Г. И. Синкевич, О. Р. Полякова

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Конспект лекций

СПбГАСУ
1832

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Г. И. Синкевич, О. Р. Полякова

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ
Конспект лекций

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2024

УДК 517.31
ББК 22.161.1+22.161.5

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор *М. М. Воронина* (Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I);
канд. физ.-мат. наук, доцент *Н. В. Утина* (Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет)

Синкевич, Г. И.

Комплексный анализ : Конспект лекций : учебное пособие / Г. И. Синкевич, О. Р. Полякова ; Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет. – Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2024. – 116 с. – Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-9227-1335-1

Содержит исторический очерк о развитии теории функций комплексной переменной и курс лекций по комплексному анализу, включающий: вопросы арифметики и геометрии комплексных чисел; основное представление о функциях комплексной переменной, непрерывности и интегрируемости, интеграле Коши, теории рядов комплексной переменной, классификации нулей и особых точек; теорию вычетов с приложениями.

Предназначено для студентов СПбГАСУ, обучающихся по специальностям 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Ил. 16. Библиогр.: 11 назв.

Рекомендовано Учебно-методическим советом СПбГАСУ
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-9227-1335-1

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Мнимые числа впервые появились в работе итальянского математика XVI в. Джироламо Кардано (1501–1576). Создавая формулу решения кубического уравнения, в 1545 г. в книге «Великое искусство или о правилах алгебры» Кардано рассматривает неполные ($x^3 + ax = b,\ \ x^3 = ax + b,\ \ x^3 + b = ax$) и полное ($x^3 + ax^2 + bx + c = 0$) кубические уравнения и с помощью подстановок находит формулу, которую мы сегодня знаем под именем формулы Кардано:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Как видно из формулы, при поиске корня приходится решать вспомогательное квадратное уравнение, которое не всегда имеет действительные корни.

Джироламо Кардано
(1501–1576)

Кардано решился рассмотреть не только отрицательные числа (он называл их «чисто ложные»), но и комплексные (в его терминологии – «поистине софистические»). Он заметил, что если оперировать ими по некоторым естественным правилам (например, $-\sqrt{-5}\sqrt{-5}=5$), то квадратному уравнению, не имеющему действительных корней, можно приписать комплексные корни. Возможно, к комплексным числам Кардано пришел в связи с неприводимым случаем появления мнимых значений в промежуточных вычислениях. Если в этом случае без опасения выполнить все действия над возникающими в процессе вычислений комплексными числами, то в результате получаются правильные значения всех корней.

В XVII – начале XVIII в. были сделаны открытия и наблюдения, которые позже легли в основу теории мнимых величин: вопрос о логарифмах отрицательных чисел, обсуждавшийся И. Бернулли и Лейбницем, и формула Муавра (1707), которую сейчас мы знаем в виде

$$(\cos\alpha + i\ \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\ \sin n\alpha.$$

Математики, и прежде всего Лейбниц, сомневались, не приведет ли вычисление функции комплексного аргумента к какому-либо новому объекту, не являющемуся комплексным числом. Эйлер показал, что любое вычисление такого рода всегда приводит к комплексному числу, а именно, что $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, где x, y – действительные числа; u, v – действительные функции.

Общее утверждение, что корни алгебраического уравнения имеют в общем случае вид $a+b\sqrt{-1}$, первым высказал в 1742 г. в письме к Николаю I Бернулли Леонард Эйлер (1707–1783) – математик швейцарского происхождения, много лет работавший в Петербурге. В те же годы в различных статьях Эйлера появляются его знаменитые формулы связи тригонометрических и показательной функций:

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}, \sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

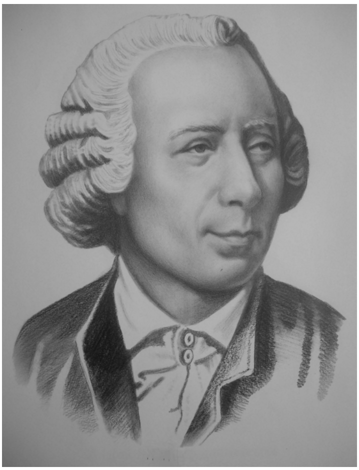
или, что тó же,

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v, e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\sin v,$$

а также формула для дуги

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{1+\sqrt{-1}\ \mathrm{tg}z}{1-\sqrt{-1}\ \mathrm{tg}z}$$

(ее вариант был представлен Эйлером и ранее – в 1728 г.).



Леонард Эйлер (1707–1783)

В 1777 г. Эйлер ввел знак мнимой единицы i (от термина Декарта imaginaire – мнимый), но в широкий математический обиход этот знак вошел только в середине XIX в. Термин «комплексное число» встречается у Карно в 1803 г., слово «сопряженный» применил Коши в 1821 г., термин «абсолютная величина» и знак модуля ввел Вейерштрасс в 1860-х гг.

В середине XVIII в. комплексные переменные получили чрезвычайно важное применение в решении уравнений с частными производными. Отправными точками для этого послужили гидродинамические исследования Даламбера и затем Эйлера.

Рассматривая в «Опыте новой теории сопротивления жидкостей» (1752) вопрос механики плоского движения идеальной жидкости, Даламбер привел его к определению двух функций: $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – проекций скорости частицы жидкости на оси координат – по уравнениям $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, означающим, что выражения $vdx + udy$ и $udv - vdy$ есть полные дифференциалы (теперь эти уравнения называют уравнениями Коши – Римана). С помощью условия полного дифференциала и несложных преобразований в комплексной области Даламбер представил искомые функции формулами, из которых следует, что u – это действительная часть некоторой произвольной функции комплексной переменной, а v – это коэффициент при i той же функции. В 1755 г. Эйлер пришел к тем же результатам, а позже установил, что действительная и мнимая части любой аналитической функции необходимо удовлетворяют этим условиям. В работах Эйлера была изложена теория элементарных функций комплексной переменной. В 1776 г. Эйлер исследовал вычисление определенных интегралов с помощью комплексных переменных, установив, что

$$\int f(z)\,dz = \int (udx - vdy) + i\int (vdx + udy),$$

где $f(z) = u + iv$.

Это позволило Пуассону в 1813 г. и Коши в 1814 г. ввести понятие криволинейного интеграла в комплексной области.

В связи с вопросом о построении географических карт Эйлер изучал задачу конформного отображения поверхностей в общей постановке, для чего использовал комплексную переменную.

В 1797 г. датский картограф Каспар Вессель (1745–1818) для удобного решения геодезических задач разработал векторное исчисление на плоскости, явившееся геометрической моделью алгебры комплексных чисел.

Представление комплексных чисел в виде точек плоскости получило признание с 1831 г., когда была опубликована работа немецкого математика Карла Гаусса (1777–1855) «Теория биквадратных вычетов», включавшая обоснование и геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Гаусс также исследовал широкий класс специальных функций, в том числе эллиптических. Независимо от него теорию эллиптических функций разработал норвежский математик Нильс Абель (1802–1829), исследования которого продолжил немецкий математик Карл Якоби (1804–1851), чья книга «Новые основания эллиптических функций» (1829) содержит теорию тэта-функций, теперь носящих его имя. Впоследствии тему эллиптических функций разрабатывали Ж. Лиувилль, Ш. Брио, Ж. Буке, Ш. Эрмит и А. Гурвиц.

Огромный вклад в теорию функции комплексной переменной внес французский математик Огюстен Коши (1789–1857). Он доказал теорему о независимости интеграла от пути интегрирования, построил теорию вычетов с ее приложениями, получил интегральную формулу и вывел из нее разложение в степенной ряд. Название «вычет» (остаток) объясняется, по-видимому, тем, что Коши пришел к этому понятию, отыскивая разность между интегралами, взятыми по таким двум путям, имеющим общее начало и конец, между которыми заключались полюсы функции.

Но Коши очень осторожно расширял класс однозначных функций, вводя лишь такие многозначные функции, производная которых однозначна. За пределами этого расширенного класса оставались алгебраические иррациональные функции и их интегралы, более всего интересовавшие математиков того времени.

В 1843 г. французский военный инженер и математик Пьер Лоран (1813–1854) опубликовал работу о разложении функции комплексной переменной, непрерывной и дифференцируемой в круговом кольце, в ряд по целым положительным и отрицательным степеням.

