороны метода Лагранжа, упоминает решение Пуассона (1811, опубл. в 1815). Заключает, что решение задачи было полностью выражено в тета-функциях К. Якоби в 1851 г., а «большой знаток теории эллиптических функций академик Петербургской академии наук О.И. Сомов в работе «Доказательство формул Якоби, относящееся к теории вращения твердого тела» в 1851 г. довел решение задачи до конца» [7, с. 148].

Общая характеристика работ Лагранжа по механике имеется в трудах А.Т. Григорьяна [8]. Прекрасный анализ трудов Лагранжа по механике можно найти у Крейга Фразера [9, 10].

Далее в историографии истории задачи о вращении в литературе большая лакуна, цели заполнения которой и посвящена наша статья. Несмотря на то, что в 1855 г. О.И. Сомов опубликовал полное решение задачи о вращении, она осталась незамеченной в математической литературе.

Единственным отечественным автором, упомянувшим о ней, был Е.И. Золотарев [13] (Записки С.-Петербургской Академии наук. XXXI. 1877). Золотарев пишет, что Сомов первый ввел в преподавание в университете теорию эллиптических функций и сумел изложить главные основания этой теории языком, понятным для коллег и для студентов. Его учебник стал первым в мировой литературе, счастливо соединившим открытия Абеля и Якоби с приложениями к геометрии и механике. Именно владение этой теорией, пишет Золотарев, позволило Сомову в 1855 г. представить в Петербургскую академию наук мемуар «Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux égaux» [14].

Единственным зарубежным автором, высоко оценившим открытие Сомова, был Феликс Клейн.

В своей работе о вращении твердого тела [15] четко определяет два подхода к решению динамической задачи о волчке: аналитический, с помощью аппарата теории эллиптических функций и геометрический, базирующийся на поверхностях Римана. Решение самой задачи подробно излагает геометрически, история аналитического решения представлена следующим образом:

«Лагранж свел задачу к квадратурам, но мы математики, считаем, что Якоби в значительной степени способствовал развитию динамики после Лагранжа, введя эллиптические функции...работа Якоби незаслуженно не получила не получила той известности, которой достойна. Она впервые была опубликована посмертно во втором томе собрания сочинений Якоби, изданном Берлинской академией в 1882 году. Я также хочу добавить, что Лоттнер и Сомов, являющиеся учениками Якоби, независимо разработали тот же метод, опубликованный в 1855 году. В этих работах показано, что девять направляющих косинусов можно выразить в терминах тэта-функций» [15, с. 22].

Загадочное молчание вокруг открытия Сомова можно объяснить равнодушием петербургского математического сообщества к теории эллиптических функций, неготовность его воспринять методы эллиптических функций в механике. Несмотря на то, что статья была на французском языке, она осталась обойденной молчанием и во Франции. Хотя, заметим, другие работы Сомова, например, его замечательная формула приближенного вычисления малых дуг кривых, вызвала восхищение Ш. Эрмита, который даже посвятил доказательству этой формулы одну из своих лекций в Политехнической школе.

Развитие теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса и Сомова

История возникновения теории эллиптических функций

Введение и использование эллиптических и гиперэллиптических функций сводит задачу о вращении твердого тела около неподвижной точки к простейшим элементам. Искомые параметры движения (направляющие косинусы углов Эйлера) являются композицией таких функций. Общие понятия и определения эллиптических функций сводятся к операции интегрирования.

Все способы интегрирования состоят или в приведении рассматриваемого интеграла к элементарным функциям, или в непосредственном его исследовании, когда это приведение невозможно.

Леонард Эйлер исчерпал практически все случаи интегрирования в элементарных функциях. Следующий этап развития интегрального исчисления – эллиптические интегралы. К таким интегралам приходят математики конца XVII в. После теории логарифмических и круговых функций, важное место занимает теория эллиптических функций [16]. Это название дают трансцендентным функциям, к которым приводятся интегралы алгебраических выражений вида $f\left(x,\sqrt{R}\right)dx$, где $\sqrt{R}$ целая функция третьей или четвертой степени относительно x, а f рациональная относительно x и $\sqrt{R}$. Подобные интегралы встречаются уже у Ньютона, основателя этого исчисления, он дает разложение в ряды эллиптических функций, которыми выражаются дуги эллипса и гиперболы (1676). После этого эллиптические функции встречаются в задаче об упругой линии [17]. Яков Бернулли в своем решении этой задачи находит, что ордината упругой линии относительно абсциссы выражается интегралом:

