Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
Архитектурно-строительный университет
Общестроительный факультет
Кафедра математики

Синкевич Г.И.

Финансовая математика

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2013

УДК: 336.001.573(075.8).

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор Белопольская Я. И. (СПбГАСУ), кандидат физ.-мат. наук, доцент Графеева Н. Г. (СПбГУ).

Финансовая математика: учебное пособие / Г.И. Синкевич; СПбГАСУ. – СПб, 2013. – с.

В пособии дано повествовательное и систематизированное изложение проверенных практикой методов количественного анализа финансовых и кредитных операций. Подробно обсуждаются различные методы начисления процентов, обобщающие характеристики потоков платежей, методики определения эффективности финансовых инструментов и производственных инвестиций.

Пособие предназначено для специальности Прикладная математика – бакалавры. 2 часа в неделю, 2 курс, 1 семестр, 34 часа.

Библиография: 8 назв., приложение: 13 таблиц.

© Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2014

Используемые обозначения и сокращения.

FV – future value – будущая (наращенная) сумма
PV – present value – текущая (первоначальная) сумма
n – количество периодов начисления
i – ставка процентов
J – процентный доход (платёж)
PT – payment, погасительный платёж.

Глава I. Основные понятия и определения, используемые в финансовых вычислениях

В любых финансово-экономических расчётах денежные потоки или суммы денег связаны с конкретными интервалами времени. Поэтому в финансовых сделках (договорах, контрактах) обязательно даются фиксированные сроки, даты, периодичность выплат или поступлений денежных средств. В финансовых вычислениях фактор времени учитывается с помощью применения процентной ставки, учитывающей интенсивность начисления процентов (процентных денег).

Процентная ставка – это отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за строго фиксированный отрезок времени, к величине кредита, ссуды и прочее. Интервал времени, к которому приурочена процентная ставка, называется **периодом начисления** (накопления).

Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока действия кредита, ссуды. Такого рода проценты называются простыми процентными ставками. В этом случае распределение суммы накопления описывается равномерным линейным законом распределения, представляющим сумму арифметической прогрессии.

$$FV = PV(1+ni) \quad (1.1),$$

или $FV = PV + J$,

где FV – наращенная сумма,

PV – текущая (первоначальная сумма),

n – количество периодов начислений,

i – ставка процентов,

I – процентный доход (платёж).

$I = PV \cdot n \cdot i$

В некоторых случаях финансово-кредитных отношений возможно применение дискретно изменяющихся во времени процентных ставок. Например, ставка простого процента в первый год равна 10%, во второй год 15%, в третий год 20% и так далее. В этом случае наращенная сумма FV вычисляется так:

$$FV = RV\left(1 + \sum\left(n_t \cdot i_t\right)\right), \qquad (1.2)$$

где i_t – ставка простых процентов в периоде *t*,

n_t – продолжительность периодов начисления ставки i_t.

Когда периоды начисления (например, по годам) равны, то формула наращения по простым процентам имеет вид:

$$FV = PV \cdot \left(1 + n \cdot i\right)^N, \qquad (1.3)$$

где N – общее число операций реинвестирования.

В отечественной практике, как правило не делают различий между понятиями ссудного (кредитного) процента и учётной ставки. Обычно применяется собирательный термин – процентная ставка. В то же время термин «учётная ставка» встречается применительно к ставке рефинансирования Центрального банка Российской Федерации, а также к вексельным операциям.

Заметим, что начисление процентов в большинстве случаев осуществляется в конце каждого периода (интервала) начисления. Такой способ определения и начисления процентов носит название **декурсивный** (postnumerando). Иногда в соответствии с заключёнными договорами применяется **антисипативный** способ (предварительный, prenumerando), когда проценты начисляются в начале каждого периода начисления.

В финансовых расчётах чаще всего приходится определять наращенную сумму FV по заданной (первоначальной) величине текущей стоимости ссуды (кредита) *PV*, или определять текущую (полученную) сумму PV по заданной наращенной сумме *FV*. Первый тип задач называется **компаундингом** (процессом накопления), второй тип задач – **дисконтированием**. Разница величин текущей стоимости PV и наращенной суммы *FV* называется дисконтом *D*:

$$D = FV = PV \ . \qquad (1.4)$$

Дисконтирование – одно из важнейших понятий и приёмов в количественном анализе финансово-кредитных операций.

Проблему дисконтирования можно сформулировать следующим образом: какую первоначальную сумму надо выдать кредитополучателю (в долг), чтобы при начислении на эту сумму (*PV*) процентной ставки *i* к концу срока получить (вернуть) наращенную сумму *FV*, то есть

$$PV = \frac{FV}{1 + n_d \cdot i} \ , \qquad (1.5)$$

где n_d – число периодов оплаты (начисления) процентов, $n_d = \frac{Дн}{K}$, (1.6)

Где $Дн$ – число дней кредита (ссуды),

K – число дней в году.

В формуле (1.5) выражение $\frac{1}{1 + n_d \cdot i}$ называется **дисконтным множителем**. Дисконтный множитель показывает, какова доля *PV* в величине *FV*.

В практике финансово-кредитных отношений при применении как декурсивного, так и антисипативного способов начисления процентов используют либо простые, либо сложные проценты.

Простые проценты обычно применяют в потребительских кредитах, а погашение долга производится равными частями на протяжении всего срока кредита. В этом случае сумма погасительного платежа составляет $PT = \frac{FV}{n \cdot M}$, (1.7)

где *n* – срок кредита в годах,

M – число погасительных платежей в году.

Простые проценты могут быть **точными**, если при расчёте год берётся равным фактической его продолжительности в днях, или **обыкновенными**, когда длительность года берётся равной 360 дням. Принятое количество дней в году называется **временно́й базой.**

Сложные (кумулятивные) проценты применяются в тех случаях, когда процент по кредитам (ссудам) выплачивается не сразу, а присоединяют к сумме долга с последующим определением наращенной суммы *FV*. Такая процедура начисления «процент на процент» называется **капитализацией**. Наращение идёт по сложному

проценту в геометрической прогрессии, а процесс накопления (компаундинга) описывается формулой

$$FV = PV(1+i)^n \qquad (1.8)$$

В рыночных условиях, как правило, капитализация осуществляется по месяцам, поквартально, по полугодиям, реже по годам. В связи с этим для расчёта процентной суммы используется следующая формула: $FV = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}$, (1.9)

где i – годовая ставка, n – количество периодов начисления (срок финансовой операции), m – число периодов начисления в году.

Существует понятие **эквивалентная процентная ставка** $i_э$ – это ставка доходности, соответствующая различным способам начисления процентов, но обеспечивающая одинаковый относительный доход за одинаковый промежуток времени, то есть такой же, как и m-разовое наращение в год по ставке $\frac{i}{m}$.

Исходя из этого принципа эквивалентности ставок, имеем:

$$(1+i_э)^n = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} \qquad (1.10)$$

Отсюда $i_э = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1$. (1.11)

Задачей нашего курса является не только знакомство языком и внутренней логикой финансовой математики, но и анализ денежных потоков и исследование интенсивности процессов наращения (компаундинга) и дисконтирования по разным процентным ставкам. Вводный курс классической финансовой математики представляет собой анализ упрощённых моделей финансовых операций: все назначенные выплаты происходят в назначенный срок, финансовая операция состоит из одного или однотипных действий, то есть мы не учитываем налоги, штрафы, комиссионные; риски отсутствуют, то есть происходит только то, что назначено. В большинстве задач не учитывается инфляция. В реальности взаимодействуют многие финансовые потоки, финансовые операции могут зависеть от случайных факторов – всё это будет изложено в курсе стохастической финансовой математики.

В курсе классической финансовой математики также рассматриваются не только одноразовые платежи, а множество выплат, которые

распределены во времени. Например, выплата стипендии, оплата счетов, погашение долгосрочного кредита, осуществление взносов в различные фонды и так далее. Когда интервалы между очередными платежами постоянны, то такую последовательность называют **финансовой рентой** или **аннуитетом.**

Аннуитет – это рассредоточенный во времени поток денежных средств, поступающих регулярно и в рамках одной финансово-экономической операции.

Аннуитет как серия равновеликих платежей в течение *n* периодов называется **обычным**, если платежи осуществляются в конце каждого периода. Аннуитет называется **авансовым**, если платежи осуществляются в начале каждого периода. Аннуитет или финансовая рента характеризуется в общем случае **наращенной суммой ренты** (с учётом начисленных процентов) и **современной (текущей или приведённой) величиной ренты** – на момент начала платежей. В этих случаях на платежи начисляются сложные проценты.

Банк может начислять как простые проценты, так и сложные. В таблице 1.1 приведены сравнительные данные начисления на сумму в 1000 денежных единиц по 10% годовых в течение трёх лет. При схеме начисления простых процентов сумма вклада через три года составит 1300 денежных единиц, а по схеме сложных процентов 1331 денежных единиц.

Таблица 1.1

Сравнительная стоимость денег во времени при начислении простых и сложных процентов

Год	Вклад на начало года	Доход от вклада	Вклад на конец года	Вклад на начало года	Доход от вклада	Вклад на конец года
1-й	1000	100	1000+100=1100	1000	100	1000+100=1100
2-й	1100	100	1100+100=1200	1100	110	1100+110=1210
3-й	1200	100	1200+100=1300	1210	121	1210+121=1331
Итого			1300			1331
	$FV = PV(1+ni)$, простые проценты			$FV = PV(1+i)^n$, сложные (кумулятивные) проценты		

В отличие от простых процентов, сложные дают возможность получать доход не только от первоначальной суммы, но и от полу-

ченного ранее процента от неё. В этом процессе процент начисляется только на денежные средства, находящиеся на депозите, но не на снятые с него проценты или основную часть вклада.

Сравнительный анализ применения простых и сложных процентов по таблице 1.1 показывает, что в первом случае (простые проценты) рост вклада прямо пропорционален времени нахождения денег в банке. Во втором случае – при 10% ставке сложного процента современная денежная единица через год будет эквивалентна 1,1 денежных единиц, а через два года 1,21; через 3 года 1,33 денежных единиц. Следовательно, можно сделать и такой вывод: в настоящий момент 1 денежная единица, которая будет получена через год, стоит 0,91 денежных единиц; через два года 0,83; через три года 0,75 денежных единиц.

Таким образом, деньги имеют разную стоимость в различные периоды времени и в том случае, если они приносят доход, являются капиталом.

Нужно отметить, что существуют и такие понятия, как коммерческий (или банковский) учёт, учёт векселей, дисконтирование по учётной ставке (по простым процентам). В практике финансово-кредитных отношений простые учётные ставки применяют при учёте (покупке) векселей и других денежных обязательств – ценных бумаг. В зависимости от формы представления капитала и способа выплаты дохода ценные бумаги подразделяются на две группы: **долговые** (купонные облигации, сертификаты, векселя, имеющие фиксированную процентную ставку) и **долевые** (акции), представляющие долю держателя в реальной собственности и обеспечивающие получение дивиденда в неограниченное время. Все прочие виды ценных бумаг являются производными от долговых и долевых – это опционы, фьючерсные контракты, приватизационные чеки (ваучеры).

Во избежание ошибок и потерь в условиях инфляции (снижение покупательной способности денег) нужно учитывать механизм влияния инфляции на результат финансовых операций.

Инфляция – это процесс, характеризующийся повышением общего уровня цен в экономике за конкретный период времени t: не увеличение цены какого-то отдельного товара, услуги, а увеличение **усреднённой цены** всей номенклатуры (корзины) товаров и услуг, выбранных в качестве базы выявления инфляции.

При расчётах используют относительную величину уровня инфляции, то есть **темп инфляции** за определённый промежуток времени *t*:

$$\alpha = \frac{PV_\alpha - PV}{PV} \text{ или } \alpha = \frac{\Delta PV}{PV} \cdot 100\% \ , \qquad (1.12)$$

где α – темп инфляции;

PV_α – сумма, отображающая фактическую покупательную способность (фактическую стоимость товара через период времени *t*);

PV – первоначальная сумма при отсутствии инфляции;

$\Delta PV = PV_\alpha - PV$ – сумма инфляционных денег.

Уровень инфляции может быть выражен и в процентах. Сумма денег PV_α с учётом инфляции определяется с учётом формулы 1.12 так: $PV_\alpha = PV + \Delta PV = PV + PV \cdot \alpha = PV(1+\alpha)$

$$PV_\alpha = PV \cdot Ind \ , \qquad (1.13)$$

Где $Ind = (1+\alpha)$ – **индекс инфляции**, показывающий, во сколько раз сумма PV_α больше суммы PV, или во сколько раз в среднем выросли цены.

Нужно помнить, что инфляционный рост суммы при годовом уровне инфляции α – это тот же самый процесс, что и наращение суммы по сложной годовой ставке процента. В свзи с тем, что каждая денежная единица обесценивается вследствие инфляции, в дальнейшем обесцениваются уже обесцененные деньги, то есть инфляционный процесс имеет ту же природу, что и процесс наращения по схеме сложных процентов:

$$FV_\alpha = PV(1+i)(1+\alpha) \qquad (1.14)$$

Или $FV_\alpha = PV(1+i_\alpha)$, (1.15)

где i_α – ставка процента (например, ссудного процента), учитывающего инфляцию.

Исходя из принципа эквивалентности ставок, запишем:

$$(1+i_\alpha) = (1+i) \cdot (1+\alpha) \qquad (1.16)$$

Из этого уравнения следует

$$i_\alpha = i + \alpha + i\alpha \qquad (1.17)$$

Это уравнение может быть записано так:

$$i_\alpha = i + (\alpha + i\alpha) = i + \alpha(1+i), \qquad (1.18)$$

Где $\alpha + i\alpha$ – сумма, которую необходимо прибавить к реальной годовой ставке доходности для компенсации инфляционных потерь.

В финансовых вычислениях формула 1.18 известна под названием *формула Фишера*. Величину $\alpha + i\alpha$ называют **инфляционной премией.**

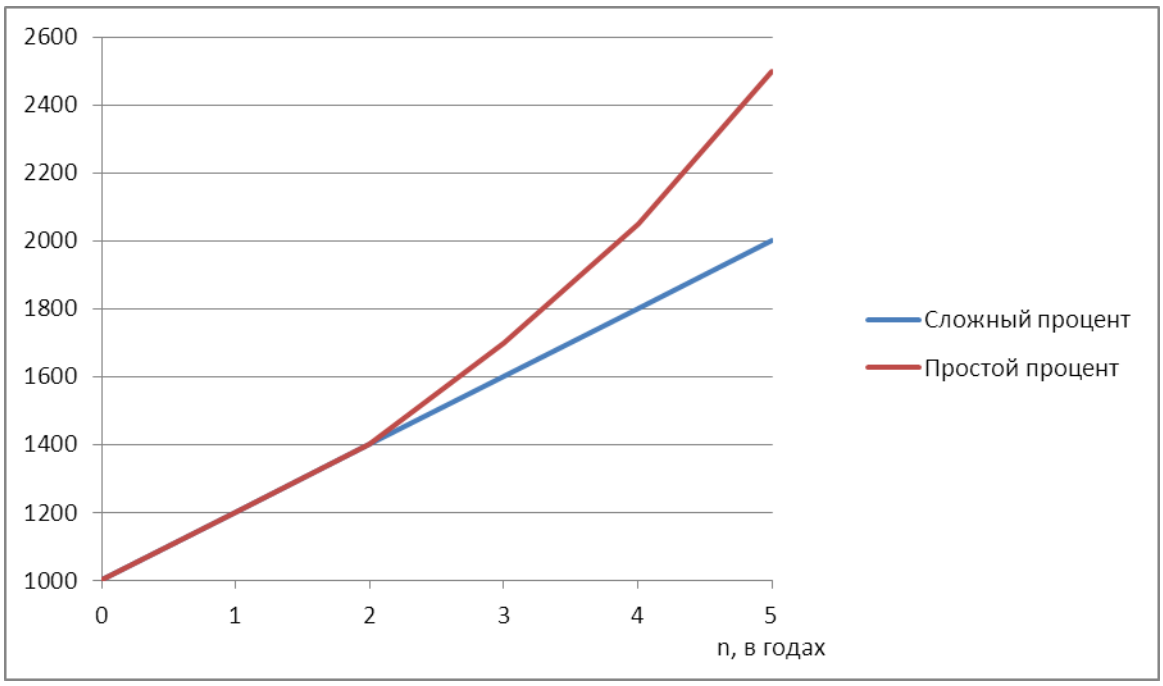
Далее перейдём к детальному рассмотрению основных положений финансовых вычислений и к решению конкретных задач, встречающихся в практике финансово-кредитных расчётов.

Контрольные вопросы по теме «Простые проценты»

1. Что такое процентная ставка? Период начисления?
2. Определите законы накопления по простым процентам и по сложным процентам.
3. Дайте определения процесса компаундинга (накопления) и дисконтирования.
4. В чём разница межу декурсивным (постнумерандо) и антисипативным (пренумерандо) способов начисления процентов?
5. В чём заключается разница между точными и обыкновенными процентами?
6. Укажите принцип эквивалентности ставок.
7. Определите аннуитет и его виды.
8. Дайте сравнительную характеристику простых и сложных процентов.
9. Раскройте сущность учётных ставок.
10. Укажите виды ценных бумаг.
11. Что такое уровень инфляции? Индекс инфляции?
12. Приведите формулу Фишера – формулу расчёта инфляционной премии.

Глава 2. Простые проценты и их применение в финансово-экономических расчётах

В любых финансовых расчётах, как по простым, так и по сложным процентам, суммы денег всегда связаны с конкретными моментами времени. Если возникает возможность выбора между низкой ставкой сложного процента и более высокой ставкой простого процента, то нужно проанализировать и выбрать лучший для кредитора (заёмщика) вариант. Это положение иллюстрирует график, построенный по уравнениям (1.1) $FV = PV(1+ni)$ и (1.8) $FV = PV(1+i)^n$.



Верхняя линия соответствует наращению денежной массы в случае применения сложной процентной ставки (20% годовых) и имеет вид экспоненциальной кривой: чем больше число n – количество периодов, тем круче (интенсивнее) кривая уходит вверх. Нижняя линия – это наращенная сумма по простым процентам (20% годовых). Это прямая с относительно малым углом наклона.

Сущность простых процентов заключается в том, что они начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока ссуды (кредита). С учётом уравнения (1.1) наращенной суммы по простым процентам годовой доход (платёж) определится их выражения $I_{nt} = \dfrac{PV \cdot n \cdot i}{100}$, (2.1)

где I_{nt} – начисляемый процентный доход (платёж);

n – число платежей в годах;

i – годовая процентная ставка в процентах.

Если период кредитования (инвестирования) и процесс обслуживания установлен в месяцах, тогда одномесячный доход (процентный платёж) определится из выражения

$$I_{ntm} = \frac{PV \cdot i}{100 \cdot 12};\ I_{ntm} = \frac{PV \cdot i}{100m}\ , \qquad (2.2)$$

где m – время (период) платежей в месяцах.

Задача 2.1. Банк выдал на 2 года кредит в размере 1 млн рублей по простой ставке 10% годовых. Найти погашаемую сумму, то есть будущую (наращенную) сумму.