Огюстен Коши
(1789–1857)

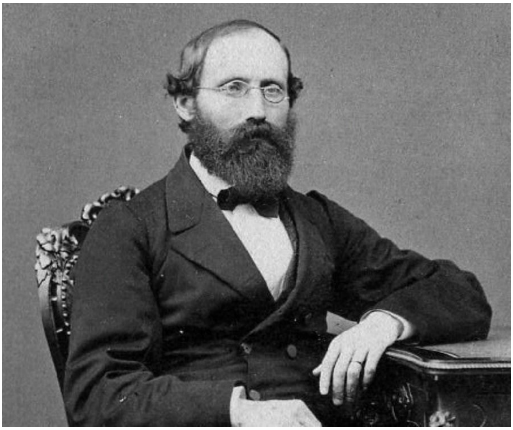
Пьер Альфонс Лоран
(1813–1854)

В 1862 г. выпускник Политехнической школы Парижа Эжен Руше (1832–1910) опубликовал статью, содержащую теорему о количестве нулей аналитических функций. Благодаря этому было получено еще одно доказательство основной теоремы высшей алгебры о том, что многочлен имеет столько корней, какова его степень.

В 1851 г. Бернгард Риман (1826–1866) представил свою знаменитую докторскую диссертацию «Основы общей теории функций комплексного переменного», определившую начало нового этапа в развитии теории аналитических функций и содержавшую исходные идеи топологии поверхностей (многолистные поверхности), а в 1857 г. развил эти идеи в «Теории абелевых функций». В своей диссертации Риман писал: «Существовавшие до настоящего времени методы изучения этих функций[1] имели в своей основе определение функции посредством формулы, позволяющей вычислить ее значение для каждого заданного значения аргумента; в нашем исследовании показывается, что в силу свойств, внутренне присущих функции комплексного переменного, в определении такого рода часть данных есть следствие остальных, и устанавливается, каким образом число данных может быть уменьшено и сведено строго к необходимому». В качестве примера применения принципов, на которых строится его работа, позволяющих определять поведение функции независимо от изображения ее той или иной формулой, Риман приводит следующую полную характеристику понятия алгебраической функции: это функция, для которой область изменения переменной z однократно или многократно простирается над всей бесконечной плоскостью, причем функция имеет разрывы, только обращаясь в бесконечность в конечном числе точек, и при этом такие, что порядок обращения в каждой из них конечен. Аналитическую функцию Риман определяет так: «Переменная величина w называется функцией другой переменной комплексной величины z, если она меняется вместе с ней так, что значение дифференциального частного dw/dz независимо

[1] Алгебраических, круговых, показательных, эллиптических и абелевых (см. *Риман Б.* Сочинения. М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. С. 81).

от значений дифференциала dz»[2]. Это влечет за собой уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$ т. е. то, что действительная и мнимая части аналитической функции комплексной переменной являются гармоническими функциями.



Бернгард Риман (1826–1866)

Понятие точек разветвления ввело в математику новый вид поверхностей, простертых одна над другой и особым образом скрепленных между собой. Риман ввел понятие порядка связности поверхности посредством проведения на ней разрезов, т. е. кривых, которые соединяют одну граничную точку поверхности с другой без самопересечений; каждый такой разрез следует представлять имеющим два берега. При этом если на поверхности проведено уже несколько разрезов, то при проведении нового разреза все точки прежних причисляются к граничным.

[2] *Риман Б.* Сочинения. М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. С. 50.

Поверхность называется односвязной, если любой разрез разбивает ее на раздельно лежащие части, т. е. лишает свойства связности. В ином случае поверхность называется многосвязной. Увеличенное на единицу число разрезов, необходимых для превращения данной поверхности в односвязную, называется порядком связности.

Риман сформулировал и доказал знаменитую теорему о существовании конформного отображения одной односвязной области на другую: «Две заданные односвязные плоские поверхности всегда можно так соотнести между собой, что каждой точке одной соответствует одна непрерывно вместе с ней перемещающаяся точка другой и их соответствующие части подобны в малом; при этом можно для одной внутренней и одной граничной точки выбрать им соответствующие произвольно; тогда соотношение будет определено и для всех точек».[3]

С 1850-х гг. немецкий математик Карл Вейерштрасс (1815–1897) читал лекции по аналитическим функциям. Он самостоятельно получил результаты Коши и Лорана, изложил идею аналитического продолжения степенных рядов. В лекциях Вейерштрасса теория аналитических функций приобрела строгость, обоснованность и завершенность. Именно ему математический анализ обязан своей классической формой. Вейерштрасс положил в основу всего анализа теорию действительных чисел, предложил в качестве универсального средства построения строгих доказательств принцип существования верхней и нижней границ ограниченного множества. Он убедительно продемонстрировал сложность поведения непрерывной функции, построив пример нигде не дифференцируемой функции (его предшественником в этом был Больцано). Вейерштрассу удалось показать, что самая

[3] *Риман Б.* Сочинения. М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. С. 83.

простая и идеальная по своим хорошим свойствам функция – многочлен – способна с точностью до произвольно малого числа воспроизводить значения любой непрерывной функции.

Карл Вейерштрасс (1815–1897)

Вейерштрасс поставил систему степенных рядов, связанных между собой отношением аналитического продолжения, в центр теории аналитических функций, довел до высокой степени совершенства теорию эллиптических функций, заложил основы теории целых функций и увенчал все теорией абелевых функций – наиболее значительным достижением анализа XIX в. Он заложил основы теории аналитических функций многих комплексных переменных, сделал существенные шаги вперед в вариационном исчислении, теории минимальных поверхностей и линейной алгебре. Работы Вейерштрасса по теории функций комплексной переменной продолжили его ученики Г. Миттаг-Леффлер и Г. Шварц.

Уильям Гамильтон (1805−1865)

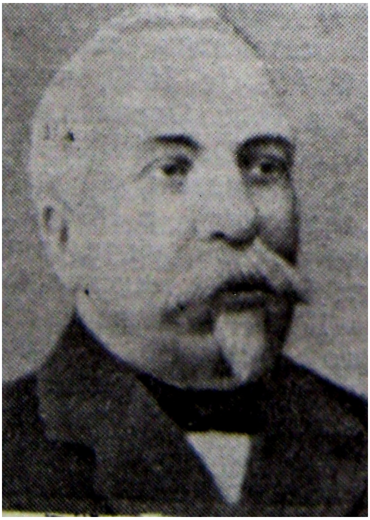
Сэр Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865) – королевский астроном Ирландии, математик, механик-теоретик, физик-теоретик. Гамильтон определил вектор как перенос. Его символ i означает, во-первых, единичный вектор оси Ox, во-вторых, мнимую единицу и, в-третьих, оператор вращения – верзор.

В 1835 г. Гамильтон опубликовал работу «Теория алгебраических пар» (Theory of Algebraic Couples), в которой дал новое построение теории комплексных чисел. Это была следующая форма ($z = (a,b)$) комплексных чисел после алгебраической ($z = a + bi$), тригонометрической ($z = r\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$) и показательной ($z = re^{i\varphi}$). Гамильтон стал рассматривать комплексное число $x + iy$ как алгебраическую пару (x, y) действительных чисел, т. е. устранил геометрический элемент и свел комплексные числа к чистой алгебре, что позволило перейти к новому уровню геометрического обобщения – повороту и растяжению на плоскости. Это дало возможность формализовать методы матфизики в задачах потока жидкости или тепла, гравитации, звуке, оптике. Но эти задачи решались в двумерном пространстве. Гамильтон хотел распространить систему комплексных чисел на трехмерное пространство, но обнаружил трудности с определением умножения – нарушался либо коммутативный закон, либо закон дистрибутивности. Результатом этих рассуждений явилась операция векторного умножения и созданная им теория кватернионов. На базе этой теории в конце XIX в. в работах Дж. У. Гиббса и О. Хевисайда возник векторный анализ.

Вклад российских ученых в теорию функций комплексной переменной берет начало в открытии Н. И. Лобачевским в 1826 г. неевклидовой геометрии. В течение последующих десятилетий математики постепенно убеждались в значении этого открытия для теории аналитических функций, а именно в том, что геометрия Лобачевского есть вместе с тем и геометрия аналитических функций одной комплексной переменной.