$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(a^4-x^4\right)}}$, а дуга – интегралом $\int\frac{a^2dx}{\sqrt{\left(a^4-x^4\right)}}$, и полагает, что эти интегралы не могут быть приведены ни к квадратурам, ни к спрямлению (вычисление длины дуги кривой) какого-либо сечения. Того же мнения сначала был и Эйлер. Иоганн Бернуллистарший нашел, что сумма этих интегралов может быть выражена дугою эллипса, у которого малая ось равна $2a$, а большая $2a\sqrt{2}$. Он также заметил, что $\int\frac{a^2dx}{\sqrt{\left(a^4-x^4\right)}}$ приводится к спрямлению кривой, называемой лемнискатой. Джулио Карло Фаньяно (1682–1766, итальянский математик, который первым обратил внимание на теорию эллиптических функций) открыл замечательное соотношение между дугами, взятыми на одном эллипсе или на одной гиперболе. Эйлер доказал аналитически и обобщил свойство, открытое Фаньяно: он нашел алгебраическое уравнение между переменными x и y, удовлетворяющее дифференциальному уравнению вида [18]:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

где f – целая функция четвертой степени; оно совместно с трансцендентным уравнением

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}+C$$

в котором для постоянного C можно взять значение интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, соответствующее частному значению переменной x. На основе этих двух уравнений Эйлер вывел способ для сравнения эллиптических функций через сложение, вычитание, умножение и деление, посредством алгебраических действий над переменными, от которых зависят эти функции [18, с. 15].

Вскоре Джон Ланден (1719–1790, британский математик, его преобразования относятся к эллиптическим интегралам и эллиптическим функциям) нашел, что дуга гиперболы может быть выражена посредством двух дуг, принадлежащих эллипсам с различными эксцентриситетами. В этом замечательном свойстве заключается соотношение между эллиптическими функциями, отличающимися на константу, и входящими в корень рациональной функции подынтегрального выражения. То же соотношение нашел Лагранж и применил его к приближенному вычислению любой эллиптической функции. В этом состоянии к началу XIX в. находилась теория эллиптических функций. Значительные усовершенствования в теорию эллиптических функций внес Лежандр. Распределив на виды и приведя к простейшим выражениям все эллиптические функции, Лежандр упростил и значительно продвинул вперед исследования своих предшественников; разобрал много новых интегралов, приводимых к эллиптическим функциям, решил некоторые вопросы геометрии и механики, оставшиеся нерешенными из-за несовершенства способов вычисления эллиптических функций. Лежандр составил таблицы, с помощью которых эллиптические функции могут быть использованы в анализе таким же образом, как круговые и логарифмические функции. Первый его опыт систематического изложения теории эллиптических функций находится в мемуаре «Mémoire sur les transcendantes elliptiques, où l'on donne des méthodes faciles pour comparer et évaluer ces transcendantes ... Lu à la cidevant» (1792). Лежандр, ориентируясь более на практические цели исследования, упустил из виду некоторые важные теоретические вопросы, связанные с высшими трансцендентными выражениями, тесно связанные с эллиптическими функциями. С выходом в свет первых двух томов «Traité des fonctions elliptiques» в математических журналах Крелле и Шумахера, стали появляться гениальные открытия К. Якоби и Н. Абеля (1802–1829). В номерах 123 и 127 журнала Шумахера Якоби дал общий способ для преобразования эллиптических функций, включающий как частный случай преобразование Лагранжа и другие подобные преобразования, найденные Лагранжем. Этот способ послужил источником важных открытий в теории эллиптических функций. Одновременно с открытиями Якоби во втором томе журнала Крелле появилась статья Н. Абеля, в которой автор доказывает основные свойства обратных эллиптических функций и, через введение в анализ мнимых величин, обнаруживает в этих функциях двойную периодичность. («Recherches sur les fonctions elliptiques», 1827).

Абель приводит общие формулы для умножения и деления эллиптических функций на целое число; рассматривает подробно способы решения дробных алгебраических уравнений в радикалах и вводит выражения эллиптических функций в виде произведений, состоящих из бесконечного числа множителей, а также в виде быстро сходящихся бесконечных рядов.