PV = 1 млн рублей, i = 10%=0,1; n = 2 года; FV – ?

По формуле простых процентов находим:

$$FV = PV \cdot (1 + ni) = 1\,млн\ руб\,(1 + 2 \cdot 0{,}1) = 1{,}2\,млн\ руб.$$

То есть погашаемая сумма равна 1,2 млн рублей.

Задача 2.2. Кредит 5 млн рублей выдаётся банком на полгода по простой ставке 20% годовых. Определить наращенную сумму.

PV = 5 млн рублей; i = 20% ; n = 0,5 года; FV – ?

$$FV = PV \cdot (1 + ni) = 5\,млн\ руб\,(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2) = 5{,}5\,млн\ рублей.$$

Заёмщик через полгода должен выплатить 5,5 млн рублей (наращенная сумма).

Отметим, что в практике проведения финансовых расчётов дата выдачи и дата погашения ссуды всегда считается за один день. При этом, как правило, используется один из двух вариантов.

Точный процент получают, когда за временную базу берут фактическое количество дней в году (365 или 366) и точное число дней ссуды $N = \frac{D}{K}$, (2.3)

где N – продолжительность начисления в годах,

D – продолжительность периода начисления в днях,

K – продолжительность года в днях.

Точное число дней ссуды D определяется по специальной таблице, где показаны порядковые номера каждого дня года. Из номера, соответствующего дню окончания займа (ссуды) вычитают номер первого дня.

Обыкновенный процент получают, когда применяется приблизительное число дней ссуды: продолжительность полного месяца принимается равной 30 дням, продолжительность года принимается равной 360 дням. Наращенная сумма FV в этих случаях определяется из выражения $FV = PV \cdot \left(1 + \frac{D}{K} i\right)$ (2.4)

Задача 2.3. Банком выдана сумма 8 тысяч денежных единиц в кредит со 2 марта до 11 декабря 2012 года под 25%. Определить размер наращенной суммы для двух основных вариантов начисления простых ссудных процентов – обыкновенного и точного.

PV = 8 тысяч денежных единиц, D = 284 дня, i = 25%, K – число дней в году, для точного процента K = 366, для обыкновенного процента K = 360, FV – ?

Наращенная сумма равна

а) в случае начисления точных процентов, K = 366

$$FV = 8000 \cdot \left(1 + \left(\frac{284}{366}\right) \cdot 0{,}25\right) = 9551{,}9$$

б) в случае начисления обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды K= 360

$$FV = 8000 \cdot \left(1 + \frac{284}{360} \cdot 0{,}25\right) = 9577{,}8$$

В) иногда используется комбинированный метод начисления обыкновенных процентов с приближённым числом дней ссуды D = 280.

$$FV = 8000\left(1 + \frac{280}{360} \cdot 0{,}25\right) = 9555{,}6.$$

Анализ полученных данных показывает, что для банка выгоднее применить вариант обыкновенных процентов, где FV= 9577,8 денежных единиц, а для заёмщика выгоднее вариант точных процентов.

Задача 2.4. Величина кредита с процентами составляет 20 тысяч рублей. Кредит выдан под простую ставку 20% годовых на 250 дней. Рассчитать текущую сумму, получаемую заёмщиком при заключении сделки, и сумму процентных денег. K = 365 дней.

Из уравнения (2.4) находим

$$PV = \frac{FV}{1 + \frac{D}{K} i} = \frac{20000}{1 + \frac{250}{365} \cdot 0{,}2} = 17590.$$

Будущая наращенная сумма FV состоит из первоначальной (текущей) денежной суммы и общей суммы I процентных денег за весь период начисления, то есть

$$FV = PV + I \qquad (2.5)$$

Для данной задачи общая сумма процентных денег

$I = FV - PV = 20000 - 17590 = 2410$ – это и есть доход банка – сумма процентных денег.

Задача 2.5. Определить простую ставку процента, при которой первоначальная сумма (капитал) в размере 6 тысяч рублей достигает 7 тысяч рублей через 90 дней. За временную базу принять 365 дней.

FV = 7 тысяч рублей, PV = 6 тысяч рублей, D = 90 дней, K = 365 дней, i – ?

$(2.4) \Rightarrow i = \frac{(FV - PV) \cdot K}{PV \cdot D} = \frac{(7-6) \cdot 365}{(6 \cdot 90)} = 0{,}6759$, то есть процентная ставка будет равна 67,59%.

Задача 2.6. Найти длительность (период) начисления, за который первоначальный капитал в размере 4 тысяч рублей вырастет до 6 тысяч рублей, если использовать простую ставку 8% годовых.

PV = 4 тысячи рублей, *FV* = 6 тысяч рублей, i = 8% = 0,08; n – ?

$n = \frac{FV - PV}{PV \cdot i} = \frac{6-4}{4 \cdot 0{,}08} = 6{,}25$, то есть интервал накопления составит 6, 25 года.

Задача 2.7. Коммерческий банк выдал ссуду в размере 100 тысяч рублей с 12 марта по 25 декабря 2012 года по ставке 10% годовых. Определить размер погашаемой суммы *FV* с различными вариантами временной базы при точном и приближённом числе дней ссуды. Проанализировать полученные результаты с точки зрения выгоды банка и выгоды заёмщика.

Определим точное число дней ссуды с 12.03.2012 по 25.12.2012:

$D_{точное} = 20 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 25 - 1 = 288$ дней.

Найдём приближённое число дней ссуды:

$D_{приближ} = 20 + 8 \cdot 30 + 25 - 1 = 284$ дня.

Варианты расчётов FV:

Рассчитаем точные проценты для точного числа дней ссуды и найдём наращенную сумму FV.

$$FV = PV\left(1 + \frac{D_{точное}}{K_1} i\right), \qquad (2.6)$$

где K_1 – временная база – фактическое количество дней в году, равное 366 дням, тогда $FV = 100\,000\left(1 + \frac{288}{366} \cdot 0{,}1\right) = 107\,868{,}85$ рублей.

Рассчитаем обыкновенные проценты для точного числа дней ссуды (банковское правило, то есть $\frac{actual}{360}$) и найдём второй вариант накопления *FV*.

$$FV = PV\left(1 + \frac{D_{точное}}{K_2} i\right) \qquad (2.7)$$

где K_2 – временная база – приближённое число дней в году (коммерческий год), равная 360 дням.

$$FV = 100\,000\left(1+\frac{288}{360}\cdot 0{,}1\right) = 108\,000 \text{ рублей.}$$

Рассчитаем размер погашаемой (наращенной) суммы в случае применения обыкновенных процентов и приближённого числа дней ссуды, то есть при $D_{приближ} = 284$ дня и $K = 360$.

$$FV_3 = 100\,000\left(1+\frac{284}{360}\cdot 0{,}1\right) = 107\,888{,}89 \text{ рублей.}$$

Рассчитаем размер погашаемой (наращенной) суммы FV_4 для случая применения точных процентов (точного числа дней в году) и приближённого числа дней ссуды, то есть при $D_{приближ} = 284$, $K_{точное} = 366$.

$$FV_4 = 100\,000\left(1+\frac{284}{366}\cdot 0{,}1\right) = 107\,759{,}56 \text{ рублей.}$$

Анализ полученных данных показывает следующее:

С точки зрения коммерческого банка предпочтительным является второй вариант погашения ссуды (банковское правило) $FV_2 = 108000$.

С точки зрения кредитополучателя (заёмщика) наиболее выгоден четвёртый вариант – с точными процентами и приближённым числом дней ссуды. Здесь заёмщик возвращает наименьшую сумму 107759,56 рублей.

Задача 2.8. Банк в соответствии с заключённым договором выдал кредит 500 тысяч рублей на 2 года. В договоре отмечено, что заёмщик (кредитополучатель) возвращает через 2 года 700000 рублей. Рассчитать величину процентной ставки.

$FV = 700000$, $PV = 500000$, $n = 2$, i – ?

Из формулы (1.1) получим

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{700000 - 500000}{500000 \cdot 2} = 0{,}2 = 20\%$$

Из уравнения (1.1) можно определить и первоначальную сумму долга при известных значениях погашаемой суммы FV, срока долга n, ставки процента i, то есть

$$PV = FV \cdot \frac{1}{1+ni} \quad \text{или} \quad PV = FV \cdot \frac{1}{1+\frac{D}{K}i} \qquad (2.8)$$

Эта операция пересчёта текущей суммы по известной погашаемой сумме называется **дисконтированием по простой ставке процента.**

Задача 2.9. Предпринимателю предлагают взять в банке кредит под 20% годовых на 100 дней в размере возвращаемой суммы 500000 рублей. Рассчитать сумму, которую получит предприниматель в банке при временной базе 360 дней (обыкновенный процент). Рассчитать выгоду банка.

FV = 500000 рублей, i = 20% = 0,2 годовых, D = 100 дней, K = 360 дней, PV – ?

Дисконтируем по формуле (2.8)

$PV = FV\dfrac{1}{1+\dfrac{D}{K}i} = 500000\dfrac{1}{1+\dfrac{100}{360}\cdot 0{,}2} = 473684{,}21$, то есть предприниматель получит в банке 473684,21, а возвратит в банк через 100 дней 500000 рублей. Сумма процентных денег, полученная банком, будет $I = FV - PV = 500000 - 473684{,}21 = 26315{,}79$ рублей – доход банка.

В практике финансовых вычислений нередки случаи, когда ставки процента на разных интервалах начисления колеблются в течение всего срока долга. Если на последовательных интервалах начисления $n_1, n_2, ..., n_t$ используются разные ставки простых процентов, то сумма процентных денег в конце первого интервала, то есть при декурсивном способе начисления составит $I_1 = PV \cdot n_1 \cdot i_1$, в конце второго интервала $I_2 = PV \cdot n_2 \cdot i_2$ и так далее. При N интервалах начисления наращенная сумма FV составит

$$FV = PV\left(1 + \sum_{t=1}^{N} n_t \cdot i_t\right), \qquad (2.9)$$

где N – количество интервалов начисления процентов,

n_t – длительность t-го интервала начисления,

i_t – ставка процентов на t-м интервале начислений.

Задача 2.10. Коммерческий банк принимает вклады по простой ставке процента, которая в первый год составляет 10%, а каждый последующий год увеличивается на 10%. Рассчитать наращенный размер первоначального вклада 50 тысяч рублей через 4 года.

N = 4 года, $n_1 = n_2 = n_3 = n_3 = n_4 = 1$, $i_1 = 10\% = 0{,}1$, $i_2 = 20\% = 0{,}2$, $i_3 = 30\% = 0{,}3$, $i_4 = 40\% = 0{,}4$; PV=50000 , FV – ?

В данном случае имеем процесс накопления (компаундинга) с разными ставками процента по годам. Используя формулу (2.9), найдём FV:

$FV = 50000(1+0{,}1\cdot 1+0{,}2\cdot 1+0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 1)=100000$, то есть через 4 года в банке можно накопить сумму 100000 рублей при начальном взносе 50000 рублей.

Задача 2.11. Кредит в размере 40000 рублей можно получить в банке на 3 года. Ставка процента за первый год 20%, за каждый последующий год она увеличивается на 5%. Определить наращенную сумму.

PV = 40000 рублей, N = 3 года, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $i_1 = 20\% = 0{,}2$; $i_2 = 25\% = 0{,}25$; $i_3 = 30\% = 0{,}3$; $FV - ?$

По формуле (2.9) получим:
$FV = PV(1+i_1+i_2+i_3) = 40000(1+0{,}2+0{,}25+0{,}3) = 70000$ рублей. Здесь множитель наращения $(1+i_1+i_2+i_3)=1{,}75$.

Задача 2.12. Определить срок ссуды в годах. За это время долг 10 тысяч рублей возрастёт до 175 тысяч рублей при использовании простой ставки 10% годовых.

PV = 100000, FV = 175000, i = 10% = 0,1; $n - ?$

Из формулы (1.1) $FV = PV(1+ni)$ получим:

$$n = \frac{FV - PV}{PV \cdot i} = \frac{175000 - 100000}{100000 \cdot 0{,}1} = 7{,}5 \text{ года.}$$

В некоторых случаях при начислении простых процентов учитывается *инфляция*. Как говорилось ранее, инфляцию характеризуют её уровнем и индексом. *Уровень инфляции* показывает, на сколько процентов вырастут цены на некоторый период, а *индекс* – во сколько раз они вырастут. Учитывая (1.15) и формулу Фишера (1.18), можно найти погашаемую сумму с учётом инфляции:

$$FV_\alpha = PV(1+i_\alpha \cdot n) \text{ или } FV_\alpha = PV\left(1+\frac{D}{K}\cdot i_\alpha\right), \qquad (2.10)$$

где i_α – ставка процента, учитывающая инфляцию.

Задача 2.13. Ссуда 500 тысяч рублей выдана на 300 дней. Ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 5%. Найти простую ставку процента при выдаче ссуды и погашаемую сумму, если реальная доходность этой операции составляет 15% годовых при временной базе 365 дней (точные проценты).

$\alpha = 5\% = 0{,}05$ – годовой уровень инфляции, *PV*= 500000 рублей, *K* = 365 дней, $i = 15\% = 0{,}15$годовых, *D* = 300, $i_\alpha - ?$ $FV_\alpha - ?$

$i_\alpha = i + (\alpha + i \cdot \alpha) = 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}15 \cdot 0{,}05 = 0{,}2075$, то есть ставка, учитывающая инфляцию, будет равна 20,75%.

$FV_\alpha = PV\left(1 + \frac{D}{K} \cdot i_\alpha\right) = 500000\left(1 + \frac{300}{365} \cdot 0{,}2075\right) = 585273{,}97$, то есть возвращаемая сумма (долг) с учётом5% годовой инфляции составит 585273,97 рублей.

При использовании *простых учётных ставок* сумма процентных денег от предоставления в долг определяется исходя из суммы, которая должна быть возвращена, то есть при выдаче ссуды *по учётной ставке* считается сумма, которая должна быть возвращена. В таком случае проценты начисляются в начале каждого интервала начисления. Заёмщик получает эту сумму за вычетом процентных денег (антисипативный способ начисления процентов), то есть сумма процентных денег вычитается из наращенной (возвращаемой) суммы. Такого рода операции называются **дисконтированием по учётной ставке**, а также **коммерческим (банковским) учётом**. Величина *PV* при этом называется **приведённым значением**:

$PV = FV(1 - ni)$, а коэффициент $(1 - ni)$ называется **коэффициентом приведения**. Эта ситуация типична для *векселя*.

Таким образом, при использовании простой учётной ставки сумма, получаемая заёмщиком, определяется по формуле

$$PV = FV(1 - ni) \text{ или } PV = FV\left(1 - \frac{D}{K} \cdot i\right), \qquad (2.11)$$

где *n* – срок ссуды в годах, i – годовая учётная ставка, *FV* – возвращаемая сумма, *PV* – первоначальная сумма, получаемая заёмщиком, *D* – срок ссуды в днях, *K* – временная база.

Задача 2.14. Банк выдаёт ссуду на квартал, заёмщик обязуется возвратить 100 тысяч рублей. Определить сумму, выдаваемую банком (получаемую заёмщиком) и величину дисконта, удерживаемого банком при ставке 10% годовых.

FV = 100000 рублей, *n* = 0,25 года (1 квартал), *i* = 10% = 0,1; *PV* – ? *Dc* (Discount) – ?

Определим сумму *PV*, полученную заёмщиком, по формуле (2.11):

$$PV = FV(1 - ni) = 100000(1 - 0{,}25 \cdot 0{,}1) = 97500.$$

Сумма дисконта *Dc* будет равна

$$Dc = FV - PV = 100000 - 97500 = 2500 \text{ рублей.}$$

Задача 2.15. Найти сумму, полученную кредитополучателем, и размер дисконта, полученного банком, если по договору нужно возвратить 100 тысяч рублей через 100 дней при учётной ставке банка 10% годовых и временной базе 360 дней (обыкновенные проценты).

FV = 100000 рублей, *D* = 100 дней, *i* = 10% = 0,1; *K* = 360 дней; *PV* – ? *Dc* – ?

Здесь $PV = FV\left(1 - \frac{D}{K} \cdot i\right) = 100000\left(1 - \frac{100}{360} \cdot 0{,}1\right) = 97222{,}22$ рубля,

$$Dc = 100000 - 97222{,}22 = 2777{,}78 \text{ рубля.}$$

Простые учётные ставки применяются также при покупке (учёте) банками *векселей* и других денежных обязательств. В этом случае банк до наступления сроков платежа по векселю покупает его у владельца по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, то есть банк учитывает (покупает) **вексель с дисконтом**. Сумма, выдаваемая владельцу учитываемого векселя, определяется по формуле

$$PV = FV(1 - \Delta n \cdot i) \text{ или } PV = FV\left(1 - \frac{\Delta D}{K} \cdot i\right), \qquad (2.12)$$

где $\Delta n = \frac{\Delta D}{K}$ – срок от даты учёта до даты погашения векселя, ΔD – число дней от даты учёта до даты погашения векселя.

Задача 2.16. Имеется вексель на сумму 10000 рублей со сроком оплаты 21 июня 2012 года. Владелец этого векселя продал (учёл) его в коммерческом банке 5 июля по учётной ставке 20%. Найти доход банка (дисконт) от учёта векселя и сумму, полученную владельцем по векселю. Временная база 365 дней, точные проценты.

FV = 10000 рублей, $\Delta D = 21 - 5 = 16$ дней – число дней от даты учёта до даты погашения; *K* = 365 дней, *i* = 20% = 0,2; *Dc* – ? *PV* – ?

По формуле (2.12) $PV = 10000\left(1 - \frac{16}{365} \cdot 0{,}2\right) = 9912{,}33$ рубля. Эту сумму получит владелец векселя после его учёта в банке. Определим величину дисконта: $Dc = FV - PV = 10000 - 9912{,}33 = 87{,}67$, то есть доход банка составит 87,67 рубля.

Задача 2.17. Владелец векселя номинала 100000 рублей и сроком погашения 5 месяцев, спустя 2 месяца с момента его получения, нуждаясь в деньгах, продаёт его банку. Банк выкупает (учитывает) вексель, но не за полную стоимость, а за 94000 рублей. Определить дисконт и учётную ставку этой операции.

Нетрудно видеть, что дисконт *Dc* = 100000 – 94000 = 6000 рублей. Учётная ставка за период 5 – 2 = 3 месяца определится из соотношения $\frac{3}{12} \cdot i = \frac{6000}{100000}$ и равна 24%.

Задача 2.18. Банк выдаёт ссуды по учётной ставке 10% годовых. Найти срок ссуды в годах, если получатель хочет взять в банке 100 тысяч рублей, а погашаемая сумма должна составить 120 тысяч рублей.

FV = 120000 рублей, *PV* = 100000 рублей, *i* = 10% = 0,1.

Находим срок ссуды по формуле (2.13)

$$n = \frac{FV - PV}{FV \cdot i} = \frac{120000 - 100000}{120000 \cdot 0{,}1} = 1{,}66 \text{ года.}$$

Задача 2.19. Рассчитать простую учётную ставку, которая обеспечивает сумму 8000 рублей, если сумма 6000 рублей выдаётся на 6 месяцев (0,5 года).

$$\text{Из } i = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} = \frac{FV - PV}{FV \cdot D} \cdot K = \frac{8000 - 6000}{8000 \cdot 0{,}5} = 0{,}5,$$

то есть учётная ставка равна 50%.