В 1850 г. профессор Петербургского университета И. И. Сомов издал первый русский учебник по теории функций комплексной переменной «Основания теории аналитических функций». В 1866 г. была опубликована докторская диссертация М. Е. Ващенко-Захарченко «Риманова теория функций составного переменного».

Первым по-настоящему оригинальным российским исследователем в области теории аналитических функций комплексной переменной был Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842–1927), «научный внук» Коши.



Юлиан Васильевич Сохоцкий
(1842–1927)

Юлиан Карл Сохоцкий родился в Варшаве в семье чиновника. Он учился в Петербургском университете, который закончил в 1866 г., а в 1868 г. защитил магистерскую диссертацию «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями». С 1868 г. Сохоцкий преподавал в Петербургском университете, а с 1869 по 1909 г. – в Институте гражданских инженеров (ныне СПбГАСУ), где в 1874–1909 гг. был профессором кафедры математики. В 1873 г. защитил докторскую диссертацию «Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды».

В магистерской диссертации Сохоцкого исследованы приложения теории вычетов к обращению степенного ряда (ряда Лагранжа) и особенно к разложению аналитических функций в непрерывные дроби, а также к многочленам Лагранжа. В предисловии, отмечая значение теории вычетов для математического анализа, Сохоцкий указывал, что «исчисление интегральных вычетов вовсе не разрабатывается учеными нынешнего времени... В настоящем рассуждении я излагаю общие начала исчисления интегральных вычетов и показываю некоторые из его применений, именно такие, которых я вовсе не нашел между работами Коши или же нашел их изложение не в столь простой и наглядной форме, в какой мне удалось их представить».[4] В этой работе сформулирована и доказана знаменитая теорема о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Сохоцкий излагает ее в следующем виде: «Если данная функция $f(z)$ в некоторой точке z_0 обращается в бесконечного порядка, то непременно в этой же точке функция $f(z)$ должна принимать всевозможные значения». Здесь существенно особая точка названа точкой, в которой $f(z)$ «обращается в ∞ бесконечного порядка» (имеется ввиду характер разложения функции $f(z)$ в окрестности z_0), а под значениями функции $f(z)$ в точке z_0 Сохоцкий подразумевает множество предельных значений функции в этой точке. Это явствует как из примеров, указываемых им ранее (например, $\sin\dfrac{1}{z-b}$ «в точке $z = b$ принимает всевозможные значения»), так и из приводимых для доказательства рассуждений, по существу не отличающихся от современных. Эта теорема в том же году была опубликована итальянским математиком Казорати, а восемью годами позднее – Вейерштрассом в статье «К теории однозначных аналитических функций». Поэтому ее можно назвать теоремой Сохоцкого – Казорати – Вейерштрасса.

[4] Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями. Рассуждение Ю. Сохоцкаго, написанное им на степень магистра математики. С-Петербург, 1868. 130 с. По определению Физ-Мат Факультета печатать дозволяется. С-Петербург, 7 марта 1868. Декан А. Бекетов. С. 3.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Комплексное число. Действия над комплексными числами

Комплексное число z характеризуется парой действительных чисел (a, b) с установленным порядком следования чисел a и b. Это условие записывается в виде $z = (a, b)$. Число a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $a = \mathrm{Re}z$; число b называется *комплексной частью* z и обозначается $b = \mathrm{Im}z$.

Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ *равны* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т. е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2, b_1 = b_2)$.

Суммой комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a, b)$, где $a = a_1 + a_2$; $b = b_1 + b_2$. При таком определении сохраняются переместительный и сочетательный законы сложения, т. е. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; и $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

Нулем называется такое комплексное число 0, сумма которого с любым комплексным числом равна этому числу, т. е. $z + 0 = z$. Очевидно, что существует единственное комплексное число $0 = (0, 0)$, обладающее этим свойством.

Произведением комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z = (a, b)$ такое, что $a = a_1 a_2 - b_1 b_2$; $b = a_1 b_2 - a_2 b_1$. При таком определении произведения выполняются переместительный, сочетательный и распределительный законы, т. е. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ и $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Включим действительные числа во множество комплексных чисел, рассматривая действительное число a как комплексное число $a = (a, 0)$. Тогда, как следует из определения действий сложения и умножения, для комплексных чисел сохраняются известные правила действий над действительными числами. Поэтому множество комплексных чисел рассматривается как расширение множества действительных чисел (но без упорядочения). Заметим, что умножение на единицу (1,0) не изменяет комплексного числа.

Комплексное число вида $z = (0, b)$ называется *чисто мнимым* и символически обозначается $z = ib$. Чисто мнимое число $(0, b) = ib$ можно рассматривать как произведение мнимой единицы (0, 1) и действительного числа $(b, 0)$. *Мнимую единицу* обычно обозначают символом $(0, 1) = i$. В силу определения произведения комплексных чисел справедливо соотношение $i \cdot i = i^2 = -1$. Оно позволяет придать прямой алгебраический смысл так называемой *алгебраической форме* записи комплексного числа $z = (a, b) = a + bi$ и производить операции сложения и умножения комплексных чисел по обычным правилам алгебры многочленов.

Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно сопряженным* числу $z = a + bi$.

Операция *вычитания* комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению. Комплексное число $z = a + bi$ называется *разностью* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, если $a = a_1 - a_2$; $b = b_1 - b_2$.

Операция *деления* комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению. Комплексное число $z = a + bi$ называется *частным* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i \neq 0$, если $z_1 = z \cdot z_2$. Отсюда следует, что действительная часть a и мнимая часть b частного z определяются из линейной системы уравнений $\begin{cases} a_2 a - b_2 b = a_1 \\ b_2 a + a_2 b = b_1 \end{cases}$ с определителем $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Решив эту систему, получим

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

1.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Так как комплексное число определяется как пара действительных чисел, естественно изобразить $z = a + bi$ как точку плоскости (x, y) с декартовыми координатами $x = a$ и $y = b$. Число $z = 0$ ставится в соответствие началу координат. Такую плоскость будем называть *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью* комплексной плоскости. При этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости, а также между множеством всех комплексных чисел $z = a + bi$ и множеством *свободных векторов*, проекции x и y которых на оси абсцисс и ординат соответственно равны a и b.

Важной является и *другая форма представления* комплексных чисел. Для определения положения точки на плоскости можно пользоваться полярными координатами (ρ, φ), где ρ – расстояние точки от начала координат, а φ – угол, который составляет радиус-вектор данной точки с положительным направлением оси абсцисс. Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки $(-\infty < \varphi < +\infty)$. Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат $x = \rho \cdot \cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$, получим *тригонометрическую форму* записи комплексного числа: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. При этом ρ обычно называют *модулем*, а φ – *аргументом* комплексного числа и обозначают как $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$. Отсюда следует, что $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$ (учитывая знаки a и b при выборе φ).

Отметим, что аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до аддитивного слагаемого, кратного 2π. Иногда удобно через $\operatorname{Arg} z$ обозначать значение аргумента, заключенное в пределах $\varphi_0 \le \arg z < 2\pi + \varphi_0$, где φ_0 – произвольное фиксированное число, например $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \pi$. Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ вообще не определен, а его модуль равен нулю.

Два отличных от нуля комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их модули, а значения аргументов или равны, или отличаются на кратное число периодов.

Комплексно сопряженные числа имеют один и тот же модуль, а значения их аргументов при соответствующем выборе областей их изменения различаются знаком.

Используя известную формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа: $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$.

Можно отождествить операции сложения и вычитания комплексных чисел с соответствующими операциями над векторами (рис. 1).

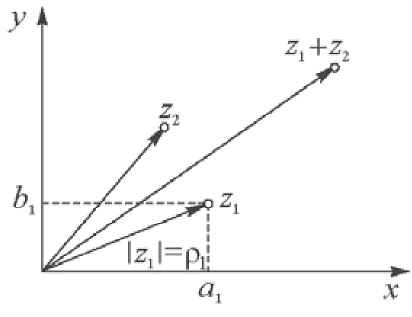


Рис. 1

При этом легко установить неравенства треугольника:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|; \; |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|.$$

Модули разности двух комплексных чисел имеют геометрический смысл расстояния между соответствующими точками на координатной плоскости.