В следующей работе «Über die Functionen welche der Gleichung genugthun», опубликованной в 3-м номере журнала Крелле (1827), Абель предлагает способ решения алгебраических уравнений, относящихся к делению лемнискаты. После этого он доказал в общем виде формулы преобразования эллиптических функций, предложенные Якоби. В том же томе журнала Крелле он дал общую теорему, относящуюся к сравнению интегралов вида $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, где R – целая функция x какой-нибудь степени; эта теорема содержит как частный случай теорему Эйлера и распространяется на высшие трансцендентные, названные ультраэллиптическими или Абелевыми функциями; потом Абель расширил ее на все трансцендентные, имеющие алгебраические дифференциалы. Все аналитические приемы Абеля отличаются общностью и математической точностью. Абель, поставив себе аналитический вопрос, ищет его решение логичным и естественным путем, а потому достигает, если это возможно, самого общего решения; либо доказывает невозможность этого решения. Таким образом, Абель доказал невозможность общего радикального решения уравнений 5-й степени и рассмотрел случаи, в которых интегралы вида $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ могут быть приведены к алгебраическим и логарифмическим функциям [17].

Абель умер очень рано, в 26 лет, но оставил науке богатое наследие, в котором разбираемся мы до сих пор. Все творения Абеля изданы вместе, под заглавием «Oeuvres complètes de N.H. Abel, mathématicien, avec des notes et développements».

Теория эллиптических функций, обогатившись открытиями Лежандра, Абеля и Якоби, заняла важное место в математическом анализе и теоретической механике в период с XVIII по XIX в.

Первое систематическое изложение по вопросам теории эллиптических функций в России представлено у петербургского академика Осипа Ивановича Сомова. Подробно и ясно изложена эта непростая и поныне отрасль интегрального исчисления в его фундаментальном труде «Основания теории эллиптических функций» (1850). Книга содержит семь глав, и отдельная глава посвящена приложениям эллиптических функций к некоторым вопросам геометрии и механики.

К середине XIX в. в теории эллиптических функций был сформирован математический аппарат, о котором мы расскажем далее.

Понятие эллиптической функции. Приведение, сравнение и преобразование таких функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса и Сомова

В том случае, когда интеграл от алгебраической функции не приводится к другой алгебраической функции, его рассматривают как трансцендентную функцию. Это интегралы вида

$$z = \int f\left(x, \sqrt{R}\right),$$

где R – целая функция относительно x, а f – рациональная относительно x и R. Если R имеет первую или вторую степень, то соответствующий интеграл $z = \int f\left(x, \sqrt{R}\right)$ приводится или к алгебраической функции, или к обратной тригонометрической функции (круговые функции). Если же степень третья и выше, то подобные интегралы назвали эллиптическими, а обращение таких интегралов, соответственно – эллиптическими функциями. Название этим функциям дала задача вычисления длины дуги эллипса.

Доказывая теорему Абеля, Карл Якоби ввел знаменитые θ – функции, с помощью которых гиперэллиптические интегралы могут быть представлены алгебраическими разложениями или быстросходящимися рядами. Последнее представление, с помощью рядов, очень важно в задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки. Используя эти разложения, О.И. Сомов получил кинематические параметры движения в задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара. Представленное решение очень важно в практических задачах ориентации и управления космических и других объектов механического движения.

Далее, работая с логарифмами, Карл Якоби получает две тета-функции и раскладывает их в быстросходящиеся ряды.

Блестящее продолжение теория эллиптических функций нашла в работах Карла Вейерштрасса. Работая под руководством знаменитого профессора К. Гудерманна (1798–1852), Вейерштрасс увлекся исследованиями Абеля и Якоби в области эллиптических функций. Ему удалось не только глубоко понять, но и решить проблемы, которые были лишь обозначены Абелем и Якоби. Так, он нашел представление модулярной функции в виде частного двух рядов, обобщил это представление на другие известные эллиптические функции. Вейерштрассу удалось сделать это летом 1840 г., а осенью того же года он защитил работу «Ueber die Entwickelung der Modular-Functionen». Часть этой работы вошла в его мемуары об абелевых функциях, напечатанных в 52 журнале Крелле (I том «Mathematische Werke» Вейерштрасса).