При операциях с *облигациями* источником дохода являются фиксированные проценты (в случае купонных облигаций), а также разность между ценой, по которой облигация приобретается, и ценой, по которой она выпускается. Выкупная цена облигации обычно совпадает с её номиналом.

При расчётах дохода используют понятие **курса облигации** P_k:

$$P_k = \frac{P_n}{C} \cdot 100\% \ , \qquad (2.14)$$

где P_n – цена покупки облигации,

C – номинальная стоимость облигации.

Для определения и сравнения доходности различных финансовых операций обычно используют ставки простых процентов (реже сложных процентов), называя их при этом **эффективными ставками процентов**.

Эффективная ставка простых процентов $i_э$ может быть определена по формуле $i_э = \frac{W \cdot K}{P \cdot D} = \frac{W}{n \cdot P}$, (2.15)

где W – доходность (доход) от инвестирования суммы P; P – инвестированная (текущая) сумма, D – срок финансовой операции в днях, K – временная база (количество дней в году), n – интервал инвестирования в годах.

Задача 2.20. Сбербанк РФ продаёт ценные бумаги без выплаты процентов номиналом 5 тысяч рублей по цене 4800 рублей. Рассчитать общий доход от покупки 20 облигаций со сроком погашения 0,5 года и доходность покупки по эффективным ставкам простых процентов.

Определим доход от покупки одной облигации:

$W_1 = 5000 - 4800 = 200$ рублей.

Найдём доход от покупки 20 облигаций:

$W = 20 \cdot 200 = 4000$ рублей.

Стоимость покупки 20 облигаций будет равна

$P_k = 4800 \cdot 20 = 96000$ рублей.

Доходность покупки по эффективной ставке простых процентов составит $i_э = \frac{4000}{96000 \cdot 0{,}5} = 0{,}0833$, то есть доходность от покупки облигаций составит 8,33%.

Как видно, доходность операций купли-продажи финансовых инструментов (векселей, депозитных сертификатов и так далее) также может быть измерена в виде эффективной ставки простых процентов и определена разностью цен купли-продажи.

В свою очередь, эти цены будут определяться сроками от моментов покупки и продажи финансового инструмента до момента его погашения, а также уровнем процентных ставок при покупке и продаже.

В случае, когда на финансовый инструмент проценты не начисляются, цена его покупки P_n будет равна

$$P_n = N_{об}\left(1 - \frac{Дн}{K} \cdot i_d\right), \quad (2.16)$$

где $N_{об}$ – сумма обязательств по финансовому инструменту, $Дн$ – срок в днях от момента покупки до момента погашения, K –

временная база (обычно принимается 360 дней), i_d – учётная ставка при покупке.

Цена продажи P_z финансового инструмента будет равна

$$P_z = N_{об}\left(1 - \frac{Dn}{K} \cdot i_d^n\right), \qquad (2.17)$$

где Dn – срок в днях от момента продажи до момента погашения, i_d^n – учётная ставка при продаже.

Доход от такой операции составит $W = P_z - P_n$ (2.18)

Доходность операции купли-продажи в виде эффективной ставки простых процентов будет определяться формулой

$$i_э = \frac{P_z - P_n}{P_n} \cdot \frac{K}{Дн - Dn} \qquad (2.19)$$

Задача 2.21. Предприниматель купил вексель на сумму 10 тысяч рублей за 200 дней до его погашения по учётной ставке 6% и продал его через 50 дней по учётной ставке 5%. Рассчитать доход, полученный от операции, и её доходность в виде эффективной ставки простых процентов. Принять временную базу K = 360 дней.

$Дн$ – срок в днях от момента покупки до момента погашения, $Дн$ = 200 дней.

i_d – учётная ставка при покупке, i_d = 0,06.

Dn – срок в днях от момента продажи до момента погашения, Dn = 200 – 50 =150 дней.

i_d^n – учётная ставка при продаже, i_d^n =0,05.

По формуле (2.16) определим цену покупки векселя

$$P_n = 10000\left(1 - \frac{200}{360} \cdot 0{,}6\right) = 9666{,}67 \text{ рублей.}$$

Найдём цену продажи векселя по формуле (2.17)

$$P_z = 10000\left(1 - \frac{150}{360} \cdot 0{,}05\right) = 9791{,}67 \text{ рублей.}$$

Доход от операции купли-продажи составит

$$W = P_z - P_n = 9791{,}67 - 9666{,}67 = 125 \text{ рублей.}$$

Определим доходность этой операции в виде эффективной ставки простых процентов по формуле (2.19)

$$i_э = \frac{P_z - P_n}{P_n} \cdot \frac{K}{Дн - Dn} = \frac{9791{,}67 - 9666{,}67}{9666{,}67} \cdot \frac{360}{50} = 0{,}0931 = 9{,}31\%$$

В практической деятельности банков на некоторые финансовые инструменты (например, депозитные сертификаты) начисляются простые проценты. Цена Q, по которой они будут погашаться, определится по формуле $Q=C(1+ni)$
(2.20), где C – номинал финансового инструмента, n – срок погашения в годах, i – ставка начисления простых процентов.

Контрольные задания.

Что такое процентный доход при начислении простых процентов?

Дайте определение наращенной суммы простых процентов.

Укажите виды временных баз.

Дайте определение дисконтирования по ставке простых процентов.

Как характеризуется изменение (колебание) процентных ставок по срокам долга?

Дайте определение ставок, учитывающих инфляцию.

Какие особенности имеет применение простой учётной ставки в банковских операциях?

В чём состоит дисконтирование векселей?

Укажите эффективную ставку простых процентов.

В чём состоит доход и доходность купли-продажи финансовых инструментов

Решите следующие задачи:

Заёмщик берёт ссуду на квартал с обязательством возвратить 500 тысяч рублей. Определить сумму, полученную заёмщиком, и величину дисконта, удержанного банком, при учётной ставке 12% годовых.

Рассчитайте величину дисконта и сумму, полученную заёмщиком, при условии, что заёмщик должен через 186 дней вернуть 800 тысяч рублей при учётной ставке банка 15% годовых и при коммерческой продолжительности года 360 дней.

Вексель на сумму 300 тысяч рублей учтён в банке за 25 дней до срока его погашения по учётной ставке 17% годовых. Найти сумму, полученную векселедержателем, и сумму дисконта, полученного банком, при коммерческой продолжительности года 360 дней.

Банк выдаёт ссуды по учётной ставке 17% годовых. Определить срок ссуды в годах, если заёмщик хочет получить 1 тысячу рублей, а погашаемая сумма 1,2 тысячи рублей.

При учёте векселя на сумму 700 тысяч рублей, до срока оплаты которого осталось 70 дней, банк выплатил векселедержателю 680 тысяч рублей. Определить, какую учётную ставку использовал банк при условии коммерческой длительности года 360 дней.

Вексель номинальной стоимостью 300 тысяч рублей со сроком погашения 6 сентября текущего года учтён 6 июня текущего года при 12% годовых. Определить дисконтированную величину векселя.

Вексель сроком погашения 9 сентября текущего года учтён 10 апреля. Определить номинальную стоимость векселя, если процентная ставка дисконтирования 12% годовых, а должник получил 588,24 тысячи рублей.

5 марта учтены следующие векселя: первый – 300 тысяч рублей V_a 18 апреля (здесь V_a означает принтое в мировой практике обозначение даты погашения кредита), второй 500 тысяч рублей, V_a 15 мая, и третий с неизвестной суммой V_a 13 июня. Какова номинальная стоимость третьего векселя, если дисконтированная величина всех трёх векселей 1384,125? Принять годовую ставку 10%.

При учёте векселя на сумму 300 тысяч рублей за 20 дней до его погашения банк выплатил владельцу 285 тысяч рублей. Определить учётную ставку, использованную банком при временной базе 360 дней.

Фирма микрокредитования (выдача небольших кредитов, микрозаймов, на короткие сроки) выдаёт ссуды под простой процент 10% в день. Найти наращенную за год сумму при ссуде 1000 рублей.

Глава 3. Вексель. Историческая справка. Вексельное право

Вексель, возможно, самая старая ценная бумага, рождённая из потребностей в переводе денег из одного места в другое, а также в оформлении рассрочки платежа при совершении торговой сделки.

Родиной финансовой математики, равно как и страхового дела считается Италия, где с XII века существовали морские республики Генуя, Пиза, Венеция, и риски морской торговли обеспечивалась страховыми покрытиями – камбио. Это же слово означало и заёмное письмо, вексель. Генуэзские купцы давали деньги местным менялам в

обмен на письменное обязательство выплатить эту же сумму в другом месте в определённое время. Таким образом, купец мог отправиться на ярмарку без денег. На ярмарочных площадях золотых дел мастера обменивали стекавшимся со всех сторон купцам деньги на монеты их страны. При этом, как правило, валюта выдавалась не наличными, а в виде письма, содержащего в себе поручение корреспонденту менялы в месте жительства купца уплатить по предъявлению определённую сумму. Учитывая, насколько опасными в те времена были пути между городами, нетрудно понять, почему этот способ платежа очень скоро сделался излюбленным. Письма от менял, дававшие купцам право на получение денег в другом месте, представляли собой первую форму векселя. Сам же термин «вексель» в разных языках звучит как Bill of exchange (англ.), Wechsel (нем.), Letter de change (фр.), Cambium (ит.).

Первоначальные вексельные операции были связаны с переводом денег из одних городов и стран в другие. Но уже вскоре векселя стали орудием коммерческого кредита. Купцы, продавая друг другу товары в кредит, расплачивались векселями. В те времена центрами торговли были ярмарки, и потому платежи по векселям обычно приурочивались по времени к той или иной ярмарке. Так, в XII-XIV веках международное значение имели ярмарки во французском графстве Шампань, расположенном на путях между Англией и Италией, в Нюрнберге. На эти ярмарки, устраиваемые шесть раз в год, съезжались купцы со всей Европы, привозя товары из европейских и восточных стран. В определённые дни на шампаньских ярмарках между купцами совершались расчёты по векселям, получившие название **вексельных ярмарок**. В XV-XVI веках роль мировых ярмарок и центров вексельного оборота перешла к ярмаркам Лиона и Антверпена.

Считается, что вексель отличается от долговой расписки и иных долговых обязательств своей большей строгостью и формализованностью в отношении составления, обращения и взыскания. В этой связи большое значение имеет вексельное право и модель векчеля, которую устанавливает та или иная система вексельного права.

Различают женевскую (более 70 стран) и англо-американскую (более 40 стран) системы вексельного права. Россия входит в женевскую систему, являясь участником женевской вексельной конвенции 1930 года, и соответственно, на её территории действует Единообразный закон о переводном и простом векселе, точнее говоря, его пере-

вод в форме Положения о переводном и простом векселе, чьё действие подтверждено постановлением Президиума Верховного Совета РФ от 24 июля 1991 года.

В сфере обращения векселя используются простые проценты. Но практически любой финансовый документ или даже конкретная проблема из области финансовых отношений – это всегда очень ёмкие понятия, не имеющие однозначных формальных границ. Вексель имеет строго установленный перечень обязательных реквизитов, и отсутствие хотя бы одного из них лишает документ юридической силы. Более того, вексель составляется на так называемой вексельной бумаге. Правда, сейчас это не означает специальный сорт или гербовость бумаги. Должен использоваться бланк, имеющие все необходимые вексельные реквизиты.

В то же время неизбежно, что в сфере обращения векселя имеются изъяны. Для некоторых мошеннических типов векселей исторически сложились названия **дружеский** и **бронзовый векселя**, за которыми на стоит никакого денежного обеспечения или товарной сделки. В создании дружеского векселя участвуют два реальных лица, а при создании бронзового векселя хотя бы одно лицо является вымышленным. Обычно дружескими векселями встречно и на равные суммы и сроки обмениваются лица, находящиеся в доверительных и при этом затруднительных финансовых отношениях. Их цель – получить под вексель реальные деньги или использовать их для совершения платежей за товары. У бронзового векселя целью также является получение денег в банке под залог или для погашения долгов по реальным товарным сделкам или финансовым обязательствам. Такие векселя фальсифицируют вексельный оборот, провоцируют его неустойчивость и массовые неплатежи.

Глава 4. Коммерческий расчётный счёт

Операции с коммерческими счетами имеют широкое распространение в цивилизованном мире.

Расчётными или **текущими** называются счета, которые предприятия открывают в банке. На этих счетах отражается вся деятельность физического или юридического лица, связанная с изъятием или поступлением его денежных средств. Причём эта деятельность сильно регламентирована. В мировой практике принять выделять несколько фаз отношений со своим клиентом – собственником счёта.

Эти фазы характеризуют степень доверия банка к своему клиенту. Если предприниматель только открыл счёт в банке и вложил в него определённую сумму денежных средств, то он как правило, имеет возможность снимать деньги только в пределах своего счёта. Это – *первая фаза* отношений. *Вторая фаза* предусматривает разрешение банка своему клиенту несколько превысить сумму расходов по сравнению с величиной его расчётного счёта, то есть брать небольшие суммы в кредит. В *третьей фазе* банк разрешает собственнику счёта брать существенно бóльшие суммы в кредит, открывает так называемую *кредитную линию*. В *четвёртой фазе* допускается финансирование капитальных вложений, в *пятой* предусматривается погашение всех долгов из собственных средств заёмщика.

Расчётный счёт – это контракт, по которому две стороны обязуются не претендовать на свои средства, «проходящие» через этот счёт, дот его закрытия. На суммы, записываемые на этот счёт, могут начисляться проценты, но не всегда. Если проценты начисляются, то по оговоренным ставкам, постоянным или меняющимся. Если ставка одна и та же для средств клиента и банка, то говорят, что расчётный счёт имеет **взаимную ставку**. В противном случае ставка называется **дифференцированной.**

Счёт опирается на последовательность дат: дата начала или открытия счёта, дата окончания или закрытия счёта; даты операций: в эти дни совершаются изменения на счету; даты отсчёта: некоторые условные дни, начиная с которых производится начисление процентов. При каждом изменении на счету переходят от даты операции к соответствующей дате отсчёта, добавляя или вычитая некоторое число дней, называемых днями отсчёта, обычно ± 2 дня. Эти числа меняются в зависимости от вида операции (занесение или снятие денег со счёта, их перевод и так далее), типа денег (наличные, чеки), места проведения операции («на месте, в другом месте, за границей), а также от участвующего банка или финансовой организации. В любом случае дни отсчёта выбираются в пользу финансового учреждения, так как при поступлении или снятии денег существуют переходные периоды, когда они ещё не находятся под контролем управляющего банка или организации, в которой открыт счёт.

Левая сторона счёта называется **дéбетовой** (от латинского debet – он должен) в ней регистрируется состояние и движение денежных средств и запасов материальных ценностей предприятия (**активов**), наличие ценностей на начало месяца и их поступление в течение ме-

сяца. **Кре́дит** – правая сторона счёта бухгалтерского учёта, в которой записывается уменьшение объекта учёта.

Рассмотрим пример операций на расчётном счету в случае совпадающих, взаимных ставок.

Ноябрь. Ставка взаимная 7%.

Таблица 4.1

№	Дата операции	Тип операции	Дебет	Кредит	Дата отсчёта	Дни	Сумма дебет	Сумма кредит
0	01.11	Сальдо дебетовое (остаток)	2500,00		31.10	30	75000	
1	05.11	Чек выписан	2000,00		03.11	27	54000	
2	11.11	Вклад наличными		7222	12.11	18		129996
3	27.11	Чек оплачен	660,00		25.11	5	3300	
	30.11	Проценты дебетовые	0,45					
	30.11	Сальдо кредитное	2061,55					
			7222,00	7222			132300	129996

Наша таблица отличается от реального текущего счёта лишь первой колонкой и нижней строкой, а также указаниями в верхней части колонок. Будем считать, что первой колонки нет, тогда можно сказать, что изменения на счету делаются в третьей и четвёртой колонках. В данном случае за ноябрь было всего три таких изменения. Что касается нулевой строчки, то мы видим, что сумма 2500,00 находится в третьей колонке. Это означает, что предприниматель, владелец счёта, на 1 ноября был должен банку 2500. Кроме того, будем считать, что числа из третьей колонки имеют знак минус, а из четвёртой – плюс.

Правая половина таблицы относится к расчёту процентов, подготавливая всё для быстрого получения искомой суммы. В двух самых правых колонках даны произведения чисел из колонки дебета на числа из колонки дней. Нижняя строка суммирует числа в соответствующей колонке. В предпоследней строке отмечено, что **сальдо** (то есть остаток или баланс) является кредитовым. Иными словами, сумма 2061,55 принадлежит владельцу счёта. Помещена же она в третью колонку только для того, чтобы «подбить баланс», то есть сделать сумму в третьей колонке равной сумме в четвёртой.

Нам осталось разобраться в том, что проценты за ноябрь являются дебетовыми, то есть $I=-0{,}45$. Для этого достаточно алгебраическую сумму чисел последней строки (число 132300 имеет знак минус) умножить на $\frac{i}{K}$, то есть $I=-2304\cdot\frac{0{,}07}{360}=-0{,}45$. В то же время сальдо этого счёта в последний день месяца (30 дней) становится кредитовым и составляет величину 2062 = 7222 – (2500 +2000 + 660). Поэтому получаем

$$I=\left(3062\cdot 30-\left(7222\cdot 12-2000\cdot 3-660\cdot 25\right)\right)\cdot\frac{0{,}07}{360}=-0{,}45.$$

Глава 5. Форфейтная операция и арбитраж девиз

В середине XX века появилась новая финансовая операция – **форфейтная**. Её название происходит из французского языка, acheter à forfeit – купить подрядным способом, заключив договор получения кредита на заранее оговоренных условиях. Она получила особое распространение во внешней торговле, где послужила важным стимулирующим фактором развития. Эта операция даёт пример финансовой сделки, в которой участвуют более двух сторон.

При продаже какого-либо крупного объекта (комплекта оборудования, судна, предприятия, значительной партии товара) нередко возникает следующая ситуация. Покупатель (или импортёр) хочет приобрести товар в рассрочку, поскольку у него недостаточно денежных ресурсов. Продавец (или экспортёр) не может отложить получение денег на будущее и продать товар в кредит. Возникающее противоречие разрешается тем, что покупатель выписывает комплект векселей на сумму, равную стоимости товара, плюс проценты за кредит, который предоставляется покупателю. Затем продавец сразу же после получения портфеля векселей учитывает его в банке, получая деньги немедленно, как и хотел. Таким образом, фактически не продавец кредитует покупателя, а банк предоставляет кредит и берёт риск на себя. Последнее обстоятельство нередко приводит к тому, что в этой сделке появляется и четвёртый участник: гарант-банк покупателя. Он гарантирует погашение задолженности по векселям. Каждая из участвующих сторон преследует собственные цели и следит за разработкой условий соглашения.

Девиза – это иностранная валюта, а **арбитраж** – связанная с ней оценка определённых действий. В рассматриваемом случае арбитраж представляет собой операцию дисконтирования.