Отметим, кроме того, очевидные неравенства $|z| \geq a; |z| \geq b$.

Для выполнения *операции умножения* удобно пользоваться тригонометрической формой представления комплексных чисел. Согласно правилам умножения получаем

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) +$$
$$+ i \cdot \rho_1 \cdot \rho_2(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Отсюда $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$; $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

В случае *деления* комплексных чисел при $\rho_2 \neq 0$ аналогично $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

1.3. Извлечение корня из комплексного числа

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа удобны при рассмотрении алгебраических операций возведения комплексного числа в целую положительную степень и извлечения корня из комплексного числа.

Если $z = z_1^n$, то $\rho = \rho_1^n$ и $\varphi = n \cdot \varphi_1$.

Комплексное число $z_1 = \sqrt[n]{z}$ называется корнем n-й степени из комплексного числа z_1, если $z = z_1^n$, откуда следует, что $\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$ и $\varphi = \frac{\varphi}{n}$.

Как уже говорилось, аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до аддитивного слагаемого, кратного 2π. Поэтому из выражения для аргумента комплексного числа z_1 $\varphi_k = \dfrac{\varphi_0}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}$, где φ_0 – одно из значений аргумента комплексного числа z_1, получим, что существуют различные комплексные числа, которые при возведении в n-ю степень равны одному и тому же комплексному числу z. Модули этих комплексных чисел одинаковы и равны $\sqrt[n]{\rho}$, а аргументы различаются на число, кратное $\dfrac{2\pi}{n}$. Число различных значений n-й степени из комплексного числа z равно n. Точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-й степени и комплексного числа z, расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке $z = 0$. Соответствующие значения φ_k получаются при $k = 0, 1, ..., n-1$.

Классический анализ поставил задачу так расширить множество действительных чисел, чтобы не только элементарные алгебраические операции сложения и умножения, но и операция извлечения корня не выводила из этого расширенного множества. Как видим, введение комплексных чисел решает эту задачу.

1.4. Примеры

1. Найти все значения $\sqrt{i}$. Записав в показательной форме комплексное число $z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, получим для значений квадратного корня из этого комплексного числа выражения $z_k = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi k}{2}}$, $k = 0, 1$ (рис. 2):

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

$$z_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

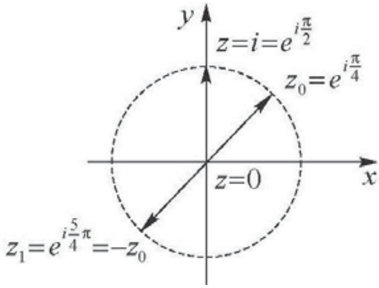


Рис. 2

2. Найти все значения $\sqrt[p]{1}$, где $p > 0$ – целое число. Воспользовавшись представлением $1 = e^{i\cdot 0}$, как и в предыдущем случае, получим $z_k = e^{i\cdot\frac{2\pi}{p}\cdot k}$, $k = 0, ..., p-1.$ Следовательно

$$z_0 = e^{i\cdot 0} = 1;$$

$$z_1 = e^{i\cdot\frac{2\pi}{p}} = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p};$$

$$z_{p-1} = e^{i\cdot\frac{2\pi}{p}\cdot(p-1)} = e^{-i\cdot\frac{2\pi}{p}} = \cos\frac{2\pi}{p} - i\sin\frac{2\pi}{p}.$$

То есть корень p-й степени из 1 имеет ровно p различных значений. Эти комплексные числа соответствуют вершинам правильного p-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в точке $z = 0$, причем одна из вершин лежит в точке $z = 1$.

3. Найти все значения $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$. Так как $z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, то для значений квадратного корня из данного комплексного числа получим выражения $z_k = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{2\pi k}{2}}$, $k = 0, 1$. Отсюда

$$z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}};$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}} = -z_0 .$$

Итак, для извлечения корня n-й степени из комплексного числа надо перейти к показательной форме записи комплексного числа, извлечь корень n-й степени из модуля данного комплексного числа (берется арифметическое – действительное и положительное – значение корня), а аргумент данного комплексного числа разделить на n. Для получения всех значений корня надо иметь в виду многозначность аргумента.

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

2.1. Определение сходящейся последовательности

Для построения теории функции комплексной переменной большое значение имеет перенесение основных идей анализа в комплексную область. Одним из фундаментальных понятий анализа является понятие предела и, в частности, понятие сходящейся числовой последовательности. Аналогичную роль играют соответствующие понятия и в области комплексных чисел. При этом многие определения, связанные с предельным переходом, полностью повторяют соответствующие определения теории функций действительной переменной.

Последовательностью комплексных чисел называется перенумерованное бесконечное множество комплексных чисел. В дальнейшем последовательность комплексных чисел мы будем обозначать символом $\{z_n\}$. Комплексные числа z_n, образующие последовательность $\{z_n\}$, называются ее элементами. Определение не исключает возможности повторяющихся элементов (в частности, все элементы последовательности могут быть равны друг другу).

Число z называется пределом последовательности $\{z_n\}$*, если для любого положительного числа* ε *можно указать такой номер* $N(\varepsilon)$*, начиная с которого все элементы последовательности удовлетворяют неравенству* $|z - z_n| < \varepsilon$ *при* $|z_n| \geq N(\varepsilon)$.

Последовательность $\{z_n\}$*, имеющая предел z, называется сходящейся к числу z, что записывается в виде* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Для геометрической интерпретации предельного перехода в комплексной области удобно использовать понятие ε-окрестности точки комплексной плоскости.

Множество точек z комплексной плоскости, лежащих внутри окружности радиусом ε *с центром в точке* $z_0, \left(\left|z - z_0\right| < \varepsilon\right)$, *называется* ε*-окрестностью точки* z_0.

Из этого определения следует, что *точка z является пределом сходящейся последовательности* $\{z_n\}$, *если в любой* ε*-окрестности точки z лежат все элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера, зависящего от* ε.

Поскольку каждое комплексное число $z_n = a_n + b_n i$ характеризуется парой действительных чисел a_n и b_n, то последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, составленные, соответственно, из действительных и мнимых частей элементов z_n последовательности $\{z_n\}$.

Теорема 1.1. *Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности* $\{z_n\}$ *является сходимость последовательностей действительных чисел* $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ $z_n = a_n + b_n i$.

Доказательство. В самом деле, если последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу $z = a + bi$, то для любого $\varepsilon > 0$ $\left|a_n - a\right| \le \left|z_n - z\right| < \varepsilon$ и $\left|b_n - b\right| < \varepsilon$ при $n \ge N(\varepsilon)$. Это и доказывает сходимость последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ к a и b соответственно. Обратное утверждение следует из соотношения $\left|z_n - z\right| = \sqrt{\left(a_n - a\right)^2 + \left(b_n - b\right)^2}$, где a и b – пределы последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$; $z = a + bi$.

Последовательность $\{z_n\}$ *называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что для всех элементов* z_n *этой последовательности имеет место неравенство* $\left|z_n\right| < M$. Основное свойство ограниченной последовательности характеризует следующая теорема.

Теорема 1.2. *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

2.2. Критерий Коши

При исследовании сходимости последовательности во многих случаях удобным оказывается необходимый и достаточный признак сходимости, известный под названием критерия Коши.

Критерий Коши. *Последовательность* $\{z_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $N(\varepsilon)$*, что* $|z_n - z_{n+m}| < \varepsilon$ *при* $n \geq N(\varepsilon)$ *и для любого номера* $m \geq 0$.