Все частные виды θ-функции Вейерштрасс заменил одной σ-функцией [17]. В 1871 г. Вейерштрасс упрощает систему эллиптических функций Якоби, вводя вместо трех тета-функций одну, имеющую своим аргументом комплексное время. Исследования Вейерштрасса в области теории эллиптических функций обратили на него внимание ученых Германии, и в 1856 г. он был приглашен в Берлинский университет экстраординарным профессором на кафедру чистой математики, а в 1857 г. был избран в члены Берлинской Академии наук. В дальнейшем Вейерштрасс, обобщая и уточняя выводы Абеля и Якоби, показал, что условия интегрируемости эллиптического интеграла в логарифмических функциях могут быть выведены, если такие интегралы разбить на три класса: первого, второго и третьего рода. А затем свести их к эллиптическим интегралам третьего рода, которые на основании теоремы Абеля приводятся к алгебраическим соотношениям. Основные исследования, относящиеся к гиперэллиптическим интегралам, Вейерштрасс сообщал или на своих лекциях, или в письмах к ученым. С вопросами применения гиперэллиптических функций в этой задаче блестяще справился петербургский математик и механик, профессор О.И. Сомов. К 1851 г. он дал первое обобщенное решение задачи вращения тела вокруг неподвижной точки. Сомов получил решение задачи о вращении твердого тела около точки после первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром. Решение Сомова показало, что основные

параметры движения выражаются через композицию эллиптических функций простейшего вида и, после их введения задача о вращении твердого тела относительно неподвижной точки сводится к простейшим элементам. Поэтому дальнейшее исследование задачи о движении волчка имело продолжение на комплексной плоскости, направляющие косинусы при вращении тела были получены в виде частных ϑ- или σ-функций. Постепенно получили ясность и кватернионные выражения для кинематики движения в задаче о вращения твердого тела около неподвижной точки. Таким образом, рассмотренное решение задачи, представленное Сомовым в 1850 г., вполне объясняет дальнейшее направление исследований: как в кватернионном представлении, так и в численном моделировании задачи.

Результаты хронологического исследования аналитического решения задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки

Исследования инженеров

1817. И. Боненбергер (Johann von Bohnenberger, 1765–1831) изобрел, а затем и опубликовал описание гироскопа. Впервые уравновешенный гироскоп нашел практическое применение в устройстве для стабилизации курса торпеды, изобретенном в 1880-х гг. австрийским инженером Л. Обри.

Исследования математиков

Были предложены и доведены до полного завершения два подхода к решению задачи после Лагранжа: аналитический, с помощью теории эллиптических функций, которая начала активно развиваться благодаря этой задаче и геометрический, развитый в работах Б. Римана.

История аналитического решения в эллиптических функциях

1827. Н.Х. Абель. «Recherches sur les fonctions elliptiques» (журнал Крелле, 2 т.). Доказал основные свойства обратных эллиптических функций и привел в общем виде формулы преобразования таких функций, обнаружил в этих функциях двойную периодичность. В том же томе журнала Крелле Абель доказал центральную теорему теории эллиптических функций. Эта теорема дает разложения эллиптических функций первого, второго и третьего родов на простейшие алгебраические и логарифмические функции и распространяется на высшие трансцендентные, названные ультраэллиптическими (гиперэллиптическими) или Абелевыми функциями.

1829. К. Якоби. Продолжил глубокое изучение эллиптических функций. «Новые основания эллиптических функций», в которой вводит знаменитые тета-функции, с помощью которых однозначно определяются основные параметры движения в задаче о вращении.

1849. К. Якоби. «Новая теория о вращении твердого тела», «О вращении твердого тела». Фундаментальное исследование по использованию эллиптических функций в динамике твердого тела было выполнено в 1849 г., а опубликовано уже посмертно в его втором томе сочинений в 1882 г.

1840 и далее. К. Вейерштрасс. «Über die Entwicklung der Modular-Functionen». Упростил систему тета-функций Якоби, нашел представление модулярной функции в виде частного двух рядов, обобщил это представление на другие известные эллиптические функции. Часть этой работы вошла в его мемуары об абелевых функциях, напечатанных в 52 номере журнала Крелле. В дальнейшем Вейерштрасс обобщил и уточнил выводы Абеля и Якоби; показал, что условия интегрируемости эллиптического интеграла в логарифмических функциях могут быть выведены, если такие интегралы разбить на три класса: первого, второго и третьего рода, а затем свести их к эллиптическим интегралам третьего рода, которые на основании теоремы Абеля приводятся к алгебраическим соотношениям.