Девизы можно покупать на рынке в день установления курсовой стоимости, раньше или позже этого дня. Для того, чтобы их можно было сравнивать, их стоимость нужно привести к одному дню. Если же есть желание купить валюту по более позднему курсу, но немедленно (заранее), то необходимо доплатить за срочность по имеющейся ставке. И наоборот, при желании купить по настоящему курсу, но получить валюту позже, соответствующий процентный платёж отнимается.

Предположим, что по текущему курсу 1 доллар стоит в Петербурге 30 рублей. Определить стоимость 100 долларов при оплате сейчас и при получении через месяц при 12% годовых.

Решение. При получении через месяц 100 долларов сегодня будут стоить 3000 – 30 = 2700 рублей.

Глава 6. Сложные проценты. Прямые функции сложных процентов

6.1. Аккумулированная сумма капитала – первая функция сложного процента

Сложные (кумулятивные) проценты применяются в тех случаях, когда процент по кредитам (ссудам) выплачивается не сразу, а присоединяют к сумме долга с последующим определением наращенной суммы *FV*. Такая процедура начисления «процент на процент» называется капитализацией. Наращение идёт по сложному проценту в геометрической прогрессии, а процесс накопления (компаундинга) описывается формулой $FV = PV(1+i)^n$.

В отличие от простого процента, сложный предполагает, что доход приносит не только первоначальная сумма, но и полученный на неё ранее процент. Для определения стоимости, которую будет иметь капитал через несколько лет (*FV*) применяют формулу, отражающую процесс аккумулирования (компаундинга), наращивания средств по геометрической прогрессии: $FV = PV(1+i)^n$, (6.1)

где *FV* – аккумулированная (будущая) сумма капитала, *PV* – текущая стоимость (стоимость инвестиций) в начальный период, *i* – ставка процента, *n* – количество периодов начисления.

Формула (6.1) в практике финансовых расчётов определяет первую функцию сложного процента, а выражение $(1+i)^n$ называется **множителем (коэффициентом) наращения**, или будущей стоимостью единицы аккумулированного капитала F_1:

$$F_1 = (1+i)^n , \qquad (6.2)$$

где F_1 – множитель наращения рассчитывается или определяется по таблице Инвуда – сложных процентов.

Таким образом, процесс аккумулирования депонированного или инвестированного капитала – это процесс накопления денег по заданной ставке *i* в течение определённого периода времени *n*.

Напомним, что существует два способа начисления сложных процентов: **антисипативный** (предварительный, то есть в начале каждого периода) и **декурсивный** (то есть в конце каждого периода).

Наибольшее распространение получило декурсивное начисление процента. Поясним это на примере.

Задача 6.1. Первоначальная сумма денег 1000 рублей вложена в банк на 5 лет под 6% годовых. Рассчитать доход от вложения данной суммы денег при декурсивном и антисипативном расчёте сложных процентов.

PV = 1000 рублей, n = 5 лет, i = 6% = 0,06. FV_d –? FV_a – ?

Используя формулу (7.1), находим будущую стоимость денег при декурсивном способе расчёта сложных процентов:

$$FV_d = PV(1+i)^n = 1000(1+0{,}06)^5 = 1000 \cdot 1{,}338226 = 1338{,}23 \text{ рубля.}$$

Доход в этом случае составит $D_d = 1338{,}23 - 1000 = 338{,}23$ рубля.

Антисипативный расчёт обычно применяется при высоких темпах инфляции. При этом будущая стоимость определяется по формуле $FV_a = \dfrac{PV}{(1-i)^n} = \dfrac{1000}{(1-0{,}06)^5} = \dfrac{1000}{0{,}94^5} = 1000 \cdot 1{,}3626 = 1362{,}6$

Доход будет равен $D_a = 1362{,}6 - 1000 = 362{,}60$ рублей, и будет иметь несколько большую величину, чем при декурсивном расчёте.

В практике финансовых операций аккумулирование часто происходит так, что при чётко установленной годовой ставке периодом начисления может быть полугодие, квартал, месяц, неделя, день. Поэтому при распространённом в мировой и отечественной практике декурсивном способе расчёта сложных процентов (в конце каждого периода) будущая стоимость капитала определится так:

$$FV = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}, \qquad (6.3)$$

где m – число начислений процентов в году, mn – общее число периодов начисления, n – продолжительность ссуды (кредита) в годах, i – годовая (номинальная) ставка.

При более частом, чем один раз в год, аккумулировании фактически полученный доход в конце года включает начисленные в году проценты. В связи с этим различают *годовую номинальную* и *годовую фактическую* (эффективную) процентные ставки.

Годовая фактическая ставка – это годовая ставка, учитывающая начисленные сложные проценты. Расчёт годовой фактической ставки ведётся как процентное отношение дохода к капиталу к величине капитала в начале года. В практике фактическую ставку часто называют **эффективной.**

Задача 6.2. В банк вложена первоначальная сумма 1000 рублей на один год под 10% годовых (номинальная ставка) при условии начисления процентов не один, а два раза в год. Рассчитать периодическую (релятивную) ставку, будущую стоимость капитала к концу года, доход на капитал, годовую эффективную (эквивалентную или уравновешивающую) ставку.

PV = 1000 рублей, i = 10% = 0,1 годовых, n = 1 год, m = 2 раза в год, $FV - ?$ $i_n - ?$ $i_э - ?$ $I_{nt} - ?$

Найдём периодическую процентную ставку

$$i_n = \frac{i}{m} = \frac{10}{2} = 5\% = 0{,}05$$

Определим будущую стоимость капитала FV

$$FV = PV(1+i_n)^{n\cdot m} = 1000(1+0{,}05)^{2\cdot 1} = 1000\cdot 1{,}1025 = 1102{,}5 \text{ рубля.}$$

Доход на капитал составит

$$I_{nt} = FV - PV = 1102{,}5 - 1000 = 102{,}5 \text{ рубля.}$$

Эффективная (эквивалентная) ставка определится так:

$$i_э = \frac{FV-PV}{PV} = \frac{I_{nt}}{PV} = \frac{102{,}5}{1000} = 0{,}1025 = 10{,}25\%$$

Как видим, годовая эффективная ставка больше годовой (i) номинальной ставки, то есть в общем случае $i_э > i$.

Таким образом, сравнивая формулы (6.2) и (6.3) и исходя из принципа эквивалентности ставок, годовую ставку сложных процентов, которая эквивалентна номинальной процентной ставке и часто

называется эффективной ставкой сложного процента, можно определить из соотношения $(1+i)^n=\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m}=(1+i_n)^{n\cdot m}$

(6.4) следовательно, $(1+i)=(1+i_n)^m$, отсюда

$$i_n=\sqrt[m]{1+i_э}-1 \text{ или } i_э=(1+i_n)^m-1=\left(1+\frac{i}{m}\right)^m-1 \qquad (6.5)$$

В общем случае релятивную (относительную) ставку можно определить по формуле $i_n=\frac{i\cdot d_н}{365}$ или $i_n=\frac{i\cdot d_н}{366}$, (6.6)

где $d_н$ – количество дней, за которое рассчитывается ставка.

Например, годовой ставке 12% будет соответствовать следующая относительная процентная ставка за 90 дней (при временной базе 365 дней): $i_{90}=\frac{12\cdot 90}{365}=2{,}9589\%$.

Задача 6.3. В банк вложено 10000 рублей под 9% годовых. Найти конечную сумму капитала через 10 лет, если расчётный период равен а) 1 год; б) 0,5 года.

PV = 10000, i = 9% = 0,09; $P_{m1}=1 год, P_{m2}=0{,}5 года$.

$$FV_1=PV(1+i)^n=10000(1+0{,}09)^{10}=10000\cdot 2{,}3674=23674$$

$$FV_{0{,}5}=PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m}=10000\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{10\cdot 2}=10000\cdot 2{,}4117=24117$$

Анализ двух способов расчёта показывает, что если расчётный период сложных процентов меньше года, конечный капитал увеличивается, то есть $FV_{0{,}5}>FV_1$.

Чтобы получить одинаковый результат, в обоих случаях используют так называемую эффективную или эквивалентную (уравнивающую) периодическую ставку $i_э=\sqrt[m]{1+i_n}-1$

Задача 6.4. Годовая ставка сложных процентов 20% = 0,2. Найти квартальную уравнивающую ставку.

$i_э=\sqrt[m]{1+i}-1=\sqrt[4]{1+0{,}2}-1=1{,}0466-1=0{,}0466$. То есть квартальная уравнивающая ставки составит 4,66%.

Задача 6.5. Четыре банка предлагают одинаковую процентную ставку 9% = 0,09 годовых для вложенного капитала, но с разной периодичностью начисления процентов: а) первый банк – один раз в год, б) второй банк один раз в полугодие, в) третий банк ежеквар-

тально, г) четвёртый ежемесячно. Определить, в какой из банков выгоднее вложить деньги на три года, если у вас имеется 20000 рублей?

а) $FV_1 = PV(1+i)^n = 20000(1+0{,}09)^3 = 20000 \cdot 1{,}295 = 25900{,}58$

б)

$$FV_2 = PV\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{2\cdot 3} = 20000(1+0{,}045)^6 = 20000 \cdot 1{,}3023 = 26045{,}20$$

в) $$FV_3 = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = 20000\left(1+\frac{0{,}09}{4}\right)^{4\cdot 3} = 20000 \cdot 1{,}3060 = 26121$$

г)

$$FV_4 = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = 20000 \cdot \left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{12\cdot 3} = 20000 \cdot 1{,}3086 = 26172{,}90$$

Анализ полученных данных показывает, что выгоднее вложить 20000 рублей на три года в четвёртый банк, который осуществляет ежемесячное начисление по сложным процентам из расчёта годовой ставки 9%.

Задача 6.6. Земельный участок куплен за 32000 рублей. Цены на земельные участки растут на 12% в год. Какова будет стоимость купленного участка через 5 лет при ежегодном аккумулировании процентов (без учёта налогов и страховых издержек).

$FV = PV(1+i)^n = 32000(1+0{,}12)^5 = 32000 \cdot 1{,}7623 = 56394{,}93$, то есть через 5 лет при стабильном развитии экономики земельный участок будет стоить 56394,93 рубля, иначе говоря, за 5 лет его стоимость возрастёт на 24394,93 рубля.

Задача 6.7. В банке выдали кредит в размере 100000 рублей сроком на 2 года под 15% годовых. Определить наращенную сумму для возврата и доход банка, если начисление процентов производится ежеквартально.

$$FV = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} = 100000\left(1+\frac{0{,}15}{4}\right)^{2\cdot 4} = 100000 \cdot 1{,}43247 = 134247{,}1$$

При этом доход банка I_{nt} составит 134247,1 – 100000 = 34247,1 рубля.

Если срок ссуды измеряется дробным числом лет, а начисление процентов идёт m раз в год, то аккумулированная сумма FV определяется по формуле $FV = PV(1+i)^n$ или по *смешанному методу*. В случае **смешанного метода** сумма рассчитывается так:

$$FV = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}\cdot\left(1+\frac{a\cdot i}{m}\right)\ , \qquad (6.7)$$

где $a = m\cdot\left(\frac{M}{M_г}\right)$ (6.8)

– количество периодов начисления процентов, n – целое число лет, M – неполное количество месяцев (периодов) начисления, т.е. дробная часть года; $M_г = 12$ – число месяцев в году.

Задача 6.8. На первоначальную сумму 80000 рублей ежеквартально начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых в течение 14 месяцев (1,1667 года). Найти аккумулированную сумму *FV*.

Первый метод.

$$FV_1 = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = 80000\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\cdot 1{,}1667} = 80000(1+0{,}03)^{4{,}667} = 91833{,}54$$

Второй метод. Рассчитаем сумму *FV* по смешанному методу наращения $FV_2 = 80000\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4}\cdot\left(1+a\cdot\frac{0{,}12}{4}\right)$, здесь

$a = 4\cdot\left(\frac{2}{12}\right) = 0{,}667$, тогда $FV_2 = 80000\cdot 1{,}126\cdot 1{,}02 = 91881{,}52$.

Таким образом, наращенная сумма для целого числа периодов найдена по принципу сложных процентов, а для дробного числа по принципу простых процентов. Расчёт при комбинировании сложных и простых процентов позволяет получить большую аккумулированную сумму.

Свойство эквивалентности простых ставок в финансовом отношении можно показать на следующем примере.

Задача 6.9. Определить эффективную ставку $i_э$ сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму *FV*, как и при использовании номинальной ставки, равной 9% = 0,09 при ежеквартальном начислении процента, то есть при m = 4.

Находим $i_э$: $i_э = \left(1+\frac{0{,}09}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}0931$, то есть i = 9,31%.

Проверим, является ли ставка, равная 9,31%, действительно эффективной, то есть уравнивающей (эквивалентной) ставкой. Если мы получили в банке кредит в размере 40000 рублей по ставке 9,31%, то

какова будет наращенная сумма долга?

$$FV = PV(1+i)^n = 40000(1+0{,}0931)^2 = 47794{,}70.$$

Если же этот кредит в размере 40000 рублей предоставлен на 2 года под 9% годовых, но с ежеквартальным начислением процентов, то наращенная сумма будет равна

$$FV = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} = 40000\left(1+\frac{0{,}09}{4}\right)^{4\cdot 2} = 47793{,}25.$$

Мы видим из этого примера, что наращенные суммы долга оказались практически равны между собой, то есть две ставки эквивалентны в финансовом отношении.

Для определения числа периодов накопления, за которые первоначальная сумма удвоится, применяется *правило 72-х*:

$$n = \frac{72}{i} \qquad (6.9)$$

Оно носит приближенный характер и даёт удовлетворительные результаты при значении периодической ставки от 3% до 18%.

Задача 6.10. Деньги положены в банк под 8% годовых. Рассчитать срок, в течение которого вложенная сумма удвоится.

$$n = \frac{72}{i} = \frac{72}{8} = 9 \text{ лет.}$$

6.2. Будущая стоимость *n*-периодического аннуитета – вторая функция сложного процента

Теперь рассмотрим серию равновеликих и равномерных платежей (или вкладов), помещаемых под процент на определённое количество периодов.

В каждом периоде производятся вклады капиталов (*PT*) одной и той же величины (серия вкладов – аннуитет).

Термин **аннуитет** (от латинского anno – год) в технике финансовых вычислений означает равномерные платежи или поступления, совершаемые ежегодно в течение ряда лет (периодов). В финансово-экономических расчётах используется также термин **рента**, а отдельные платежи определяются как аннуитеты. Это связано с тем, что при финансовых сделках, в контрактах иногда предусматривают ряд (поток) платежей (погашение долга), все члены которого являются положительными величинами, а интервалы между двумя последовательными платежами постоянными. Этот поток платежей и есть финансовая рента или аннуитет.

Наращенная сумма ренты (*n*-периодического аннуитета) представляет собой сумму всех членов ренты с начисленными на них процентами к концу её срока.

Аннуитете называется **обычным**, если платежи осуществляются в конце каждого периода (рента постнумерандо), и **авансовым**, если платежи осуществляются в начале каждого периода (рента пренумерандо).

Пример. Платежи в размере 1 рубля вносятся ежегодно в конце года в течение *n* лет. Первый платёж принесёт проценты $n-1$ раз до конца срока ренты, второй $n-2$ раза и так далее, предпоследний платёж принесёт проценты 1 раз. На последний платёж проценты начислены не будут, так как он поступит в конце срока ренты.

Коэффициент наращения первого члена ренты будет равен $(1+i)^{n-1}$, второго $(1+i)^{n-2}$, третьего $(1+i)^{n-3}$ и так далее, предпоследнего $(1+i)$ и последнего 1.

Если представить этот ряд в обратной последовательности, то он будет иметь вид геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель $(1+i)$. Тогда сумма членов этой прогрессии (наращенная сумма ренты *n*-периодического аннуитета) будет равна

$$FV = PT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad , \qquad (6.10)$$

где $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = F_2$ – коэффициент наращения или вторая функция сложного процента.

Коэффициент наращения показывает, во сколько раз наращенная сумма (*FV*) ренты больше годового платежа (*PT*).

В финансовых расчётах выражение $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ называют также **фактором фонда накопления** или **будущей стоимостью *n*-периодического аннуитета** с платежом в одну денежную единицу. Термин «фактор фонда» означает коэффициент наращения фонда.

Пример. Рассмотрим движение денежных сумм в 5-летней ренте с годовым платежом 1000 рублей, процентная ставка 10%. В конце первого года в банк вносится 1000 рублей. В конце второго года эта сумма возрастает до 1100 за счёт начисленных 10%. Вместе с очередным внесённым платежом в 1000 рублей на счёте уже 2100. В конце третьего года эта сумма возрастёт до 2310 за счёт начисленных 10%.

Вместе с очередным внесённым платежом на счёте теперь уже 3310 рублей и так далее. Наращенная сумма ренты 6105,1.

Если годовой платёж PT вносится частями r раз в год, а проценты начисляются m раз в год, тогда наращенная сумма ренты за n лет составит

$$FV = \frac{PT}{r} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/r} - 1} \qquad (6.11)$$

Задача 6.11. В течение 5 лет в фонд вносится ежегодно по 20000 рублей, на которые начисляются проценты по ставке 6% годовых. Определить наращенную сумму при условии, что проценты начисляются: а) один раз в конце года (m = 1); б) один раз в конце каждого квартала (m = 4).

PT = 20000 рублей, $i = 6\% = 0{,}06$, n = 5, $m = 4$, r = 1, $FV_1 = ?, FV_2 = ?$

Используя формулу (7.10), находим

$$FV_1 = 20000 \cdot \frac{(1+0{,}06)^5 - 1}{0{,}06} = 112741{,}86$$

Для n-срочной ренты при m-кратном начислении процентов в год и p платежами в год будущую сумму находят по формуле (7.11):

$$FV_2 = \frac{20000}{1} \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{5 \cdot 4} - 1}{\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4} - 1} = 113049{,}19 \text{ рублей.}$$

В отличие от *обычного* аннуитета, при *авансовом* аннуитете (пренумерандо) первый платёж осуществляется в начале первого периода, то есть он приносит доход в течение всех n периодов. Каждый последующий платёж работает на один период меньше, чем предыдущий; наконец, последний платёж приносит доход в течение только одного периода. Как и в случае обычного аннуитета, будущие стоимости каждого платежа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i)$, а первый член этой прогрессии $PT \cdot (1+i)$. Используя формулу расчёта суммы n членов геометрической прогрессии, получим

$$FV = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot PT \cdot (1+i) = PT \cdot \left(\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right) \qquad (6.12).$$

В этом случае фактор фонда накопления – будущая стоимость авансового аннуитета с платежом в одну денежную единицу – будет равен $F_2' = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1$ (6.13)

Задача 6.12. Для накопления суммы денег для будущих целей вы решили вкладывать в коммерческий банк 3000 денег ежемесячно (в конце каждого месяца) в течение одного года при годовой ставке 8%. Какую сумму вы снимете со своего счёта в конце года?

PT = 3000 рублей, i = 8% = 0,08; m = 12, n = 1 год, FV –?