2.3. Бесконечно удаленная точка

Введем понятие бесконечно удаленной точки комплексной плоскости, существенное для дальнейшего. Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ такая, что для любого положительного числа R найдется номер N, начиная с которого члены последовательности удовлетворяют условию $|z_n|>R$ при $n \geq N$. Такую последовательность назовем неограниченно возрастающей. Согласно введенным ранее определениям, данная последовательность, как и всякая ее подпоследовательность, предела не имеет. Такое положение неограниченно возрастающей последовательности вызывает ряд неудобств. Чтобы избежать этого, введем комплексное число $z = \infty$ и *будем считать всякую неограниченно возрастающую последовательность сходящейся к этому числу*, которому поставим в соответствие бесконечно удаленную точку комплексной плоскости. Введем понятие полной комплексной плоскости, состоящей из обычной комплексной плоскости и единственного бесконечно удаленного элемента – бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Заметим, что аргумент комплексного числа ∞ не определен, так же как и его действительная и мнимая части. Если мы воспользуемся геометрической иллюстрацией, ставя в соответствие элементам неограниченно возрастающей последовательности $\{z_n\}$ точки комплексной плоскости, то обнаружим, что точки рассматриваемой последовательности с возрастанием их номера располагаются вне концентрических кругов с центром в начале координат, радиусы которых могут быть сколь угодно большими. Отметим, что точки данной последовательности стремятся к точке ∞ *независимо от направления* на полной комплексной плоскости.

Определим алгебраические свойства числа $z = \infty$. Из элементов неограниченно возрастающей последовательности $\{z_n\}$ составим последовательность $\left\{\dfrac{1}{z_n}\right\}$. Она сходится к точке $z = 0$. Действительно, из предыдущих рассмотрений следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что $\left|\dfrac{1}{z_n}\right| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Очевидно и обратное утверждение: если последовательность $\{\zeta_n\}$ сходится к нулю и состоит из отличных от нуля элементов, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{\zeta_n}\right\}$ сходится к бесконечно удаленной точке.

В связи с этим полагают $\dfrac{1}{\infty} = 0$ и $\dfrac{1}{0} = \infty$. Вообще, для бесконечно удаленной точки устанавливаются соотношения $z \cdot \infty = \infty$ при $z \neq 0$ и $z + \infty = \infty$, $\dfrac{z}{\infty} = 0$ при $z \neq \infty$, которые естественны с точки зрения предельного перехода в операциях сложения и умножения. С этой точки зрения операция $\dfrac{\infty}{\infty}$ является неопределенной.

3. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

3.1. Основные определения

Введем понятие функции комплексной переменной. Вводится оно так же, как и понятие функции действительной переменной. Будем говорить, что на множестве E комплексной плоскости задана функция комплексной переменной, если задан закон, ставящий в соответствие каждой точке множества E некоторое комплексное число. Множество E будем называть множеством значений независимой переменной. Структура этого множества может быть весьма сложной и разнообразной, однако в теории функций комплексной переменной рассматривают множества специальной структуры.

Для дальнейшего нам потребуется ряд вспомогательных понятий.

Точка z называется *внутренней точкой множества* E, если существует ε-окрестность точки z, все точки которой принадлежат множеству E. Например, точка z множества $|z| \leq 1$ является внутренней, если $|z| < 1$; точка $z = 1$ не является внутренней точкой данного множества.

Множество E называется областью, если выполняются следующие условия: 1) *каждая точка множества E – внутренняя точка этого множества*; 2) *любые две точки множества E можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат E.*

В данном определении второе требование является условием связности области. Например, множество точек $|z| < 1$ образует область. Точно так же и ε-окрестность точки z_0 $\left(|z - z_0| < \varepsilon \right)$ образует область. Множество точек $|z| \leq 1$ не является областью, так как не все его точки являются внутренними. Также не являются областями множество точек $|z| \neq 1$ и множество $\{|z| < 1, |z-4| < 2\}$, поскольку они не являются связными.

Для обозначения области обычно применяются буквы J, G, D. Точка z является *внешней точкой области* J, если существует такая ε-окрестность z, все точки которой не принадлежат J.

Точка z называется *граничной точкой области* J, если в любой ее ε-окрестности содержатся как точки, принадлежащие области J, так и точки, не принадлежащие ей. Например, точка $z = 1$ является граничной точкой области $|z| < 1$. *Совокупность всех граничных точек образует границу области*. В дальнейшем границу области мы будем обозначать буквами γ, Г, C. Простейшим примером границы, очевидно, является кривая, однако граница области может состоять и из дискретного множества точек. Например, множество точек $|z| \neq 0$ образует на комплексной плоскости область, границей которой является точка $z = 0$.

Множество, полученное присоединением к области всех ее граничных точек, называется замкнутой областью. Замкнутую область обычно обозначают, ставя черту над символом области, например: $\overline{J}, \overline{G}, \overline{D}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать те случаи, когда граница области представляет собой одну или несколько кусочно-гладких кривых, которые, в частности, могут вырождаться в отдельные точки. При этом будут рассматриваться как одно-, так и многосвязные области. Например, область $|z - i| < 2$ является односвязной областью, граница которой – окружность $|z - i| = 2$; круговое кольцо$1 < |z| < 2$ представляет собой двусвязную область; множество точек $z \neq 0$ – односвязную область и т. д.

Если область J целиком лежит внутри некоторого круга конечного радиуса, то она является *ограниченной*, в противном случае – *неограниченной*.

Мы будем рассматривать в основном те случаи, когда множество E значений комплексной переменной представляет собой область J или замкнутую область $\overline{J}$ комплексной плоскости. Тогда *однозначная функция комплексной переменной z, заданная в области J, определяется законом, ставящим каждому значению z из области J в соответствие определенное комплексное число w*. Символически указанное соответствие будем записывать в виде $w = f(z)$.

Множество комплексных чисел w, соответствующих всем $z \in J$, называется *множеством значений функции* $f(z)$. Поскольку каждое комплексное число характеризуется парой действительных чисел, то задание комплексной функции $w = u + iv$ комплексной переменной $z = z + iy$ эквивалентно заданию двух действительных функций двух действительных переменных, что может быть записано в виде $w(z) = u(x, y) + iv\ (x, y)$.

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определены в области J плоскости действительных переменных (x, y), соответствующей области J комплексной плоскости z. Функция $u(x, y)$ называется *действительной*, а функция $v(x, y)$ – *мнимой* частью функции $w = f(z)$. В дальнейшем, если это не будет оговорено особо, мы всегда будем пользоваться этим представлением, обозначая действительную часть функции $f(z)$ символом u, мнимую – символом v.

Часто рассматривают многозначные функции комплексной переменной, когда каждому значению $z \in J$ ставится в соответствие несколько комплексных чисел. Здесь мы будем рассматривать только однозначные функции комплексной переменной.

Геометрическая интерпретация понятия функции $f(z)$ комплексной переменной заключается в том, что равенством $w = f(z)$ устанавливается закон соответствия между точками области J комплексной плоскости z и точками области G комплексной плоскости w. Очевидно устанавливается и обратное соответствие – каждой точке $w \in G$ ставится в соответствие одна или несколько точек z области J. Это означает, что в области G задана однозначная или многозначная функция комплексной переменной w: $z = \varphi(w)$. Эта функция называется обратной функции $f(z)$. Область G задания функции $\varphi(w)$, очевидно, является областью значений функции $f(z)$. Если функция $\varphi(w)$, обратная однозначной функции $f(z)$, заданной в области J, является однозначной функцией в области G, то между областями J и G установлено взаимно однозначное соответствие.

Функция $f(z)$ называется однолистной функцией в области J, если в различных точках z этой области она принимает различные значения.

Из этого определения следует, что функция, обратная однолистной, является однозначной.

3.2. Непрерывность

Перейдем к понятию непрерывности функции комплексной переменной. Пусть функция $f(z)$ определена на некотором множестве E. Рассмотрим различные последовательности точек этого множества $\{z_n\}$, сходящиеся к некоторой точке z_0 и состоящие из точек z_n, отличных от точки z_0 (т. е. $z_n \neq z_0$), и соответствующие им последовательности значений функции $\{f(z_n)\}$. При этом предполагается, что точка z_0 является точкой сгущения множества E, т. е. существуют последовательности $\{z_n\}$ точек этого множества, сходящиеся к точке z_0. *Если независимо от выбора последовательности $\{z_n\}$ существует единственный предел $\lim\limits_{z_n \to z_0} f(z_n) = w_0$, то этот предел называется предельным значением, или пределом функции $f(z)$ в точке z_0, что записывается в виде $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.*

Часто употребляется и другое, эквивалентное, определение понятия предельного значения (предела) функции.

Число w_0 *называется предельным значением функции* $f(z)$ *в точке* z_0, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что для всех точек* $z \in E$ *и удовлетворяющих условию* $0 < |z - z_0| < \delta$ *имеет место неравенство* $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. Заметим, что второе определение, в отличие от первого, имеет смысл лишь для конечных значений z_0 и w_0.