1853. К. Лоттенер. «Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punkt rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten». Представил инженерное решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки с помощью эллиптических функций К. Якоби.

1850 г. О.И. Сомов. «Основания теории эллиптических функций». Обобщил и систематизировал работы Абеля, Якоби, Вейерштрасса по теории эллиптических функций. В этом же фундаментальном труде представил основные приложения этой теории в геометрии и механике. В том числе, решил задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в общем случае. Четко и ясно показал применение эллиптических функций с мнимым параметром (третий род) при выводе всех кинематических параметров движения (угловые скорости и углы прецессии, нутации и собственного вращения).

1855 г. О.И. Сомов. «J. Somo. Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d´un point fixe d´un

corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d´inertie principaux égaux». С помощью эллиптических функций первого, второго и третьего родов объяснил гироскопический эффект, который на практике применялся с 1817 г., но не имел до Сомова теоретического объяснения. Представил строгое доказательство соотношения моментов инерции, необходимого для гироскопического явления.

1853 г. и далее. Б. Риман. В цикле работ 1850-х гг. применил геометрический подход к строгому изложению проблемы вращения твердого тела. Использование «римановой поверхности» и соответствующих эллиптических функций имело значительное преимущество при исследовании всех задач, связанных с движением твердого тела вокруг неподвижной точки.

Таким образом, основная хронология решения задачи о вращении твердого тела сводится к следующему:

1. Леонард Эйлер – 1758 г.
2. Жозеф Луи Лагранж – 1773 г.
3. Карл Якоби, О.И. Сомов – 1850 г.

Заключение

На базе изучения в работах О.И. Сомова общего решения задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки на прочном фундаменте теории эллиптических функций показано создание им в качестве логического важного логического следствия изложение динамики сферического движения. Это позволило восстановить целостную картину формирования у Сомова теории гироскопов, как отдельного раздела теоретической механики, очень важного в практическом применении.

Список литературы

1. Михайлов Г.К., Седов Л.И. Основы механики и гидродинамики в трудах Л. Эйлера // *Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука* / Боголюбов Н.Н. (ред.), Михайлов Г.К. (ред.), Юшкевич А.П. (ред.). М.: Наука. 1988. С. 166–179.

2. Поляхов Н.Н. Исследования Эйлера по механике первого петербургского периода // *Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука* / Боголюбов Н.Н. (ред.), Михайлов Г.К. (ред.), Юшкевич А.П. (ред.). М.: Наука. 1988. С. 229–232.

3. Крылов А.Н. Леонард Эйлер // Леонард Эйлер (1707–1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти / Деборин А.М. (ред.) // *Труды института истории науки и техники. Серия II*. М.-Л.: АН СССР, 1935. Вып. 1. С. 1–28.

4. Крутков Ю.А. Из Эйлеровой Theoriae motus// Леонард Эйлер (1707–1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти / Деборин А.М. (ред.) // *Труды института истории науки и техники. Серия II*. М.-Л.: АН СССР, 1935. Вып. 1. С. 89–94.

5. Сретенский Л.Н. Динамика твердого тела в работах Эйлера // *Эйлер: Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР* / ред. Лаврентьев М.А., Юшкевич А.П., Григорьян А.Т. М.: АН СССР,1958. С. 210–230.

6. Полак Л.С. Некоторые вопросы механики Леонарда Эйлера // *Эйлер: Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР* / ред. Лаврентьев М.А., Юшкевич А.П., Григорьян А.Т. М.: Наука.1958. С. 231–267.

7. Тюлина И.А. *Жозеф Луи Лагранж (1736–1813)*. М.: Наука, 1977.

8. Григорьян А.Т. О трудах Лагранжа по механике // *Вопросы истории естествознания и техники*. 1966. 20. С. 46–51.

9. Fraser C.G. Lagrange's analytical mathematics, its Cartesian origins and reception in Comte's positive philosophy // *Stud. Hist. Philos. Sci.* 1990. 21 (2). Pp. 243–256.