По формуле (7.10) получим:

$$FV = PT \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}}{i/m} = 3000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{1 \cdot 12} - 1}{0{,}08/12} = 37349{,}78 \text{ рублей.}$$

6.3. Текущая стоимость аннуитета – пятая функция сложного процента

Как и предыдущая, данная функция связана с процессом дисконтирования. Пятая функция определяет текущую (современную, то есть приведённую к моменту 0) стоимость серии равномерных равновеликих поступлений денежных средств в течение n периодов с учётом заданной суммы. **Современная величина потока платежей** (PV) – это сумма всех его членов (аннуитетов), уменьшенная (дисконтированная) на величину процентной ставки на конкретный момент времени.

Рассмотрим *обычный аннуитет.* Текущая стоимость единовременного поступления денег в начальный момент времени равна $PV_k = \frac{PT}{(1+i)^k}$. Тогда сумма текущих стоимостей всех n платежей будет искомой величиной $PV = PT \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k}$, где PV представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{1+i}$ и первым членом $\frac{PT}{1+i}$.

Отсюда, пользуясь формулой суммы членов геометрической прогрессии, получим формулу

$$PV = PT \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad , \qquad (6.14)$$

где $F_5 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – текущая стоимость обычного аннуитета – пятая функция сложного процента (текущая стоимость обычного аннуитета единицы).

Авансовый аннуитет построен таким образом, что первый платёж (PT_1) в потоке доходов производится немедленно, а последующие платежи – через равные промежутки времени.

Так как PT_1 производится в начальный момент, дисконтировать его не нужно. Остальные платежи, количество которых n–1, дисконтируются с учётом того, что k-й платёж производится через k–1 периодов от начального момента.

В данном случае сумма стоимости всех n платежей – это геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{(1+i)}$ и первым членом, равным PT.

Тогда текущая стоимость авансового аннуитета будет равна

$$PV = PT \cdot \left(\frac{1-(1+i)^{1-n}}{i} + 1 \right) \qquad (6.15)$$

Если $PT = 1$, получим выражение для фактора текущей стоимости авансового аннуитета F_5':

$$F_5' = \frac{1-(1+i)^{1-n}}{i} + 1.$$

Эти функции (F_5 и F_5') имеют особое значение в оценке инвестиционных проектов, в оценке имущества, приносящего доход.

Задача 6.13. Гражданин, владеющий недвижимостью, имеет право получать в течение 5 лет по 10000 рублей чистой прибыли в виде арендных платежей. Определить, сколько стоит это право в настоящее время при условии, что норма прибыли (ставка дисконтирования) равна 10%, если платежи производятся в начале каждого года; платежи производятся в конце каждого года.

PT = 10000 рублей, i = 10% = 0,1; n = 5 лет; $PV_{обыч} - ?$ $PV_{аванс} - ?$

Определим текущую стоимость обычного аннуитета (современную величину обычной ренты постнумерандо) по формуле (7.14):

$$PV_{обыч} = 10000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0{,}1)^5}}{0{,}1} = 10000 \cdot 3{,}7908 = 37907 \text{ рублей.}$$

Найдём текущую стоимость авансового аннуитета (современную величину ренты пренумерандо) по формуле (7.15):

$$PV_{аванс} = 10000 \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{(1+0{,}1)^{5-1}}}{0{,}1} + 1 \right) = 10000 \cdot 4{,}16986 = 41698{,}6 \text{ рублей.}$$

Таким образом, текущая стоимость прав может быть оценена в 37907 рублей или в 41699 рублей в зависимости от способа получения платежей. Мы видим, что при обычном аннуитете первоначальная стоимость ниже, чем при авансовом.

В результате различие между рентами (аннуитетами) сводится к числу периодов начисления процентов. Сумма членов ренты пренумерандо (авансового аннуитета) будет больше наращенной суммы постнумерандо (обычного аннуитета) в $(1+i)$ раз.

Задача 6.14. Производственная фирма планирует создать в течение трёх лет фонд развития. Фирма имеет возможность откладывать в банке ежегодно 10000 рублей под 12% годовых (сложные проценты). Определить первоначальную (приведённую) величину ренты и найти будущую наращенную сумму – фонд развития.

PT = 10000 рублей, i = 12% = 0,12; n = 3 года; PV – ? FV –?

Рассчитаем приведённую (текущую) величину обычного аннуитета:

$$PV = PT \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 10000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0{,}12)^3}}{0{,}12} = 10000 \cdot 2{,}4018 = 24018{,}31$$

рублей.

2.Найдём наращенную (аккумулированную) сумму по первой формуле сложных процентов (накопление вложения на депозитном счёте), то

есть $FV = PV \cdot (1+i)^n = 24018{,}31 \cdot (1+0{,}12)^3 = 24018{,}31 \cdot 1{,}4049 = 33744$

3. Определим наращенную сумму – фонд развития фирмы – по второй функции сложного процента (поток сберегательных вкладов):

$$FV = PT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{1} = 10000 \cdot \frac{(1+0{,}12)^3 - 1}{0{,}12} = 10000 \cdot 3{,}3744 = 33744 \text{ рубля.}$$

Таким образом, фонд развития фирмы через 3 года составит 33744 рубля при ежегодных платежах 10000 рублей.

Задача 6.15. Годовой платёж 20000 рублей вносится 1 или 2 раза в год по полугодиям равными частями по 10000 рублей в течение 4 лет. Проценты начисляются 1 раз в год по ставке 20% годовых. Найти современную величину *PV* для двух случаев внесения платежей.

PT = 20000 рублей в год = 10000 рублей в полугодие; *i* = 20% = 0,2; *n* = 4 года. $PV_1 - ?$ $PV_2 - ?$

$$PV_1 = PT \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 20000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0{,}2)^4}}{0{,}2} = 20000 \cdot 2{,}5887 = 51774{,}69$$

Для случая, когда платежи и проценты вносятся и начисляются 2 раза в год:

$$PV_2 = \frac{PT}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0{,}2)^4}}{(1+0{,}2)^{1/2} - 1} = 20000 \cdot \frac{0{,}5177}{0{,}1919} = 20000 \cdot 2{,}712275 = 54245{,}51.$$

Как видим, увеличение количества платежей в год ведёт к повышению размера современной величины *PV*.

Задача 6.16. Ежемесячный платёж за аренду грузового автомобиля составляет 1000 рублей. Ставка депозита 20%, срок аренды 2 года. Определить текущую стоимость платежей для двух вариантов начисления процентов: один раз в год и два раза в год для обычного аннуитета, а также для авансового аннуитета.

PT = 1000 руб/месяц = 12000 руб/год = 6000 руб/полгода, *i* = 20% годовых = 0,2; *n* = 2 года. $PV_1 - ?$ $PV_2 - ?$

Для обычного аннуитета текущую стоимость находим так:

а) проценты начисляются один раз в год:

$$PV_1 = PT \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 1200 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0{,}2)^2}}{0{,}2} = 12000 \cdot 1{,}5278 = 18333 \text{ } руб.$$

б) проценты начисляются 2 раза в год:

$$PV_2 = 6000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{0,2}{2}\right)^{2 \cdot 2}}}{\frac{0,2}{2}} = 6000 \cdot 3,1699 = 19019 \text{ руб.}$$

Как видим, текущая стоимость (*PV*) текущая стоимость обычного аннуитета (постнумерандо) будет тем выше, чем больше количество периодических платежей за *n* периодов.

Для сравнения рассчитаем текущую сумму по формуле авансового аннуитета $PV = PT \cdot \left(\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right)$, то есть ренты пренумерандо, когда платежи (взносы) производятся в начале каждого года:

$$PV = 12000 \cdot \left(\frac{1 - (1+0,2)^{-(2-1)}}{0,2} + 1 \right) = 12000 \cdot 1,8333 = 21996 \text{ руб.}$$

Анализ двух вариантов показывает, что при авансовом аннуитете наращенная сумма (*FV*) на счету будет выше и составит31674, при обычном аннуитете 26399 рублей.

Глава 7. Обратные функции сложных процентов

7.1 Фактор фонда возмещения капитала – третья функций сложного процента

Рассмотрим задачу, встречающуюся в финансовых вычислениях: по известной наращенной (итоговой) сумме (*FV*) денег за *n* периодов по процентной ставке *i* определить размер необходимых для этого платежей (*PT*), называемых *фондом возмещения*. Это 3-я функция сложного процента.

Различают обычный фонд возмещения и авансовый в зависимости от того, в конце или в начале периода проводятся платежи (взносы). Обратим внимание на формулу второй функции сложного процента $FV = PT \cdot F_2 = PT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, (7.1)

где F_2 – фактор фонда накопления, 2-я функция сложного процента.

$$F_2 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \quad F_3 = \frac{1}{F_2} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Фактор F_3 показывает денежную сумму, которую необходимо вносить в конце каждого периода для того, чтобы через определённое число периодов остаток на счёте составил одну денежную единицу, причём данный фактор учитывает получаемый по взносам процент.

Можно сравнить фактор фонда накопления F_2 и фактор фонда возмещения F_3. Видно, что функция F_3 при фиксированных *n* и *i* есть величина, обратная фактору фонда накопления F_2.

Аналогично получим формулу авансового фонда возмещения и соответствующего фактора (множителя):

$$FV = PT \cdot \left(\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right), \text{ следовательно}$$

$$PT = FV \cdot \frac{i}{(1+i)^{n+1} - 1 - i}, \qquad (7.2)$$

где $F_3' = \frac{i}{(1+i)^{n+1} - 1 - i}$ – фактор авансового фонда возмещения. Он показывает величину платежа, который необходимо вносить в начале каждого периода под определённый процент с тем, чтобы к концу последнего периода получить одну денежную единицу.

Сравнив фактор фонда накопления (будущую стоимость авансового аннуитета с платежом в одну единицу) и фактор авансового фонда возмещения, получим соотношение

$$F_3' = \frac{1}{F_2'} = \frac{i}{(1+i)^{n+1} - 1 - i} \qquad (7.3)$$

Задача 7.1. Предприниматель взял в банке 100000 рублей на 3 года под 20% годовых на условии ежегодной выплаты только процентов. Рассчитать, какую сумму он должен ежегодно (в конце года) откладывать на отдельный счёт, чтобы к концу срока кредитования накопить сумму для выплаты основного долга, если банк предлагает ставку 12% годовых. Определить доход банка.

PV = 100000 рублей, $i_1 = 20\% = 0{,}2$, $i_2 = 12\% = 0{,}12$. $PT_1 - ?\ PT_2 - ?$

Обратим внимание, что платежи состоят из возвратной суммы основного долга (*PRN*, от *PN* – promissory note – простой вексель, долговое обязательство) и процентов (дохода банка J_{nt}), которые погашаются в конце года в течение трёх лет, а основной долг будет выплачен по окончании срока кредита, то есть размер платежа *PT* структурно имеет вид

$PT = PRN + J_{nt}$, (7.4) где

PRN – выплата основного долга, J_{nt} – процентный платёж, *PT* – общий периодический платёж.

Рассчитаем размер периодического платежа *PT*, используя фактор обычного фонда возмещения F_3 – третью функцию сложного процента:

$$PT_1 = PV \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 100000 \cdot \frac{0{,}20}{(1+0{,}20)^3 - 1} = 27472{,}52 \text{ руб.}$$

Определим, какую сумму платежа (*PT*) он должен откладывать в банке, внося эту сумму под 12% годовых:

$$PT_2 = 100000 \cdot \frac{0{,}12}{(1+0{,}12)^3 - 1} = 29634{,}89 \text{ руб.}$$

Сравним полученные суммы периодических платежей. По условиям выдачи кредита сумма 29634, 89 рублей – это только выплата долга, то есть *PRN* без процентов J_{nt}.

Рассчитаем накопленную (аккумулированную) сумму *FV*, используя первую функцию сложного процента F_1, то есть

$$FV = PV \cdot (1+i)^n = 100000 \cdot (1+0{,}2)^3 = 172800 \text{ руб.}$$

Доход банка составит

$$J_{nt} = FV - PV = 172800 - 100000 = 72800 \text{ руб.}$$

Задача 7.2. Владельцы кондоминиума (жилищного товарищества) планируют заменить кровлю дома через 5 лет. Этот ремонт будет стоить 50000 рублей. Рассчитать, сколько в течение 5 лет ежегодно жильцы должны собирать (откладывать) денег, чтобы накопить сумму, требуемую на ремонт, при годовой ставке 10%.

FV = 50000 рублей, *i* = 10% годовых, *n* = 5 лет, *PT* –?

Используя формулу (8.1) фактора фонда возмещения

$PT = FV \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$, находим $PT + 5000 \cdot \frac{0{,}1}{(1+0{,}1)^5 - 1} = 8189{,}87$ *руб.* – это сумма, которую члены кондоминиума должны откладывать ежегодно.

7.2. Текущая стоимость будущего денежного потока – 4-я функция сложного процента

Если формулу $FV = PV \cdot (1+i)^n$ применить для определения текущей стоимости денег (инвестиций) *PV*, то будем иметь

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}, \qquad (7.5)$$

где $\frac{1}{(1+i)^n} = F_4$ – текущая стоимость будущей единицы – 4-я функция сложного процента. Сравнивая полученную формулу с формулой фактора 1-й функции (то есть $F_1 = (1+i)^n$ – множитель наращения или будущая стоимость единицы аккумулированного капитала), заключаем, что текущая стоимость единицы есть величина, обратная аккумулированной (накопленной) единице, то есть $F_4 = \frac{1}{F_1} = \frac{1}{(1+i)^n}$ – дисконтный множитель. Процесс пересчёта будущей стоимости денежной суммы (потока денег) *FV* в настоящую (современную) стоимость называется дисконтированием. Ставка, по которой осуществляется дисконтирование, называется ставкой дисконта.

Задача 7.3. Инвестор рассчитывает перепродать комплекс оборудования (технологическую линию) через три года за 100000 рублей. Рассчитать максимальную сумму, которую предложит продавец сейчас, если хочет получить на вложенный капитал 12% годового дохода.

FV = 100000 рублей, *i* = 12% = 0.12, *n* = 3 года, *PV* – ?

По формуле (7.5) текущей стоимости единицы $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$ рассчитаем *PV*: $PV = 100000 \cdot \frac{1}{(1+0{,}12)^3} = 100000 \cdot 0{,}7118 = 71178\,руб.$

Анализируя полученный результат, мы можем сказать, что с помощью функции F_4 можно ответить на два вопроса: 1) сколько стоит сегодня та сумма, которую инвестор получит через *n* периодов; 2) за сколько нужно купить объект (сколько нужно вложить в объект), чтобы в результате будущей его продажи через *n* периодов обеспечить требуемую норму дохода на инвестиции (ту, которая характерна для данного сегмента рынка).

Задача 7.4. Гражданин хочет получить доход из расчёта 24% годовых. Доход формируется за счёт продажи объекта, которая будет осуществлена через год. Прогнозируемая цена продажи объекта 100000 рублей. Определить текущую стоимость объекта, принять дисконтирование поквартально.

FV = 100000 рублей, n = 1 год, i = 24% = 0,24, m = 4 (поквартальное дисконтирование), PV – ?

Найдём PV по 2-й функции сложного процента

$PV = FV \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = 100000 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0,24}{4}\right)^{4 \cdot 1}} = 100000 \cdot 0,7921 = 79209,37$. Стоимость объекта оценивается в 79209, 37 рублей.

Задача 7.5. Определить современную величину PV капитала для наращенной суммы 100000 рублей, которая будет получена через 10 лет при процентной годовой ставке 8%, начисляемой в конце каждого квартала, то есть 4 раза в год.

FV = 100000 рублей, n = 10 лет, i = 8% = 0,08; m = 4 (проценты начисляются ежеквартально), PV– ?

$$PV = FV \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}} = 100000 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{10 \cdot 4}} = 100000 \cdot 0,45289 = 45289,0,$$

то есть необходимо иметь первоначальный капитал 45289 рублей.

Отметим, что при банковском (коммерческом) учёте по сложным учётным ставкам применяется такая формула:

$$PV = FV \cdot (1-d)^n \qquad (7.6),$$ где

FV – сумма будущего платежа, на которую начисляется процентная ставка (сумма должна быть уплачена, например, по векселю); $(1–d)$ – дисконтный множитель сложной учётной ставки; d – учётная ставка.

Сумма дисконта D при банковском учёте по сложному проценту определится по формуле $D = FV - PV = FV - FV(1-d)^n$

$$\Rightarrow D = FV\left(1-(1-d)^n\right) \qquad (7.7)$$

В случае, когда проценты начисляются в течение года m раз, определение современной величины платежа производится так:

$$FV = PV\left(1-\frac{i_н}{m}\right)^{m \cdot n}, \qquad (7.8)$$

где – номинальная учётная ставка

Задача 7.6. Гражданин получил вексель на 4000 рублей с уплатой 20 мая 2012 года и учёл его в банке 3 марта по учётной ставке 4%. Найти полученную при учёте сумму и размер дисконта. Временная база 360 дней.

FV = 4000 рублей, T = 78 дней от 3 марта до 20 мая; d = 4% = 0,04; K = 360 дней, PV – ? D –?

По формуле (7.8) находим PV:

$PV = FV\left(1 - \frac{i_н}{m}\right)^m = 4000\left(1 - \frac{78 \cdot 0{,}04}{360}\right)^1 = 3965{,}33$. Сумма дисконта, реализованного банком, будет равна

$D = FV - PV = 4000 - 3965{,}33 = 34{,}67$ *руб.*

Напомним, что ставки, применяемые в математическом и банковском учётах, решают одни и те же задачи: определение величины PV по заданной FV. Это позволяет установить связь между процентной и учётной ставкой. Для этого сравним формулу (7.5) расчёта современной величины платежа и формулу (7.6) расчёта величины PV при банковском учёте: $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$ и $PV = FV \cdot (1-d)^n$. Используя принцип эквивалентности ставок, запишем $\frac{1}{(1+i)^n} = (1-d)^n$. Разрешив это уравнение относительно i, получим

$$i = \frac{d}{1-d} \text{ или } d = \frac{i}{1+i} \qquad (7.9)$$

Эти формулы позволяют определить процентную ставку i по известной учётной ставке d и наоборот.

В данном случае мы получаем различные по величине ставки, которые дают одну и ту же дисконтированную сумму (величину платежа) при фиксированном сроке ссуды (кредита). Это эквивалентные ставки, которые могут быть применены при сравнении доходности финансовых сделок.

Ставка сложных процентов $i_{сл}$, эквивалентная ставке простых процентов $i_{пр}$, определяется так: $i_{сл} = \sqrt[n]{1 + n \cdot i_{пр}} - 1$ (7.10)

При сроке сделки больше года наращение по сложным процентам опережает наращение по простым процентам.

Задача 7.7. Владелец векселя через год должен получить в банке 10000 рублей. Какая сумма была внесена владельцем векселя в банк первоначально, если доходность векселя должна составить 12,5% годовых?

FV = 10000 рублей, i = 12,5% = 0,125; n = 1 год. PV– ?

$PV = 10000 \cdot (1 + 0{,}125)^{-1} = 8888{,}89$ *руб.*

Задача 7.8. Найти современную величину 20000 рублей, которые будут выплачены через 5 лет. За этот период на первоначальную сумму будут начисляться сложные проценты по ставке 10% годовых. Найти доход от этой финансовой операции.