Как и в случае действительной переменной, очень важным является *понятие непрерывности* функции. Начнем с понятия непрерывности в точке. При этом будем считать, что точка z_0, в которой определяется это понятие, обязательно принадлежит множеству E задания функции.

Функция $f(z)$, *заданная на множестве* E, *называется непрерывной в точке* $z_0 \in E$, *если предельное значение этой функции в точке* z_0 *существует, конечно и совпадает со значением* $f(z_0)$ *функции* $f(z)$ *в точке* z_0, *т. е.* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Это определение непрерывности распространяется как на внутренние, так и на граничные точки множества. Если точка z_0 является изолированной точкой множества E (т. е. существует такая ε-окрестность точки z_0, в которой нет других точек множества E), то функция $f(z)$ по определению считается непрерывной в точке z_0.

Если функция $f(z)$, заданная на множестве E, непрерывна во всех точках этого множества, то говорят, что функция $f(z)$ непрерывна на множестве E. В частности, мы будем рассматривать функции, непрерывные в области, в замкнутой области и на кривой. Заметим, что в силу данных определений следует рассматривать предельные значения функции $f(z)$ лишь на последовательностях точек, принадлежащих данной области.

С помощью ε-δ-определения предельного значения условия непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 можно также сформулировать следующим образом: *функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если для любого* ε > 0 *можно указать такое* δ > 0, *что для всех точек z $z \in E$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.* Геометрически это означает, что функция комплексной переменной, непрерывная в некоторой точке z_0, ставит в соответствие каждой точке из δ-окрестности точки z_0 некоторую точку, принадлежащую ε-окрестности точки $w_0 = f(z_0)$.

Заметим, что данные определения понятия непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 справедливы не только в случае конечной точки z_0, но и в случае бесконечно удаленной точки $z_0 = \infty$. При этом под предельным значением функции $f(z)$ в точке ∞, в силу первого определения предела, надо понимать предел последовательности $\{f(z_n)\}$, где $\{z_n\}$ – любая неограниченная возрастающая последовательность. Во втором определении непрерывности условие $|z - z_0| < \delta$ надо заменить на условие $|z| > R$.

Из непрерывности функции комплексной переменной $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ следует непрерывность ее действительной $u(x, y)$ и мнимой $v(x, y)$ частей по совокупности переменных x, y. Имеет место и обратное утверждение: если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ есть непрерывные функции по совокупности переменных x, y в некоторой точке (x_0, y_0), то $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является функцией комплексной переменной $z = x + iy$, непрерывной в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Данные утверждения вытекают из того, что необходимым и достаточным условием сходимости последовательности комплексных чисел является сходимость последовательностей их действительных и мнимых частей.

Это позволяет нам перенести на функции комплексной переменной основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных. Так, сумма и произведение двух функций комплексной переменной $f_1(z)$ и $f_2(z)$, непрерывных в области J, также являются непрерывными функциями в этой области; функция $\varphi(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ непрерывна в тех точках области J, где $f_2(z) \neq 0$, и т. д.

3.3. Пример

Рассмотрим линейную функцию $f(z) = w = az + b$. Здесь $a \neq 0$, b – заданные комплексные постоянные. Функция $f(z) =$ $= w = az + b$ определена при всех значениях независимой переменной z. Областью ее задания является полная комплексная плоскость.

В дальнейшем мы будем говорить, что функция комплексной переменной $f(z)$ определена на всей комплексной плоскости, если она определена для всех значений комплексного аргумента z, ограниченных по модулю, и будем говорить, что $f(z)$ определена на полной комплексной плоскости, если она задана и при $z = \infty$. В нашем примере $f(\infty) = \infty$.

Каждому значению z соответствует только одно значение w, т. е. $f(z)$ – однозначная функция z. Очевидно, что обратная функция $\varphi(w)=z=\dfrac{1}{a}w-\dfrac{b}{a}=a_1w=b_1$ обладает теми же свойствами, что и $f(z)$. Таким образом, $f(z)$ – однолистная функция z на полной комплексной плоскости, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между плоскостями z и w. В силу непрерывности действительной и мнимой частей $f(z)$ по совокупности переменных x, y эта функция непрерывна на всей комплексной плоскости (при любых конечных значениях x, y). Чтобы выяснить геометрический смысл данного соответствия, рассмотрим вспомогательную функцию $\zeta = az$. На основании правила умножения комплексных чисел имеем $\zeta = |a| \cdot |z| \cdot \left(\cos\left(\arg a + \arg z\right) + i \sin\left(\arg a + \arg z\right)\right)$. Отсюда следует $|\zeta| = |a| \cdot |z|$, $\arg \zeta = \arg z + \arg a$. То есть функция $\zeta = az$ любому комплексному числу z ставит в соответствие комплексное число ζ, модуль которого в $|a|$ раз больше модуля z, а аргумент получается из аргумента z прибавлением постоянного слагаемого – аргумента комплексного числа a. Геометрический смысл этого преобразования очевиден: подобное растяжение плоскости z в $|a|$ раз и поворот этой плоскости как целого вокруг точки $z = 0$ на угол $\arg a$.

Возвращаясь к функции $f(z) = w = az + b$, которую теперь можно записать в виде $w = \zeta + b$, видим, что геометрический смысл последнего преобразования состоит в сдвиге плоскости z, характеризуемом вектором b.

Итак, линейная функция преобразует комплексную плоскость z в комплексную плоскость w путем подобного растяжения, поворота и сдвига.

3.4. Основные элементарные функции комплексной переменной

1. *Дробно-рациональная функция* $w = \dfrac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}$.

В частности, рациональной функцией является многочлен $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

2. *Показательная функция* e^z определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots$.

Показательная функция e^z обладает следующими свойствами:

1) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, где z_1 и z_2 – любые комплексные величины;

2) $e^{z+2k\pi i}=e^z$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$, т. е. e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

3. *Тригонометрические функции* $\sin z$ и $\cos z$ определяются степенными рядами $\sin z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$; $\cos z = 1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}=\ldots$, абсолютно сходящимися при любом комплексном значении z. Функции $\sin z$ и $\cos z$ – периодические (с действительным периодом 2π) и имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ соответственно, где $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

Для функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ имеют место формулы Эйлера:

$$e^{iz}=\cos z + i\sin z;$$

$$e^{-iz}=\cos z - i\sin z,$$

откуда

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}.$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. *Гиперболические функции* $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$\sin z = -i \operatorname{sh} iz$; $\cos z = \operatorname{ch} z$; $\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz$; $\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz$;

$\operatorname{sh} z = -i \sin iz$; $\operatorname{ch} z = \cos iz$; $\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz$; $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz$.

5. *Логарифмическая функция* $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Эта функция является многозначной. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется то, которое получается при $k = 0$; оно обозначается $\ln z$: $\ln z = \ln|z| = i \arg z$.

Очевидно, что $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

6. *Обратные тригонометрические функции* $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ определяются как функции, обратные, соответственно, функциям $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $\operatorname{ctg} w$.

Например, если $z = \sin w$, то w называется арксинусом числа z и обозначается $w = \arcsin z$.

Все эти функции многозначные и выражаются через следующие логарифмические функции:

$$\arcsin z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right);$$

$$\arccos z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right);$$

$$\operatorname{arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz};$$

$$\operatorname{arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}.$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

7. *Общая степенная функция* $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ – любое комплексное число, определяется равенством $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$. Эта функция, вообще говоря, многозначная, ее главное значение равно $z^a = e^{a \ln z}$.

8. *Общая показательная функция* $w = a^z$ $(a \neq 0)$ – любое комплексное число определяется равенством $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$. Главное значение этой многозначной функции $a^z = e^{z \ln a}$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Определение. Условия Коши – Римана

До сих пор теория функций комплексной переменной строилась в полной аналогии с теорией функций действительной переменной. Однако понятие дифференцируемой функции комплексной переменной, введенное по аналогии с соответствующим понятием теории функций действительной переменной, приводит к существенным различиям.