10. Fraser C.G. J.L. Lagrange's early contributions to the principles and methods of mechanics // *Arch. Hist. Exact Sci*. 1983. 28 (3). Pp. 197–241.

11. Космодемьянский А.А. Леонард Эйлер и его работы по механике // *Труды Краснознаменной Ордена Ленина Военно-Воздушной Академии имени профессора Н.Е. Жуковского*. 1959. 709. С. 3–22.

12. Погребысский И.Б. *К истории механики XVIII столетия. Эйлер как механик. Серия «Из истории мировой культуры». Механика и физика XVIII в.* М.: Наука. 1976. С. 1–38.

13. Золотарев О.И. Об ученых трудах академика О.И. Сомова // *Полное собрание сочинений Егора Ивановича Золотарева*. Л.: АН СССР. 1932. Т. 2. С. 60–71.

14. Somo J. Solution rigoureuse du probleme de la rotation autour d'un point fxe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux egaux // *Bulletin de la Classe physico-math´ematique de l'Acad´emie imp´eriale des sciences de Saint-P´etersbourg*. Saint-P´etersbourg: W. Grae. 1855. XIV. Pp. 115–136.

15. Клейн Ф. *Математическая теория волчка*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 70 с.

16. Юлина А.О., Синкевич Г.И. К истории задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара // *История науки и техники*. 2021. № 12. С. 3–8.

17. Юлина А.О. История развития теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса, Сомова // *Таврический вестник информатики и математики.* 2021. № 3. С. 79–92.

18. Сомов О.И. *Основания теории эллиптических функций*. СПб: АН. 1850. 250 с.

References

1. 1. Mikhailov G.K., Sedov L.I. Osnovy mekhaniki i gidrodinamiki v trudah L. Ejlera [Fundamentals of

mechanics and hydrodynamics in the works of L. Euler]. *Razvitie idej Leonarda Ejlera i sovremennaya nauka* [Development of the ideas of Leonhard Euler and modern science]. Bogolyubov N.N. (ed.), Mikhailov G.K. (ed.), Yushkevich A.P. (ed.). M.: Science. 1988. Pp. 166–179.

2. Polyakhov N.N. Issledovaniya Ejlera po mekhanike pervogo peterburgskogo perioda [Euler's research on the mechanics of the first St. Petersburg period]. *Razvitie idej Leonarda Ejlera i sovremennaya nauka* [Development of the ideas of Leonard Euler and modern science]. Bogolyubov N.N. (ed.), Mikhailov G.K. (ed.), Yushkevich A.P. (ed.). M.: Science. 1988. Pp. 229–232.

3. Krylov A.N. Leonhard Euler. Leonard Ejler (1707–1783). Sbornik statej i materialov k 150-letiyu so dnya smerti [Leonard Euler (1707–1783). Collection of articles and materials for the 150th anniversary of death]. Deborin A.M. (ed.) *Trudy instituta istorii nauki i tekhniki. Seriya II* [Proceedings of the Institute of the History of Science and Technology. Series II]. M.-L.: AN SSSR, 1935. Issue 1. Pp. 1–28.

4. Krutkov Y.A. Iz Ejlerovoj Theoriae motus. Leonard Ejler (1707–1783). Sbornik statej i materialov k 150-letiyu so dnya smerti [From Euler's Theoriae motus. Leonard Euler (1707–1783). Collection of articles and materials for the 150th anniversary of death]. Deborin A.M. (ed.) *Trudy instituta istorii nauki i tekhniki. Seriya II* [Proceedings of the Institute of the History of Science and Technology. Series II]. M.-L.: AN SSSR, 1935. Issue 1. Pp. 89–94.

5. Sretensky L.N. Dinamika tverdogo tela v rabotah Ejlera [Dynamics of a Rigid Body in Euler's Works]. *Ejler: Sbornik statej v chest' 250-letiya so dnya rozhdeniya, predstavlennyh Akademii nauk SSSR* [Euler: Collection of articles in honor of the 250th anniversary of his birth, presented by the USSR Academy of Sciences]. Ed. Lavrentiev M.A., Yushkevich A.P., Grigoryan A.T. M.: AN SSSR. 1958. Pp. 210–230.