FV = 20000 рублей, *i* = 10% = 0,1; *n* = 5 лет. *PV*– ?

$PV = 20000 \cdot (1+0{,}1)^{-5} = 12418{,}43$руб. Доход составит 7581, 57 руб.

Одно из основных свойств современной (дисконтированной) величины *PV* заключается в том, что величина процентной ставки, по которой выполняется дисконтирование, и современная величина, находятся в обратной зависимости. Чем выше процентная ставка, тем меньше современная величина при других равных условиях.

Задача 7.9. Гражданин решает проблему: какую сумму нужно поместить на депозит в банке, чтобы через 4 года получить 150000 рублей. Решить эту проблему нужно при различных годовых процентных ставках: а) 10%; б) 20%.

FV = 150000 рублей, $i_1 = 10\% = 0{,}1; i_2 = 20\% = 0{,}2$; *n* = 4 года.

$PV_1 - ?$ $PV_2 - ?$

Используя формулу 4-й функции сложного процента (7.5)

$PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n}$, где $\dfrac{1}{(1+i)^n} = F_4$ – текущая стоимость будущей единицы – 4-я функция сложного процента.

а) $PV_1 = \dfrac{150000}{(1+0{,}1)^4} = \dfrac{150000}{1{,}4641} = 102452\ руб.$

б) $PV_2 = \dfrac{150000}{(1+0{,}2)^4} = \dfrac{150000}{2{,}0736} = 72338\ руб.$

Мы видим, что выгоднее вложить PV_2 .

В этой же обратной зависимости находятся современная величина и срок платежа. С увеличением срока платежа (*n*) современная (текущая) стоимость будет становиться всё меньше:

$$\lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} \frac{FV}{(1+i)^n} = 0.$$

При выполнении финансовых расчётов по оценке инвестиций, например, в машины и технологическое оборудование, текущая стоимость может определяться методом прямой капитализации. Тогда стоимость будущих доходов и расходов напрямую (без учёта периода

времени и динамики платежей) трансформируется в текущую стоимость, то есть

$$PV = \frac{FV}{i} \text{ или } PV_{об} + PV_{мод} = \frac{D-P}{i} \quad (7.11)$$

где PV – общие вложения в объект,

$PV_{об}$ – текущая стоимость объекта,

$PV_{мод}$ – текущие инвестиции, необходимые для модернизации объекта;

D – доходы от использования объекта;

P – сумма расходов, связанных с реализацией инвестиционного проекта (использования объекта);

i – ставка окупаемости инвестиций.

Структура доходов включает в себя

Доход от функционирования объекта за расчётный период, в том числе

а) выручку от реализации продукции (услуг),

б) доходы от лизинга (аренды),

в) использование накопленного износа на инвестиции и погашение кредитов.

2) Доходы от возможной продажи объекта.

Структура расходов включает в себя расходы, связанные с функционированием объекта в расчётный период, в том числе

а) производственные затраты,

б) амортизационные отчисления (возмещение износа),

в) затраты на обслуживание лизинга,

г) налоги, относимые на финансовые результаты,

д) инвестиции, идущие на покупку и улучшение объекта.

Величина будущей стоимости FV корректируется на размер налога на прибыль, так как в данном случае чистый доход может рассматриваться как возможная прибыль, то есть $FV = \frac{(D-P)\cdot(100-a_{пр})}{100}$ (7.12), где D – доходы, P – расходы, $a_{пр}$ – ставка налога на прибыль (в %).

Расходы определяются так:

$$P = З_т + \frac{PV_{об}\cdot(a_1+a_2)}{100}, \quad (7.13)$$

где a_1 – размер амортизации, a_2 – ставка налога на основные фонды,

берутся в процентах от стоимости объекта; $З_т$ – затраты на восстановление (ремонт) объекта; $PV_м$ – планируемая стоимость модернизации.

Таким образом, текущая стоимость объекта с учётом формулы (7.11) методом прямой капитализации определяется по формуле

$$PV = PV_{об} + PV_м = \frac{100}{i}\left(D - \left(З_т + PV_{об}\right) \cdot \frac{a_1 + a_2}{100} \right) \cdot \frac{100 - a_{пр}}{100} \qquad (7.14)$$

Отсюда видно, что текущая стоимость затрат сравнивается с текущей стоимостью доходов, а разница между ними называется чистой текущей стоимостью объекта (*NPV*). Средний срок окупаемости инвестиций на дисконтированной основе определяется как отношение начальных капитальных затрат к чистому дисконтированному денежному потоку.

Недостаток метода прямой капитализации заключается в том, что не дисконтируются чистые денежные потоки от эксплуатации объекта за расчётный период, и речь здесь идёт только об окупаемости возможных инвестиций.

Задача 7.10. Рассчитать текущую стоимость комплекта машин и оборудования по производству поршневых колец для дизельных двигателей. Известно, что производительность этой линии 100000 комплектов в год, возможные затраты на модернизацию составят 200000 рублей. Прогнозируемая цена продажи одного комплекта колец составит 100 рублей. Амортизация и ставка налога на имущество соответственно равны 5% и 2% годовых. Налог на прибыль 10%. Предлагается принять ставку капитализации 20%, т. е. пятилетний срок окупаемости вложений.

$PV_м = 100000$ (инвестируется 100000 рублей); $W = 100000$ комплектов в год; $З_т = 200000$ рублей в год; $C_{ком} = 100$ рублей за комплект; $a_{пр} = 10\%$; $a_1 = 5\%$ (амортизация); $a_2 = 2\%$ (налог на имущество); $i = 20\% = 0{,}2$ (ставка на капитализацию). $PV - ?$

1. Определим среднегодовой валовой доход

$D = W \cdot C_{ком} = 100000 \cdot 100 = 10^7$ (10 млн руб).

2. Определим сумму расходов

$$P_{рас} = З_т + \frac{PV_{об}\left(a_1 + a_2\right)}{100} = 200000 + \frac{PV_{об}\left(5+2\right)}{100} = 200000 + PV_{об} \cdot 0{,}07$$

3. Рассчитаем стоимость объекта $PV_{об}$ по формуле

$$PV_{об}+PV_{м}=\frac{D-P}{i}=\frac{1}{0{,}2}\left(10^{7}-\left(200000+PV_{об}\cdot 0{,}07\right)\right)$$

$$PV_{об}=\frac{10^{7}-200000-0{,}07\cdot PV_{об}}{0{,}2}-PV_{м}$$

$$PV_{об}+0{,}35\cdot PV_{об}=5\cdot 10^{7}-10^{6}-10^{5}$$

$$1{,}35\cdot PV_{об}=48900000$$

$$PV_{об}=36222222\,\text{рублей}.$$

То есть с учётом размера инвестиций на модернизацию общая чистая текущая стоимость объекта (NPV) составит 36222222 рублей, следовательно, $P_{рас}=200000+3622222\cdot 007=2735555,(5)$.

7.3 Ипотечная постоянная, размер платежей для покрытия долга – 6-я функция сложного процента

Рассмотрим следующую важную функцию, обратную 5-й функции (текущей стоимости аннуитета) сложного процента. В практике финансовых вычислений 6-я функция получила такое название: *взнос на амортизацию единицы*, или *ипотечная постоянная*.

Амортизацией в данном случае называется процесс погашения долга в течение определённого времени. Для определения величины равновеликого периодического взноса (PT) с целью амортизации кредита напишем формулу 5-й функции определения текущей стоимости обычного аннуитета:

$$PV_{об}=PT\cdot\frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^{n}}}{i}$$

и текущей стоимости авансового аннуитета:

$$PV_{ав}=PT\cdot\left(\frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^{n-1}}}{i}+1\right).$$

Поставим обратную задачу: по известной текущей стоимости (размеру кредита) определить размер платежей, то есть

$$PT = PV_{об} \cdot \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}$$

$$PT = PV_{ав} \cdot \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + i} \qquad (7.15)$$

Для $PV = 1$ получим значение взноса на амортизацию единицы. Это и есть 6-я функция сложного процента.

Для обычных взносов – рента постнумерандо – 6-я функция имеет вид: $F_6 = \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}$. (7.16)

Отметим, что в рентах постнумерандо коэффициент наращения последнего платежа равен 1.

Для авансовых взносов – рента пренумерандо – 6-я функция имеет вид:

$$F_6 = \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + i}.$$

Каждый равновеликий взнос PT на амортизацию капитала включает в себя процент J_{nt} – отдачу от инвестиций и сумму PRN в уплату первоначальной суммы – возврат инвестиционной суммы.

Функция F_6 как обратная величина функции F_5 n-периодического аннуитета часто называется ипотечной постоянной и обозначается R_m, то есть $F_6 = \frac{1}{F_5} = R_m = \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}$.

Обратите внимание, что функция F_3 – фактор фонда возмещения – связана с функцией F_6 – ипотечной постоянной – следующим образом:

$$F_6 = F_3 + i \ , \qquad (7.17)$$

то есть взнос на амортизацию 1 денежной единицы равен сумме фактора фонда возмещения и ставке процента.

Для n-периодического обычного фонда возмещения

$$F_6 = F_3 + i = \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i = \frac{i + i(1+i)^n - i}{(1+i)^n - 1} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} = F_6 \quad (7.18)$$

Таким образом, взнос на амортизацию капитала (ипотечная постоянная) – 6-я функция сложного процента, определяет размер периодического платежа PT. Эта функция является обратной по отношению к текущей стоимости как обычного, так и авансового аннуитета. Размер платежей PT в данном случае определяется при известной текущей стоимости инвестиций PV. В отличие от 6-й функции сложного процента, фактор фонда возмещения позволяет рассчитать размер платежей по известной величине будущей стоимости.

Задача 7.12. Коммерческий банк выдал валютный кредит в размере 1000 долларов США сроком на 1 год. Номинальная ставка по этому кредиту 16 % годовых. Погашается кредит поквартально, в конце каждого квартала. Определить размер периодических платежей PT и составить план погашения долга.

$PV = 1000$ долларов; $n = 1$год; $i = 16\%$ годовых, оплата поквартальная; $i_к = 4\%$. $PT - ?$

Исходя из 6-й функции сложного процента, находим PT:

$$PT = PV \cdot \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} = PV \cdot \frac{i/m}{1 - \frac{1}{(1+i/m)^{n \cdot m}}} \text{ при } i = \frac{0{,}16}{4} = 0.04;\ m = 4$$

раза в год.

$$PT = 1000 \cdot \frac{0{,}04}{1 - \frac{1}{(1+0{,}04)^{1 \cdot 4}}} = 1000 \cdot 0{,}2755 = 275{,}49 \text{ долларов, то есть в}$$

конце каждого квартала нужно вносить в счёт погашения кредита 275, 5 долларов.

Рассчитаем процентный доход и другие показатели в первом квартале:

$$J_{nt}^1 = PV \cdot \frac{i}{4} = 1000 \cdot \frac{0{,}16}{4} = 40 \text{ долларов.}$$

Возврат основной суммы будет равен

$PRN^1 = PT - J_{nt}^1 = 275{,}5 - 40 = 235{,}5$ долларов.

Остаток (BAL, баланс, сальдо) долга будет равен:

$BAL^1 = PV - PRN^1 = 1000 - 235{,}5 = 764{,}5$ долларов.

Рассчитаем показатели плана обслуживания кредита в 1000 долларов во втором квартале: $J_{nt}^2 = BAL^1 \cdot \frac{i}{4} = 764{,}5 \cdot \frac{0{,}16}{4} = 30{,}58$ долл.

$PRN^2 = PT - J_{nt}^2 = 275{,}5 - 30{,}58 = 244{,}92$

$BAL^2 = BAL^1 - PRN^2 = 764{,}5 - 244{,}92 = 519{,}58$ долларов.

Все последующие расчёты представлены в таблице 7.1 в виде плана погашения (обслуживания) кредита, полученного в размере 1000 долларов под 16% годовых на 1 год при ежеквартальной оплате, в конце каждого периода.

Амортизационная таблица. План погашения долга по кредиту.

Таблица 7.1

Остаток от основной суммы *PV*, *BAL*(*n*) = *BAL*(*n*–1) – *PRN*(*n*–1) *BAL* = *PV* –*PRN*	Размер периодических платежей PT		
	В том числе		
	В целом *PT* = *PRN* + *J*(*nt*)	Возврат основной суммы долга *PRN* = *PT* – *J*(*nt*)	Проценты (доход банка) *J* = *PV i* *J* = *BAL i*
1	2	3	4
I квартал, все проценты начисляются с первоначальной (текущей) суммы *PV* = 1000 долларов			
BAL(1) = 1000 – 235,5 = 764,5	*PT*(1) = 275,5	*PRN*(1) = 275,5 – 40 = 235,5	4% от $1000 *J*(1) = 40
II квартал			
BAL(2) = 764,5 – 244,92 = 519,58	*PT*(2) = 275,5	*PRN*(2) = 275,5 – 30,58 = 244,92	4% от $764,5 *J*(2) = 30,58
III квартал			
BAL(3) = 519,58 – 254,72 = 265,10	*PT*(3) = 275,5	*PRN*(3) = 277,5 – 20,79 = 254,70	4% от $519,58 *J*(3) = 20,79
IV квартал			
BAL(4) = 265,1 – 265,1 = 0	*PT*(4) = 275,5	*PRN*(4) = 275,5 – 10,6 – 265,0	4% от $265,1 *J*(4) = 10,6
Итого	1102	1000 (1000,12)	102

Рассмотренная выше задача – это пример классической ипотеки. Такой план погашения ипотечного кредита носит название *равномерно-аннуитетного метода возврата основных средств* (*метод Инвуда*). Платежи *PT* идут в конце периода равными долями с увеличива-

ющимися размерами PRN возврата основной суммы долга и с уменьшающимися начислениями процентов J_{nt} доходов.

В практике финансовых вычислений существует и другая техника возврата основной суммы долга – *равномерно-прямолинейный метод* (*метод Ринга*). Чистый операционный доход равномерно снижается при постоянной норме возврата основного долга PRN, а доход J_{nt} равномерно уменьшается. В отличие от метода Ринга метод Инвуда основан на том, что ипотечная постоянная равна сумме фактора фонда возмещения F_3 и ставки капитализации i (см. формулу 7.17).

Задача 7.13. Имеется кредит размером 100000 рублей, выданный банком на 5 лет под 10% годовых. Рассчитать величину периодического платежа PT, вносимого при обслуживании данного кредита по методу Инвуда.

$PV = 100000$ рублей; $n = 5$ лет; $i = 10\%$ годовых; $PT - ?$

$$PT = PV \cdot \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} = 100000 \cdot \frac{0{,}1}{1 - \frac{1}{(1+0{,}1)^5}} = 100000 \cdot 0{,}2638 = 26380$$

В этой сумме периодического платежа норма возврата основной суммы равна 20% от 100000 рублей, т. е. $PRN = 20000$ рублей в год, а оставшаяся сумма J_{nt} равна 6380 рублей – это проценты. Фактор фонда возмещения F_3 определяется так:

$F_3 = \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{0{,}1}{(1+0{,}1)^5 - 1} = 0{,}1638$, тогда

$F_6 = F_3 + i = 0{,}1638 = 0{,}1 = 0{,}2638$. Таким образом, ставка капитализации, определённая по методу Инвуда, будет равна $R_m = F_3 + i = 0{,}2638$, то есть можно отметить, что фактор фонда возмещения обеспечивает возврат суммы $0{,}1638 \cdot 100000 = 16380$ рублей. От суммы 16380 рублей набегают проценты по закону сложного процента, то есть

1-й год 16380 рублей,

2-й год $16380 \cdot 1{,}1 = 18018$ рублей,

3-й год $16380 \cdot 1{,}1^2 = 19819{,}8$ рублей,

4-й год $16380 \cdot 1{,}1^3 = 21801{,}78$ рублей,

5-й год $16380 \cdot 1{,}1^4 = 23981{,}95$ рублей.

Если проанализировать изменение функции F_6, где $F_6 = F_3 + i = 0{,}1638 + 0{,}1 = 0{,}2638$, то можно сделать вывод, что взнос на амортизацию капитала будет тем выше, чем больше текущее значение капитала PV.

Анализ функции F_6 и третьей функции F_3 – фактора фонда возмещения сложного процента показывает, что чем меньше норма дохода, тем оценочная стоимость будущих инвестиций FV будет выше.

Задача 7.14. Рассчитать коэффициент капитализации (ипотечную постоянную) методом Ринга и методом Инвуда при следующих исходных данных. Норма дохода на инвестиции 10% годовых. Срок полезной эксплуатации объекта (технологической линии) 10 лет.

Равномерно-прямолинейный метод (метод Ринга).

$R'_m = i + F_3$, где i – норма дохода, $i = 10\% = 0{,}1$

F_3 – норма возврата; $F_3 = 0{,}1$;

$R'_m = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$

Равномерно-аннуитетный метод (метод Инвуда). По таблице сложного процента (таблице Инвуда) для условий $i = 10\%$ и $n = 10$ лет находим ипотечную постоянную $R_m = 0{,}1627$.

Таким образом, для разных методов распределения инвестиций коэффициенты капитализации различны.

Задача 7.15. Завод для выпуска нового оборудования нуждается в инвестициях в сумме 10 млн долларов. Коммерческий банк выдаёт кредит под 8% на 5 лет, начисление процентов ежегодное. Рассчитать размер ежегодных платежей.

$PV = 10$ млн долларов; $i = 8\% = 0{,}08$; $n = 5$ лет; $PT - ?$

По формуле 6-й функции сложного процента находим

$$PT = PV \cdot \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} = 10\,млн \cdot \frac{0{,}08}{1 - \frac{1}{(1+0{,}08)^5}} = 10\,млн \cdot 0{,}25046 = 2{,}5046\,млн,$$

то есть ежегодные платежи по обслуживанию кредита 10 млн долларов составят 2,5046 млн долларов.

Задача 7.16. Гражданин получил кредит в банке в размере 100000 рублей на 5 лет. Ставка капитализации (дохода банка) на эту сумму равна 14%, погашение ежегодное. Рассчитать норму возврата Δ и полный размер годового платежа.

$PV = 10000$ рублей; $i = 14\%$ годовых; $n = 5$ лет; $\Delta - ?$ $PT - ?$

Находим норму возврата долга $\Delta = \frac{100\%}{5} = 20\% = 0{,}2$.

Полный размер годового платежа по 6-й функции будет равен

$$PT = PV \cdot \frac{i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} = 100000 \cdot \frac{0{,}14}{1 - \frac{1}{(1+0{,}14)^5}} = 100000 \cdot 0{,}29128 = 29128 \text{ руб-}$$

лей – это полный годовой платёж.

Задача 7.17. Предприниматель получил в банке кредит размером 350000 рублей. Ставка дохода на капитал 12%. Срок погашения кредита 5 лет с ежемесячным погашением. Рассчитать размеры ежемесячных выплат и годового платежа.