Дадим определение производной функции комплексной переменной. Пусть в области J комплексной плоскости z задана функция $f(z)$. *Если для точки* $z_0 \in J$ *существует при* $\Delta z \to 0$ *предел* (*предельное значение*) *разностного отношения* $\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, *то этот предел называется производной функции* $f(z)$ *по комплексной переменной* z *в точке* z_0 *и обозначается* $f'(z_0)$, *т. е.* $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$. Функция $f(z)$ в этом случае называется *дифференцируемой* в точке z_0. Подчеркнем еще раз, что если существует указанный предел, то он не зависит от способа стремления Δz к нулю, т. е. от способа приближения точки $(z_0 + \Delta z)$ к точке z_0. Требование дифференцируемости функции комплексной переменной в точке z_0 накладывает весьма важные условия на поведение действительной и мнимой частей этой функции в окрестности точки (x_0, y_0). Эти условия, известные под названием *условий Коши – Римана*, могут быть сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 1.3. *Если функция* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *дифференцируема в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, *то в точке* (x_0, y_0) *существуют частные производные функций* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *по переменным* x, y, *причем имеют место соотношения* $\dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$. Эти соотношения обычно называют соотношениями Коши – Римана.

Доказательство. По условию теоремы существует предел $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, не зависящий от способа стремления Δz к нулю. Положим $\Delta z = \Delta x$ и рассмотрим выражение

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} +$$
$$+ i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Из существования предела комплексного выражения следует существование пределов его действительной и мнимой частей. Поэтому в точке x_0, y_0 существуют частные производные по x функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, а также имеет место формула

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0).$$

Полагая $\Delta z = i\Delta y$, находим:

$$f'(z_0) = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} +$$
$$+ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$
$$= -iu'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0).$$

Сравнивая две последние формулы, убеждаемся в справедливости исходных соотношений. Справедлива также и обратная теорема.

Теорема 1.4. *Если в точке* (x_0, y_0) *функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *дифференцируемы, а их частные производные связаны соотношениями Коши – Римана, то функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *является дифференцируемой функцией комплексной переменной* z *в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$.

Если функция $f(z)$ *дифференцируема во всех точках некоторой области* J, *а ее производная непрерывна в этой области, то функция* $f(z)$ *называется аналитической (или регулярной) функцией в области* J[5].

Как известно, непрерывность частных производных является достаточным условием существования первого дифференциала (дифференцируемости) функции многих переменных. Поэтому из теорем 1.3 и 1.4 следует, что *необходимым и достаточным условием аналитичности функции* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *в области* J *является существование в этой области непрерывных частных производных функций* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$, *связанных соотношениями Коши – Римана.*

Понятие аналитической функции является основным понятием теории функций комплексной переменной в силу особой роли, которую играет класс аналитических функций как при решении многочисленных чисто математических проблем, так и при различных приложениях функций комплексной переменной в смежных областях естествознания.

Соотношения Коши – Римана часто используются при исследовании различных свойств аналитических функций.

[5] Приведенное здесь определение аналитической функции отличается от обычно принятого в литературе дополнительным требованием непрерывности производной. Это сделано для облегчения последующих доказательств. Кроме того, более подробное исследование показывает, что математическое содержание понятия аналитической функции при этом не меняется.

При этом равенства

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

не являются единственно возможной формой соотношений Коши – Римана. Как можно убедиться самостоятельно, действительная и мнимая части аналитической функции $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$ комплексной переменной $z = \rho e^{i\varphi}$ связаны соотношениями $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho}$, где ρ и φ – полярные координаты точки (x, y). Аналогичным образом легко установить, что модуль и аргумент аналитической функции $f(z) = R(x, y)\, e^{i\Phi(x, y)}$ связаны соотношениями $\dfrac{\partial R}{\partial x} = R\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y} = -R\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Отметим также, что исходные соотношения Коши – Римана $\dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$ позволяют получить различные выражения для производной функции комплексной переменной:

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = v'_y(x, y) + iv'_x(x, y) =$$
$$= u'_x(x, y) - iu'_y(x, y) = v'_y(x, y) - iu'_y(x, y).$$

При этом каждый раз производная $f'(z)$ выражается через частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

4.2. Свойства аналитических функций

Определение производной $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ позволяет перенести на аналитические функции комплексной переменной ряд свойств дифференцируемых функций действительной переменной.

1. Если $f_1(z)$ и f_2 – аналитические функции в области J, то их сумма и произведение также являются аналитическими функциями в области J, а функция $\varphi(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ является аналитической функцией всюду, где $f_2(z)\neq 0$.

2. Если $w = f(z)$ является аналитической функцией в области J плоскости комплексной переменной z, причем в области ее значений G на плоскости w определена аналитическая функция $\zeta = \varphi(w)$, то функция $F(z) = \varphi(f(z))$ является аналитической функцией комплексной переменной z в области J.

3. Если в области J определена аналитическая функция $f(z)$, причем $|f'(z)|\neq 0$, то в области G значений функции $f(z)$ определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией w. При этом если $w_0 = f(z_0)$, то имеет место соотношение $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w_0)}$.

Доказательство. Для существования обратной функции необходимо, чтобы уравнения $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ можно было разрешить относительно x, y в области J. Для этого достаточно, чтобы выполнялось условие $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x v'_y - u'_y v'_x \neq 0$.

В силу соотношений Коши – Римана это условие можно переписать в виде $u'_{x^2} + v'_{x^2} \neq 0$. В силу условия $|f'(z)|\neq 0$ это выполняется. Тем самым существование обратной функции $z = \varphi(w)$ доказано. Составив разностное отношение $\dfrac{\Delta z}{\Delta w}=\dfrac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}}$, легко доказать существование и непрерывность производной $\varphi'(w_0)$ при условии $|f'(z_0)|\neq 0$.

4. Пусть в области J плоскости x, y задана функция $u(x, y)$, являющаяся действительной частью аналитической функции $f(z)$. Тогда мнимая часть этой функции определяется с точностью до аддитивной постоянной. Действительно, в силу условия Коши – Римана, по заданной функции $u(x, y)$ однозначно определяется полный дифференциал неизвестной функции $v(x, y)$: $dv = v'_x dx + v'_y dy = -u'_y dx + u'_x dy$, что и доказывает высказанное утверждение.

5. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области J. Рассмотрим в соответствующей области плоскости x, y семейства кривых $u(x, y) = C$ и $v(x, y) = C$, представляющие собой линии уровней действительной и мнимой частей функции $f(z)$. С помощью соотношений Коши – Римана легко показать, что во всех точках данной области $\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u'_x v'_x + u'_y v'_y = -u'_x u'_y + u'_y u'_x = 0$. Так как градиент ортогонален линии уровня, семейства кривых $u(x, y) = C$ и $v(x, y) = C$ взаимно ортогональны.

4.3. Геометрический смысл производной функции комплексной переменной

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в некоторой области J. Выберем какую-либо точку $z_0 \in J$ и проведем через нее произвольную кривую γ_1, целиком лежащую в J (здесь и далее, если это не оговорено особо, под произвольной кривой мы понимаем гладкую кривую). Функция $f(z)$ производит отображение области J комплексной плоскости z на некоторую область G комплексной плоскости w. Пусть точка z_0 переходит в точку w_0, а кривая γ_1 – в проходящую через w_0 кривую Γ_1 (рис. 3, 4). По условию существует производная $f'(z)$ функции $w = f(z)$ в точке w_0. Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$, и представим комплексное число $f'(z_0)$ в показательной форме:

$f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha}$. Условие $f'(z_0) \neq 0$ необходимо для возможности такого представления.