6. Polak L.S. Nekotorye voprosy mekhaniki Leonarda Ejlera [Some questions of the mechanics of Leonhard Euler]. *Ejler: Sbornik statej v chest' 250-letiya so dnya rozhdeniya, predstavlennyh Akademii nauk SSSR* [Euler: Collection of articles in honor of the 250th anniversary of his birth, presented by the Academy of Sciences of the USSR]. Eds Lavrentiev M.A., Yushkevich A.P., Grigoryan A.T. M.: Science. 1958. Pp. 231–267.

7. Tyulina I.A. *Joseph Louis Lagrange (1736–1813)*. M.: Science. 1977.

8. Grigoryan A.T. O trudah Lagranzha po mekhanike [On the works of Lagrange on mechanics]. *Voprosy istorii estestvoznaniya i tekhniki* [Questions of the history of natural science and technology]. 1966. № 20. Pp. 46–51.

9. Fraser C.G. Lagrange's analytical mathematics, its Cartesian origins and reception in Comte's positive philosophy // *Stud. Hist. Philos. Sci.* 1990. 21 (2). Pp. 243–256.

10. Fraser C. G. J. L. Lagrange's early contributions to the principles and methods of mechanics // *Arch. Hist. Exact Sci.* 1983. 28 (3). Pp. 197–241.

11. Kosmodemyansky A.A. Leonard Ejler i ego raboty po mekhanike [Leonhard Euler and his work on mechanics]. *Trudy Krasnoznamennoj Ordena Lenina Voenno-Vozdushnoj Akademii imeni professora N.E. Zhukovskogo* [Proceedings of the Red Banner Order of Lenin of the Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky]. 1959. № 709. Pp. 3–22.

12. Pogrebyssky I.B. *K istorii mekhaniki XVIII stoletiya. Ejler kak mekhanik. Seriya «Iz istorii mirovoj kul'tury». Mekhanika i fizika XVIII v.* [To the history of mechanics of the 18th century. Euler as a mechanic. Series "From the history of world culture". Mechanics and physics of the XVIII century]. M.: Science. 1976. Pp. 1–38.

13. Zolotarev O.I. Ob uchenyh trudah akademika O.I. Somova [On the scientific works of academician O.I. Somov]. *Polnoe sobranie sochinenij Egora Ivanovicha Zolotareva* [Complete Works of Yegor Ivanovich Zolotarev]. L.: AN SSSR. 1932. Vol. 2. Pp. 60–71.

14. Somo J. Solution rigoureuse du probleme de la rotation autour d'un point fxe d'un corps solide pesant, lorsque ce corps a deux moments d'inertie principaux egaux // *Bulletin de la Classe physico-math´ematique de l'Acad´emie imp´eriale des sciences de Saint-P´etersbourg*. Saint-P´etersbourg: W. Grae. 1855. XIV. Pp. 115–136.

15. Klein F. *Matematicheskaya teoriya volchka* [Mathematical theory of the top]. Moscow-Izhevsk: Institute for Computer Research, 2003. 70 p.

16. Yulina. A.O., Sinkevich G.I. K istorii zadachi o vrashchenii tverdogo tela okolo nepodvizhnoj tochki v sluchae pervonachal'nogo udara [On the history of the problem of rotation of a rigid body around a fixed point in the case of an initial impact]. *Istoriya nauki i tekhniki* [History of science and technology]. 2021. № 12. Pp. 3–8.

17. Yulina A.O. Istoriya razvitiya teorii ellipticheskih funkcij v rabotah Abelya, YAkobi, Vejershtrassa, Somova [The history of the development of the theory of elliptic functions in the works of Abel, Jacobi, Weierstrass, Somov]. *Tavricheskij vestnik informatiki i matematiki* [Tauride Bulletin of Informatics and Mathematics]. 2021. № 3. Pp. 79–92.

18. Somov O.I. *Osnovaniya teorii ellipticheskih funkcij* [Foundations of the theory of elliptic functions]. St. Petersburg: AN. 1850. 250 p.

Информация об авторе

Юлина Анна Олеговна, старший преподаватель кафедры строительной механики
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ)
190005, Санкт-Петербург, Российская Федерация, ул. 2-я Красноармейская, д. 4

Information about author

Yulina Anna Olegovna, Senior Lecturer of Department of Structural Mechanics
St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
190005, Saint-Petersburg, Russian Federation, st. 2nd Krasnoarmeyskaya, 4