$PV = 350000$ рублей; $i = 12\%$; $n = 5$ лет, $m = 12$ (ежемесячное погашение);

$PT - ?$

По формуле 6-й функции сложного процента находим размер ежемесячного платежа (оплата платежей осуществляется в конце каждого месяца):

$$PT_м = PV \cdot \frac{i/12}{1 - \left(\frac{1}{1 + i/12}\right)^{5 \cdot 12}} = 350000 \cdot \frac{0{,}12/12}{1 - \frac{1}{\left(1 + 0{,}12/12\right)^{5 \cdot 12}}} =$$

$$= 350000 \cdot 0{,}022244 = 7785{,}56 \text{ } \textit{рублей в месяц}.$$

Определим размер годовых платежей:

$PT_г = 7785{,}56 \cdot 12 = 93426{,}68$ рублей в год.

При проведении финансовых расчётов рекомендуется пользоваться специально разработанными таблицами не только годового начисления процентов, но и помесячного. С целью оперативного принятия решений по конкретным задачам можно использовать сводную таблицу прямых и обратных функций сложного процента. Здесь термин «фактор фонда» употреблён в смысле коэффициента наращения.

В таблице 7.2 представлены все функции сложного процента и их зависимость.

Таблица 7.2

Прямые функции	Обратные функции
1-я функция F_1 – накопленная сумма единицы. Нахождение будущей сум-	3-я функция F_3 – фактор фонда возмещения возврата основного долга.

мы FV текущего денежного вклада при известном значении PV. $FV = PV \cdot F_1,\ FV = PV(1+i)^n$.	Норма кредита погашения основной части кредита при известном размере будущей суммы FV. $PT = F_1 \cdot F_3$ Обычный фонд возмещения: $PT = FV \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$ Авансовый фонд возмещения: $PT = FV \cdot \frac{i}{(1+i)^{n+1} - 1 - i}$
2-я функция F_2 – будущая стоимость аннуитета. Накопление единицы за период, фактор будущей стоимости аннуитета. Обычный аннуитет: $FV = PT \cdot F_2 = PT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ Авансовый аннуитет: $FV = PT\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1\right)$	4-я функция F_4 – текущая стоимость единицы аннуитета. Нахождение текущей стоимости денег PV, которая будет получена в будущем, то есть при известной величине FV: $PV = FV \cdot F_4 = FV(1+i)^{-n}$
5-я функция F_5 – текущая стоимость объекта, приносящего доход. $PV = PT \cdot F_5$. Обычный аннуитет: $PV = PT \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ Авансовый аннуитет: $PV = PT\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1\right)$	6-я функция F_6 – взнос на амортизацию капитала, размер платежей для покрытия долга. Ипотечная постоянная. Нахождение размера текущих платежей при известной величине PV. $F_6 = F_3 + i$ Обычный аннуитет: $PT = \frac{PV \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$ Авансовый аннуитет: $PT = PV \cdot \frac{i}{1-\left(1-(1+i)^{-(n-1)} + i\right)}$

Шестая функция сложного процента широко применяется при оценке лизинговых операций. Известны *три вида лизинговых операций:*

Финансовый (капитальный) **лизинг**. Он является полностью амортизированным, то есть стоимость передаваемого в лизинг объекта на 90% или полностью компенсируется за счёт дохода от аренды.

Оперативный (сервисный) **лизинг**. Он может не предусматривать полную амортизацию передаваемого объекта.

Возвратный лизинг. Фирма-собственник передаёт свой объект и одновременно заключает лизинговый договор о долгосрочной аренде, получая согласованную сумму – финансовый левередж (встречаются также написания ливеридж и леверидж).

В мировой практике краткосрочная аренда на срок до 1 года носит название *рентинг*; среднесрочная аренда на срок от 1 до 3 лет – *хайринг*; долгосрочная аренда от 3 до 20 лет – *лизинг*.

Лизинг рассматривается в ряде стран Европы как специфическая и весьма эффективная форма инвестирования капитала в различные секторы экономики. При осуществлении лизинговых операций сложным вопросом является определение суммы лизинговых (арендных) платежей. В состав лизингового платежа входят:

Амортизация – погашение основной суммы долга (PRN);

Лизинговый процент.

В состав *лизингового процента* входят три элемента:

– лизинговая маржа (ударение двоякое, но чаще на первый слог: мАржа), включающая доход лизингодателя за оказываемые им услуги, обычно от 1 до 3%;

– плата за ресурсы, то есть процент на сумму денег, привлекаемую лизингодателем для обеспечения сделки;

– рисковая премия, то есть процент, учитывающий степень риска, который несёт лизингодатель.

Таким образом, каждая срочная уплата (PT) состоит из суммы двух величин PRN и J_{nt}, то есть PT – это аннуитет ренты постнумерандо или пренумерандо. Из определения ипотечной постоянной – 6-й функции сложного процента – имеем

$$PT = PV \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \qquad (7.19)$$

или $PT = PV \cdot R_m$, где PV – это стоимость арендованного имущества, то есть сумма амортизации – основного долга; i - лизинговый процент; n – срок контракта (аренды); PT - сумма арендного платежа; R_m – ипотечная постоянная (коэффициент приведения ренты) – 6-я функция сложного процента.

При заключении лизинговых договоров полная амортизация стоимости арендованного имущества определяется законодательством, действующим в стране.

В случае, когда нет полной амортизации стоимости оборудования, сумму лизингового платежа корректируют на процент остаточ-

ной стоимости. Для этого в расчётах используется формула корректировочного множителя ($к_м$):

$$к_м = \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}+j}\ , \qquad (7.20)$$

где i – лизинговый процент; j – процент остаточной стоимости, обычно принимают 10%; m – частота платежей в году.

Способы платежа по лизинговому договору могут быть единовременными и периодическими. *Периодические платежи* могут осуществляться равными суммами в конце (начале) каждого года и в течение срока договора; с увеличивающимися суммами платежа; с ускоренными платежами.

В некоторых случаях финансовые расчёты суммы лизингового платежа производят по формуле $PT = PV\dfrac{\frac{i}{m}}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m}}}$. Как видно, в расчётах также используется 6-я функция сложного процента. Например, при стоимости полученного по валютному лизингу оборудования 1 млн. долларов, сроке договора 5 лет, ставке лизингового процента 9% и полугодичной периодичности платежей сумма PT будет равна $PT = 1млн\cdot\dfrac{\frac{0{,}09}{2}}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{2\cdot 5}}} = 1млн\cdot 0{,}126379 = 126379 долларов$.

Сумма платежей за 5 лет составит 1,26379 млн долларов, то есть доход от данной финансовой операции будет равен 26379 долларов.

Задача 7.18. Лизинговая компания намерена предложить сельхозпредприятиям в лизинг кормоуборочные комбайны стоимостью по 200000 рублей, лизинговый процент 6%, срок договора 5 лет. Составить план погашения по лизинговому договору в двух вариантах:

методом Ринга, то есть способом равного погашения основного долга (равномерно-прямолинейным методом);

методом Инвуда, то есть способом погашения равными срочными уплатами-рентами (равномерно-аннуитетный метод).

Находим ежегодную сумму погашения основного долга (PRN): $PRN = \frac{PV}{n} = \frac{200000}{5} = 40000$ рублей. Ежегодные процентные платежи в конце первого года составят $J_{nt1} = 200000 \cdot 0{,}06 = 12000$ рублей, в конце второго года $J_{nt2} = (200000 - 40000) \cdot 0{,}06 = 9600$ рублей, то есть $J_{ntn} = BAL_{n-1} \cdot i$. Все расходы по первому варианту представлены в таблице 7.3.

План погашения долга по лизинговому договору равномерно-прямолинейным методом, срок договора 5 лет; $i = 0{,}06$; $PV = 200000$ рублей.

Таблица 7.3

Номер года	Остаток долга на начало года BAL	Платежи по процентам J_{nt}	Сумма погашения основного долга PRN	Срочная уплата (рента) PT
1	200000	12000	40000	52000
2	160000	9600	40000	49600
3	120000	7200	40000	47200
4	80000	4800	40000	44800
5	40000	2400	40000	42400
Итого	0	36000 (доход компании)	200000	236000

При равномерно-аннуитетном методе размер срочной равной уплаты определим так:

$$PT = PV \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 200000 \cdot \frac{0{,}06}{1-(1+0{,}06)^{-5}} = 200000 \cdot 0{,}2374 = 47474{,}3$$

рубля. Найдём сумму уплаты процентов в конце первого года: $J_{nt1} = 200000 \cdot 0{,}06 = 12000{,}0$ рублей. Тогда размер первого платежа по погашению основной суммы долга будет равен $PRN_1 = PT - J_{nt1} = 47479{,}3 - 12000 = 35479{,}3$ рубля.

Сумма уплаты процентов в конце второго года $J_{nt2} = BAL_1 \cdot i$, то есть $J_{nt2} = (200000 - 35479{,}3) \cdot 0{,}06 = 9871{,}2$ рубля. Второй платёж в счёт погашения (амортизации) основного долга будет равен $PRN_2 = PT - J_{nt2} = 47479{,}3 - 9871{,}2 = 37608{,}1$ рубля, и так далее. Все результаты расчётов представлены в таблице 7.4.

План погашения долга по лизинговому договору равномерно-аннуитетным методом, равными срочными уплатами (PT), срок договора 5 лет; $i=0{,}06$; $PV=200000$ рублей.

Таблица 7.4

Номер года	Остаток долга на начало года BAL	Платежи по процентам J_{nt}	Сумма погашения основного долга PRN	Срочная уплата (рента) PT
1	200000	12000	35479,3	47479,3
2	164520,7	9871,2	37608,1	47479,3
3	126918,9	7615,1	39864,2	47479,3
4	87054,7	5223,3	42256,0	47479,3
5	44798,7	2680,6	44798,7	47479,3
Итого	0	37396,5	200000 (200006,3)	237396,5

Анализ двух планов обслуживания лизингового договора показывает, что при равномерно-аннуитетном методе погашения, наиболее распространённом в практике арендных отношений, сумма выплаты процентов несколько выше и составляет 237396,5 рубля.

Для покупателя (лизингополучателя) предпочтительнее договор с наименьшей современной величиной PV, а лизингодатель исходит из доходности сделки.

Задача 7.19. Фирма по автотранспортным перевозкам заключила лизинговый договор на использование большегрузного автомобиля. Стоимость лизинговой машины 150000 рублей. Срок договора 3 года, лизинговый процент 9% годовых. Взнос платежей осуществляется фирмой по полугодиям, то есть два раза в год в конце каждого полугодия. Рассчитать размер и сумму лизинговых платежей (PT) и составить план обслуживания лизингового договора равномерно-аннуитетным методом. Принять в расчётах величину остаточной стоимости объекта лизинга равной 10% первоначальной стоимости (PV). $PV=150000$ рублей; $n=3$года; $i=9\%$годовых; остаточная стоимость $j=10\%$; $m=2$количество платежей в году, в конце каждого периода. $PT-?$

1. Для определения размера арендного платежа(PT) воспользуемся 6-й функцией сложного процента – ипотечной постоянной с учётом корректировочного множителя на процент остаточной стоимости $к_м$, то есть $PT=PV\cdot F_6\cdot к_м$ (7.21)

Учитывая формулы (7.19) и (7.20), получим величину лизингового платежа для обычного аннуитета

$$PT = PV \cdot \frac{\frac{i}{m}}{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}}} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} + j} =$$

$$= 150000 \cdot \frac{\frac{0{,}09}{2} \cdot \left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{2 \cdot 3}}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{2 \cdot 3} - 1} \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{2 \cdot 3}}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{2 \cdot 3} + 0{,}1} = 27007{,}84$$

Аналогично предыдущей задаче составим план погашения долга по данному лизинговому договору. За первое полугодие процентный платёж составит $J_{nt1} = 150000 \cdot \frac{0{,}09}{2} = 6750$ рублей. Возврат основного долга (амортизация) составит

$PRN_1 = PT - J_{nt1} = 27007{,}84 - 6750 = 20257{,}84$ рубля.

За второе полугодие остаточная стоимость (BAL_2) основного долга будет равна

$BAL_2 = BAL_1 - PRN_1 = 150000 - 20257{,}84 = 129742{,}16$ рубля, и так далее. Результаты расчётов представлены в таблице 7.5.

Таблица 7.5. План погашения долга по лизинговому договору: стоимость автомобиля 150000 рублей, лизинговый процент 9% годовых, срок договора 3 года, платежи в конце каждого полугодия, равномерно-аннуитетный метод.

Номер платежа	Периодичность оплаты, полугодие	Остаточная стоимость на начало года, рублей $BAL_n = BAL_{n-1} - PRN_{n-1}$ (3*) – (6*)	Арендный платёж, сумма, рублей $PT = PRN + J_{nt}$ (5*) + (6*)	Проценты за лизинг $J_{nt} = BAL \cdot \frac{i}{m}$ $(3^*) \cdot \frac{0{,}09}{2}$	Амортизация основного долга $PRN = PT - J_{nt}$ (4*) – (5*)
(1*)	(2*)	(3*)	(4*)	(5*)	(6*)
1	1	150000	27007,84	6750	20257,84
2	2	129742,16	27007,84	5838,40	21169,44

Всего за 1-й год		–	54015,68	12588,4	41427,28
3	1	108572,72	27007,84	4885,77	22122,07
4	2	86450,65	27007,84	3890,28	23117,56
Всего за 2-й год		–	54015,68	8776,05	45239,63
5	1	63333,09	27007,84	2849,99	24157,85
6	2	39175,24	27007,84	1762,89	25244,95
Всего за 3-й год		–	54015,68	4612,88	49402,80
Итого за три года		39175,24 – 25244,95 = = 13930,29 – остаточная стоимость	162047,04	25977,33 доход лизинговой компании	136069,71+10 %= =149676,68, Возврат 150000

Анализ полученных результатов этой задачи показывает, что при $i = 9\%$ годовых доход лизинговой компании составит за 3 года 25977, 33 рубля.

В случае, когда первый платёж по аренде осуществляется авансом в момент подписания лизингополучателем протокола о приёмке оборудования, то есть не в конце, а в начале процентного платежа при полугодовой периодичности уплаты процента, в расчёт суммы платежа может вноситься ещё один корректив по следующей формуле:

$$\kappa_{доп} = \frac{1}{1+\frac{i}{m}}, \text{ или для } i = 0{,}09 \text{ и } m = 2 \quad \kappa_{доп} = \frac{1}{1+\frac{0{,}09}{2}} = 0{,}96881.$$

В финансовых расчётах для оценки экономической эффективности конкретной лизинговой операции применяется несколько вариантов. При подготовке экономического обоснования для сравнения финансовой эффективности лизинга с закупкой этого же оборудования в кредит рекомендуется расчёт ставки финансирования выполнять по формуле

$$i_c = \frac{PT - PRN}{0{,}5 \cdot (PV - P_{ост}) \cdot 100} = \frac{PT - PRN}{50 \cdot (PV - P_{ост})}\ , \qquad (7.22)$$

где i_c – ставка финансирования лизинга; PT – лизинговые платежи, PRN – ежегодная амортизация оборудования, PV – первоначальная стоимость сдаваемого в лизинг оборудования, $PV_{ост}$ – на момент окончания срока лизинга остаточная стоимость, по которой оборудование будет выкуплено лизингодателем в свою собственность.

Важным условием для лизингодателя является наличие налоговых преимуществ.

Эти преимущества основаны на том, что платежи по лизингу не облагаются налогом на прибыль, они относятся на себестоимость продукции.

В связи с тем, что лизинговые платежи не привязаны к нормам амортизации, они могут быть составлены с учётом пожелания лизингополучателя с целью более быстрого перенесения стоимости оборудования на себестоимость выпускаемой продукции.

При решении проблемы по выбору типа инвестирования – кредит или лизинг – нужно учесть следующее обстоятельство. Лизинг оборудования имеет смысл, если в рамках рассматриваемых проектов выполняется условие

$$NPV_a > NPV_k\ , \qquad (7.23)$$

где NPV_a – чистая текущая стоимость платежей в случае лизинга имущества после налогообложения, NPV_k – чистая текущая стоимость платежей в случае покупки оборудования в кредит.

Это условие может быть реализовано при следующем соотношении:

$$\frac{PT_a}{R_{ma}} < \frac{PT_k}{R_{mk}}\ , \qquad (7.24)$$

где $\frac{PT_a}{R_{ma}}$ – отношение суммы платежей при лизинге к ипотечной постоянной аренды (F_6), $\frac{PT_k}{R_{mk}}$ – отношение суммы платежей при обслуживании кредита к ипотечной постоянной кредита (F_6).

Для наглядности рассмотрим приобретение оборудования в лизинг. Стоимость оборудования — 14 миллионов рублей, срок лизинга — 3 года, авансовый платеж лизингополучателя — 30% от стоимости

оборудования, процентная ставка по кредиту — 19% годовых, срок кредита — 3 года. Стоимость лизинга будет зависеть от того, на чьем балансе будет учитываться данное оборудование, лизингополучателя или лизинговой компании.

	Балансодержатель: лизингополучатель	Балансодержатель: Лизинговая компания	Кредитные платежи
Ежемесячный платёж	426071,92	438997,70	359229
Общая сумма платежей с НДС, рублей	19540510,73	20005096,81	17132244
Удорожание в год, проценты годовых	13,19%	14,29%	19%
Сумма НДС к возмещению, рублей	2980755,87	3051624,94	2135593
Экономия на налоге на прибыль, рублей	4689722,57	4801223,23	626448
Затраты на приобретение с учётом экономии, рублей	11870032,29	12152248,63	14370203

Из данной таблицы видно, что сумма ежемесячных платежей при кредите будет меньше, но итоговая сумма с учетом всех экономий на налоге на прибыль и НДС при лизинге будет значительно меньше. (Аранович А., специалист по работе с юридическими лицами Консалтинговой Группы «НеваФинанс», электронный ресурс: http://www.creditforbusiness.ru/terms/2291/).

Задача 7.20. Требуется сравнить варианты лизинга и покупки в кредит при следующих условиях. Стоимость комплекса оборудования 500000 рублей.

Условия лизингового договора: срок аренды 4 года, арендная плата вносится в начале каждого года (пренумерандо) и составляет 120000 рублей под 8% годовых.

Условия покупки в кредит: цена (PV) равна 500000 рублей. Возможная схема финансирования сделки: аванс (A) 100000 рублей, на остальную сумму оформляется кредит под 6% годовых сроком на

5 лет, задолженность гасится в конце каждого года. Остаточная стоимость оборудования в конце погашения кредита 8% $(PV_{ост})$ –200000 рублей. Ремонт и обслуживание комплекса за счёт пользователя в обоих случаях.

Лизинг: $PV = 500000$ рублей; $PT_a = 120000$ рублей в начале каждого года; $i = 8\% = 0{,}08$ годовых; $n = 4$ года.

Кредит: $PV = 500000$ рублей; аванс $A = 100000$ рублей; $Kp = PV - A = 400000$ рублей; $i = 6\% = 0{,}06$ годовых; $n = 5$ лет; $PV_{ост} = 200000$ рублей под 8% годовых.

Найти взносы за кредит PT_k, современную стоимость потока расходов на обслуживание кредита NPV_k, общую текущую стоимость лизинга NPV_a.

Рассмотрим вариант покупки комплекса оборудования в кредит.

Рассчитаем годовой платёж по обслуживанию кредита PT_k по шестой функции сложного процента:

$$PT_k = (PV - A) \cdot F_6 = (PV - A) \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} =$$

$$= (500000 - 100000) \cdot \frac{0{,}06 \cdot (1+0{,}06)^5}{(1+0{,}06)^5 - 1} = 400000 \cdot 0{,}2374 \cong 94960$$

то есть по кредиту ежегодно нужно выплачивать 94960 рублей.

Определим с учётом аванса (A) и дисконтированного потока платежей (PV_k) чистую текущую (современную) стоимость потока расходов по обслуживанию кредита по пятой функции сложного процента:

$$NPV_k' = A + PT_k \cdot F_5 = A + PT_k \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} =$$

$$= 100000 = 94960 \cdot 3{,}9927 = 479146{,}79$$

Дисконтируем величину остаточной стоимости оборудования, получаемую в конце погашения задолженности в 200000 рублей по четвёртой функции сложного процента:

$$NPV_{ост} = PV_{ост} \cdot F_4 = \frac{PV_{ост}}{(1+i)^n} = \frac{200000}{(1=0{,}08)^5} = 200000 \cdot 0{,}6806 = 136116{,}64$$

Найдём общую текущую (современную) стоимость потока расходов по обслуживанию кредита с учётом дисконтирования по пятой функции (текущая стоимость аннуитета) и четвёртой функции (текущая стоимость реверсии) сложного процента:

$$NPV_k = PV_k - PV_{ост} = (PT_k \cdot F_5 + A) - PV_{ост} \cdot F_4 =$$

$$= 479146{,}79 - 136116{,}64 = 343030{,}15$$

Рассмотрим вариант лизинга оборудования.

Рассчитаем общую чистую текущую стоимость лизинга при постоянном размере платежа $PT = 120000$, $i = 8\%$, $n = 4$ в рамках всего контракта по пятой функции сложного процента для авансового аннуитета:

$$NPV_a = PT_a \cdot F_5 = PT_a \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{n-1}}}{i} = 1 \right) = 120000 \cdot 3{,}5771 = 429251{,}6 \text{ руб-}$$

лей.

Анализ результатов расчётов по двум вариантам показывает, что текущая стоимость лизинга NPV_a больше, чем стоимость кредита NPV_k: $NPV_a > NPV_k$; $429251{,}6 > 343030{,}15$.

Проверим соотношение по формуле (7.24):

$\frac{120000}{0{,}30192} = 397456{,}28 < \frac{94960}{0{,}2374} = 400000$. Следовательно, аренда более предпочтительна для пользователя.

Контрольные вопросы по теме «Сложные проценты»

Раскройте сущность процесса аккумулирования (компаундинга), понятие будущей (наращенной) суммы FV, понятие множителя наращения (первая функция).

Дайте определение обратной функции будущей стоимости денег – текущей (современной) стоимости денег PV и дисконтного множителя (четвёртая функция).

Что такое будущая стоимость аннуитета FV - фактор фонда накопления при известном размере равномерных платежей PT (вторая функция)?

Дайте определение третьей функции – фактора фонда возмещения (нормы погашения основного долга) при известной будущей стоимости FV как обратной будущей стоимости аннуитета.

Приведите формулу расчёта текущей стоимости аннуитета PV при известном размере периодического платежа PT (пятая функция).

Приведите формулу расчёта обратной функции текущей стоимости аннуитета – взноса на амортизацию капитала, то есть ипотечной постоянной R_m.

Поясните два способа начисления сложных процентов и их реализацию в практических расчётах: авансовый – пренумерандо и декурсивный – постнумерандо).

Дайте определение номинальной и эффективной ставки сложных процентов.

Раскройте сущность правила 72-х.

Поясните порядок учёта векселей по ставкам сложных процентов.

Дайте определение размера платежей для начисления основной суммы долга (без процентов) – третья функция сложного процента.

Приведите методику расчёта размера платежей на амортизацию капитала и ипотечной постоянной.

Объясните методы Ринга и Инвуда и технику расчётов по самоамортизирующимся кредитам с погашением процента и основной суммы (равномерно-прямолинейный и равномерно-аннуитетный методы).

Укажите виды лизинговых договоров и особенности лизинговых финансовых расчётов.

Приведите методику расчёта амортизационных таблиц обслуживания кредита и лизинга.

Дайте сравнительную характеристику текущей стоимости кредита и лизинга.

Укажите особенности составления плана погашения по финансовому лизингу при аннуитетном характере платежей.

Решите следующие задачи.

Договор финансового лизинга PV=100000 рублей предусматривае равные годовые арендные платежи, срок контракта 10 лет, лизинговый процент 10%, остаточная стоимость оборудования $PV_{ост}$ = 5000 рублей. Рассчитать размер периодических платежей PT.

Кредит $PV = 5000$ рублей выдан банком на 3 года под 20% годовых. Рассчитать будущую (погашаемую) сумму FV.

Первоначальные инвестиции PV составили 90000 рублей на срок 4 года под 12% годовых. Найти доход от вложения денег при начислении процентов в начале каждого года.

Депозит в 70000 рублей положен на 3 года. Определить процентный платёж при простой и сложной ставках процента, равных 20%.

Члены жилищного кооператива планируют через 3 года отремонтировать дом. Ремонт будет стоить 30000 рублей. Рассчитать, сколько денег должны собирать (откладывать) жильцы ежегодно (PT) при ставке в 12% годовых, чтобы накопить требуемую сумму.

Коммерческий банк начисляет сложные проценты по ставке 12% годовых. Определить в годах срок, за который вклад в 40000 рублей возрастёт до 55000 рублей.

Какая сумма при ставке 6% больше: 1000 долларов сегодня или 2000 долларов через 8 лет?

Самостоятельная постановка задачи: предполагается взять ипотеку или кредит для некоей крупной покупки. Назначить самостоятельно сумму PV и срок выплаты. Обратиться в 2–3 банка за условиями получения такого кредита, вычислить FV и сделать сравнительный анализ полученных предложений.

Приложения

Таблица 1. Порядковые номера дней в обычном году

День месяца	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	62	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357

24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Таблица 2. Порядковые номера дней в високосном году

День месяца	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30		90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31		91		152		213	244		305		366

Таблица 3. Мультиплицирующий множитель $F_1=(1+i)^n$. Характеризует будущую стоимость денежной единицы на конец периода n

n\ i	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
1	1,050	1,060	1,070	1,080	1,090	1,100	1,110	1,120	1,130	1,140	1,150
2	1,102	1,124	1,145	1,166	1,188	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,322
3	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,621
4	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,518	1,574	1,630	1,689	1,749
5	1,276	1,338	1,403	1,469	1,532	1,611	1,685	1,762	1,842	1,925	2,011
6	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,870	1,974	2,082	2,195	2,313
7	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,076	2,211	2,353	2,502	2,660
8	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,305	2,476	2,658	2,853	3,059
9	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,558	2,773	3,004	3,004	3,518
10	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,549	2,839	3,106	3,395	3,395	4,046
11	1,710	1,898	2,105	2,332	2,580	2,853	3,152	3,479	3,836	4,226	4,652
12	1,796	2,012	2,252	2,518	2,813	3,138	3,498	3,896	4,334	4,818	5,350
13	1,886	2,133	2,410	2,720	3,066	3,452	3,883	4,363	4,898	5,492	6,153
14	1,980	2,261	2,579	2,937	3,342	3,797	4,310	4,887	5,535	6,261	7,076
15	2,079	2,397	2,759	3,172	3,642	4,177	4,785	5,474	6,254	7,138	8,137
16	2,183	2,540	2,952	3,426	3,970	4,595	5,311	6,130	7,067	8,137	9,358
17	2,292	2,693	3,159	3,700	4,328	5,054	5,895	6,866	7,986	9,276	10,761

18	2,407	2,854	3,380	3,996	4,717	5,560	6,543	7,690	9,024	10,575	12,375
19	2,527	3,026	3,616	4,316	5,142	6,116	7,263	8,613	10,197	12,055	14,232
20	2,653	3,207	3,870	4,661	5,604	6,727	8,062	9,646	11,523	13,743	16,366

Пояснение: один рубль, вложенный в банк на 11 базисных периодов (например, лет) под 12% процентов (годовых), к концу операции превратится в 3,479 руб. Подразумевается, что процентная ставка в этой и последующих финансовых таблицах соответствует длине базисного периода: так, если в первой графе таблицы пронумерованы кварталы, то процентная ставка – квартальная, если годы – годовая и др.

Таблица 4. Дисконтирующий множитель $F_4 = \frac{1}{(1+i)^n}$. Характеризует приведённую стоимость одной денежной единицы, ожидаемой к получению через n периодов.

n \ i	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
1	.952	.943	.935	.926	.917	.909	.901	.893	.885	.877	.870
2	.907	.890	.873	.857	.842	.826	.812	.797	.783	.769	.756
3	.864	.840	.816	.793	.772	.751	.731	.712	.693	.675	.658
4	.823	.792	.763	.735	.708	.683	.659	.636	.613	.592	.572
5	.784	.747	.713	.681	.650	.621	.593	.567	.543	.519	.497
6	.746	.705	.666	.630	.596	.564	.535	.507	.480	.456	.432
7	.711	.665	.623	.583	.547	.513	.482	.452	.425	.400	.376
8	.677	.627	.582	.540	.502	.467	.434	.404	.376	.351	.327
9	.645	.592	.544	.500	.460	.424	.391	.361	.333	.308	.284
10	.614	.558	.508	.463	.422	.386	.352	.322	.295	.270	.247
11	.585	.527	.475	.429	.388	.350	.317	.287	.261	.237	.215
12	.557	.497	.444	.397	.356	.319	.286	.257	.231	.208	.187
13	.530	.469	.415	.368	.326	.290	.258	.229	.204	.182	.163
14	.505	.442	.388	.340	.299	.263	.232	.205	.181	.160	.141
15	.481	.417	.362	.315	.275	.239	.209	.183	.160	.140	.123
16	.458	.394	.339	.292	.252	.218	.188	.163	.141	.123	.107
17	.436	.371	.317	.270	.231	.198	.170	.146	.125	.108	.093
18	.416	.350	.296	.250	.212	.180	.153	.130	.111	.095	.081
19	.396	.331	.277	.232	.194	.164	.138	.116	.098	.083	.070
20	.377	.312	.258	.215	.178	.149	.124	.104	.087	.073	.061

Пояснение: один рубль, обещаемый к получению через 6 базисных периодов (например, лет), с позиции текущего момента (т.е. момента, на который делается дисконтирование) оценивается по своей ценности в 0,564 руб. при условии, что устраивающая аналитика ставка дисконтирования равна 10% (годовых). Иными словами, инвестор готов отдать 0,564 руб. «сегодня», чтобы «завтра» (т.е. через шесть базисных периодов) получить 1 руб. Повышение процентной ставки, т.е. значения коэффициента дисконтирования, например, до

14% приводит к уменьшению ценности «будущего» 1 рубля до 0,456 руб. Это означает по сути, что инвестор более осторожно оценивает значимость «будущего» рубля как результата инвестиции.

Таблица 5. Мультиплицирующий множитель аннуитета.

$F_2 = \frac{(1+i)-1}{i}$. Характеризует будущую стоимость срочного аннуитета постнумерандо в одну денежную единицу продолжительностью в n периодов и начислением процентов по ставке i

n \ i	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	2.050	2.060	2.070	2.080	2.090	2.100	2.110	2.120	2.130	2.140	2.150
3	3.152	3.184	3.215	3.246	3.278	3.310	3.342	3.374	3.407	3.440	3.472
4	4.310	4.375	4.440	4.506	4.573	4.641	4.710	4.779	4.850	4.921	4.993
5	5.526	5.637	5.751	5.867	5.985	6.105	6.228	6.353	6.480	6.610	6.742
6	6.802	6.975	7.153	7.336	7.523	7.716	7.913	8.115	8.323	8.535	8.754
7	8.142	8.394	8.654	8.923	9.200	9.487	9.783	10.089	10.405	10.730	11.067
8	9.549	9.897	10.260	10.637	11.028	11.436	11.859	12.300	12.757	13.233	13.727
9	11.027	11.491	11.978	12.488	13.021	13.579	14.164	14.776	15.416	16.085	16.786
10	12.578	13.181	13.816	14.487	15.193	15.937	16.722	17.549	18.420	19.337	20.304
11	14.207	14.972	15.784	16.645	17.560	18.531	19.561	20.655	21.814	23.044	24.349
12	15.917	16.870	17.888	18.977	20.141	21.384	22.713	24.133	25.650	27.271	29.001
13	17.713	18.882	20.141	21.495	22.953	24.523	26.211	28.029	29.984	32.088	34.352
14	19.598	21.015	22.550	24.215	26.019	27.975	30.095	32.392	34.882	37.581	40.504
15	21.578	23.276	25.129	27.152	29.361	31.772	34.405	37.280	40.417	43.842	47.580
16	23.657	25.672	27.888	30.324	33.003	35.949	39.190	42.753	46.671	50.980	55.717
17	25.840	28.213	30.840	33.750	36.973	40.544	44.500	48.883	53.738	59.117	65.075
18	28.132	30.905	33.999	37.450	41.301	45.599	50.396	55.749	61.724	68.393	75.836
19	30.539	33.760	37.379	41.446	46.018	51.158	56.939	63.439	70.748	78.968	88.211
20	33.066	36.785	40.995	45.762	51.159	57.274	64.202	72.052	80.946	91.024	102.44

Пояснение: если ежегодно в течение пяти лет в конце года вносить в банк по одному рублю и не делать изъятий со счета, то к концу операции (т.е. к началу шестого года) на счете накопится 5,867 руб. при условии, что банк начисляет и капитализирует проценты по ставке 8% годовых; полученная величина представляет собой будущую стоимость единичного аннуитета. Если запросы инвестора в отношении доходности более существенны (например, его устраивает ставка в 10% годовых), то к концу операции на его счете будет 6,105 руб. Заметим, что интерпретация не меняется, если от года перейти к базисному периоду любой продолжительности; единственное, о чем нужно помнить, это об условии соответствия процентной ставки продолжительности базисного периода (например, базисный период – квартал, то и процентная ставка – квартальная).

Таблица 6. Дисконтирующий множитель для аннуитета $F_5 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{5}$. Характеризует дисконтированную (приведённую) стоимость срочного аннуитета постнумерандо с регулярным платежом, равным одной денежной единице, продолжительностью n периодов и дисконтированием по ставке i.

n \ i	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
1	.952	.943	.935	.926	.917	.909	.901	.893	.885	.877	.870
2	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736	1.713	1.690	1.668	1.647	1.626
3	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487	2.444	2.402	2.361	2.322	2.283
4	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170	3.102	3.037	2.974	2.914	2.855
5	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791	3.696	3.605	3.517	3.433	3.352
6	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355	4.231	4.111	3.998	3.889	3.784
7	5.787	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868	4.712	4.564	4.423	4.288	4.160
8	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335	5.146	4.968	4.799	4.639	4.487
9	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759	5.537	5.328	5.132	4.946	4.772
10	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145	5.889	5.650	5.426	5.216	5.019
11	8.306	7.887	7.499	7.139	6.805	6.495	6.207	5.938	5.687	5.453	5.234
12	8.863	8.384	7.943	7.536	7.161	6.814	6.492	6.194	5.918	5.660	5.421
13	9.394	8.853	8.358	7.904	7.487	7.013	6.750	6.424	6.122	5.842	5.583
14	9.899	9.295	8.745	8.244	7.786	7.367	6.982	6.628	6.302	6.002	5.724
15	10.380	9.712	9.108	8.560	8.061	7.606	7.191	6.811	6.462	6.142	5.847
16	10.838	10.106	9.447	8.851	8.313	7.824	7.379	6.974	6.604	6.265	5.954
17	11.274	10.477	9.763	9.122	8.544	8.022	7.549	7.120	6.729	6.373	6.047
18	11.690	10.828	10.059	9.372	8.756	8.201	7.702	7.250	6.840	6.467	6.128
19	12.085	11.158	10.336	9.604	8.950	8.365	7.839	7.366	6.938	6.550	6.198
20	12.462	11.470	10.594	9.818	9.129	8.514	7.963	7.469	7.025	6.623	6.259

Пояснение: представим ситуацию: инвесторам предлагается купить контракт, согласно которому в течение шести лет в конце очередного года покупатель контракта сможет получать сумму в один рубль. Если устраивающая инвестора А процентная ставка равна 14% годовых, то справедливая стоимость контракта равна 3,889 руб. Именно эту сумму инвестор А должен заплатить единовременно за возможность в течение шести лет получать по одному рублю по окончании очередного года. Если инвестор В более осторожен и устраивающая его доходность равна 15% годовых, то справедливая (с точки зрения уже этого инвестора) стоимость контракта будет ниже и составит 3,784 руб. Иными словами, для инвестора В текущая ценность контракта (т.е. ценность на момент инвестирования) ниже, нежели для инвестора А. Как и в предыдущей финансовой таблице,

суть интерпретации не меняется при переходе от года к базисному интервалу любой продолжительности.

Литература

1. Цымбаленко С.В. Финансовые вычисления: Учебное пособие / С.В. Цымбаленко, Т.Т. Цымбаленко. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 160 с.
2. Малыхин В.И. Финансовая математика: Учебное пособие для вузов / В.И. Малыхин. – 2-е изд., перераб. И доп – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 237 с.
3. Четыркин Е.М. Финансовая математика: учебник / Е.М. Четыркин. – 4-е изд. – М.: Дело, 2004. – 400 с.
4. Морошкин В.А. Практикум по финансовому менеджменту: технология финансовых расчётов с процентами: Учебное пособие / В.А. Морошкин, А.Л. Ломакин. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 112 с.
5. Жуленев С.В. Финансовая математика. Введение в классическую теорию / С.В. Жуленев. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 480 с.
6. Финансовый словарь / Благодатин А.А., Лозовский Л.Ш., Райзберг Б.А. – М.: ИНФРА-М. - 2003 г. – 378 с.
7. Бочаров П.П. Финансовая математика: Учебник / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. – 2-е изд. – М.: Физматгиз. – 2007. – 576 с.
8. Брусов П.Н. Финансовая математика: Учебное пособие для студентов / П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова, С.В. Скородулина. – М.: КноРус. – 2013 г. – 224 с.

Оглавление

Используемые обозначения.

Глава 1. Основные понятия и определения, используемые в финансовых вычислениях.

Контрольные вопросы по теме «Простые проценты».

Глава 2. Простые проценты и их применение в финансово-экономических расчётах.

Глава 3. Вексель. Историческая справка. Вексельное право.

Глава 4. Коммерческий расчётный счёт.

Глава 5. Форфейтная операция и арбитраж девиз.

Глава 6. Сложные проценты. Прямые функции сложных процентов.

6.1. Аккумулированная сумма капитала – первая функция сложного процента.

6.2. Будущая стоимость *n*-периодического аннуитета – вторая функция сложного процента.

6.3. Текущая стоимость аннуитета – пятая функция сложного процента.

Глава 7. Обратные функции сложных процентов.

7.1 Фактор фонда возмещения капитала – третья функций сложного процента.

7.2. Текущая стоимость будущего денежного потока – 4-я функция сложного процента.

7.3 Ипотечная постоянная, размер платежей для покрытия долга – 6-я функция сложного процента.

Контрольные вопросы по теме «Сложные проценты»

Приложения.