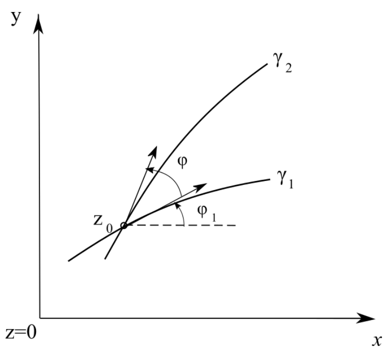


Рис. 3

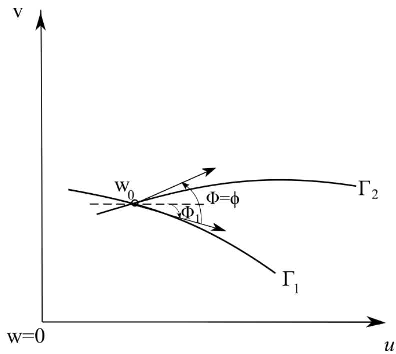


Рис. 4

Выберем такой способ стремления Δz к нулю, при котором точки $z = z_0 + \Delta z$ лежат на кривой γ_1. Очевидно, что соответствующие им точки $w = w_0 + \Delta w$ лежат на кривой Γ_1. Комплексные числа Δz и Δw изображаются векторами секущих к кривым γ_1 и Γ_1 соответственно. Заметим, что $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ имеют геометрический смысл углов соответствующих векторов с положительными направлениями осей x и u, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ представляют собой длины этих векторов. При $z \to 0$ векторы секущих переходят в векторы касательных к соответствующим кривым. Из формулы $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha}$ следует, что

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1,$$

т. е. аргумент α производной имеет геометрический смысл разности угла Φ_1 вектора касательной к кривой Γ_1 в точке w_0 с осью u и угла φ_1 вектора касательной к кривой γ_1 в точке z_0 с осью x (см. рис. 3, 4).

Так как производная $f'(z_0)$ не зависит от способа предельного перехода, то эта разность будет той же и для любой другой кривой, проходящей через точку z_0, хотя значения самих углов Φ_1 и φ_1 могут измениться. Отсюда следует, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией $f(z)$, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ между любыми кривыми γ_2 и γ_1, пересекающимися в точке z_0, равен углу $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ между их образами, т. е. кривыми Γ_2 и Γ_1, пересекающимися в точке $w_0 = f(z_0)$. Заметим, что при этом сохраняются не только абсолютная величина углов между кривыми γ_2 и γ_1 и их образами, но и направление углов. Это свойство данного отображения носит название *свойства сохранения углов*.

Аналогично из $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha}$ получим

$$k = \left|f'(z_0)\right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

То есть с точностью до величин более высокого порядка малости имеет место равенство $|\Delta w| = k\,|\Delta z|$. Заметим, что и это соотношение не зависит от выбора кривой γ_1. Геометрический смысл этого соотношения состоит в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причем $f'(z_0)$ определяет коэффициент преобразования подобия. Это свойство данного отображения носит название *свойства постоянства растяжения*.

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое аналитической функцией $w = f(z)$ и обладающее в точке z_0 свойством сохранения углов и постоянством растяжений, называется конформным отображением. При конформном отображении окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0 бесконечно малые треугольники с вершиной в точке z_0 преобразуются в подобные им бесконечно малые треугольники с вершиной в точке w_0.

4.4. Примеры

Отметим, что, как легко проверить, введенные ранее линейная функция и функция $w = z^2$ являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости; функция $w = \frac{1}{z}$ является аналитической всюду, за исключением точки $z = 0$. Так как определение производной $f(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ аналогично определению производной функции одной действительной переменной, то для производных данных функций комплексной переменной имеют место следующие выражения:

$$(az+b)' = a, \left(z^2\right)' = 2z, \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}.$$

Рассмотрим функцию комплексной переменной e^z, широко применяющуюся в приложениях. Определим эту функцию, задав аналитическое выражение ее действительной и мнимой частей:

$$u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y.$$

На действительной оси эта функция совпадает с действительной функцией e^x действительного аргумента x и, как будет показано далее, в комплексной области сохраняет основные свойства экспоненты. Поэтому для нее естественно сохранить обозначение $e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy}$.

Покажем, что e^z является аналитической функцией на всей комплексной плоскости z. Для этого проверим выполнение условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

и заметим, что все производные в этих равенствах непрерывны по совокупности аргументов на всей плоскости x, y. Проводя вычисление производной e^z по формуле

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = v'_y(x, y) + iv'_x(x, y) =$$
$$= u'_x(x, y) - iu'_y(x, y) = v'_y(x, y) - iu'_y(x, y),$$

получаем $\left(e^z\right)' = u'_x + iv'_x = e^x\left(\cos y + i \sin y\right) = e^z$.

Аналогично $\left(e^{\alpha z}\right)' = \alpha e^{\alpha z}$, где α – произвольная комплексная постоянная.

Рассмотрим еще две функции: $f_1(z)$ и $f_2(z)$, определенные с помощью соотношений $f_1(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$, $f_2(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$.

Как легко видеть, для действительных значений комплексной переменной $z = x$ эти функции совпадают с $\cos x$ и $\sin x$, поэтому для них естественно сохранить прежние обозначения. Позже мы изучим свойства этих функций, а сейчас лишь отметим, что $\cos z$ и $\sin z$, как сложные функции от аналитической функции, также являются аналитическими на всей комплексной плоскости. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\left(\cos z\right)' = -\sin z$. Действительно, с помощью формулы $\left(e^{\alpha z}\right)' = \alpha e^{\alpha z}$ получим $f_1'(z) = \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -f_2(z)$. Аналогично прямое вычисление дает $f_1^2(z) + f_2^2(z) \equiv 1$, так как, согласно правилу возведения комплексного числа в целую степень, из формулы $e^z = e^x\left(\cos y + i \sin y\right) = e^x \cdot e^{iy}$ получим $\left(e^{\alpha z}\right)^2 = e^{2\alpha z}$.

5. ИНТЕГРАЛ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. Определение и основные свойства

Пусть на комплексной плоскости z задана кусочно-гладкая кривая C. Используя параметрическое представление кривой C, зададим координаты ξ, η каждой ее точки уравнениями $\xi = \xi(t), \eta = \eta(t)$, где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – кусочно-гладкие функции действительного параметра t, изменяющегося в пределах $\alpha \le t \le \beta$, α и β могут, соответственно, принимать значения, удовлетворяющие условию $\left(\xi'(t)\right)^2 + \left(\eta'(t)\right)^2 \neq 0$. Задание координат ξ, η этой кривой C эквивалентно заданию комплексной функции $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ действительной переменной t.

Пусть в каждой точке ζ кривой C определено значение функции $f(\zeta)$. Важным понятием в теории функций комплексной переменной является понятие интеграла от функции $f(\zeta)$ по кривой C. Это понятие вводится следующим образом. Разобьем кривую C на n частичных дуг точками деления $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$, соответствующими возрастающим значениям параметра t ($t_i + 1 > t_i$. Обозначим $\Delta\zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}$ и составим сумму $S\left(\zeta_i, \zeta_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\zeta_i\right) \Delta\zeta_i$, где ζ_i – произвольная точка i-й частичной дуги.

Если при $\max\left|\Delta\zeta_i\right| \to 0$ *существует предел указанных сумм, не зависящий ни от способа разбиения кривой C, ни от выбора точек* ζ_i, *то этот предел называется интегралом от функции* $f(\zeta)$ *по кривой C и обозначается* $\int\limits_C f(\zeta)\, d\zeta$.

Вопрос существования интеграла сводится к вопросу о существовании некоторых криволинейных интегралов от действительной u и мнимой v частей функции $f(z)$.

Интеграл $\int\limits_C f(\zeta)\, d\zeta$ представим в виде

$$\int\limits_C f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_C u\,d\xi - v\,d\eta + i\int\limits_C u\,d\eta + v\,d\xi .$$

Это соотношение может само служить определением интеграла от функции $f(z)$ по кривой C. Из него вытекает ряд свойств, являющихся очевидными следствиями соответствующих свойств криволинейных интегралов:

1) $\int\limits_{AB} f(\zeta)\,d\zeta = -\int\limits_{BA} f(\zeta)\,d\zeta$;

2) $\int\limits_{C_1} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{C_2} f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{C_1+C_2} f(\zeta)\,d\zeta$;

3) если a – комплексная постоянная, то $\int\limits_C a\,f(\zeta)\,d\zeta = a\int\limits_C f(\zeta)\,d\zeta$;

4) $\int\limits_C \left(f_1(\zeta) + f_2(\zeta)\right)d\zeta = \int\limits_C f_1(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_C f_2(\zeta)\,d\zeta$;

5) $\left|\int\limits_C f(\zeta)\,d\zeta\right| \le \int\limits_C \left|f(\zeta)\right| ds$, где ds – дифференциал длины дуги кривой C, а интеграл, стоящий справа, – криволинейный интеграл первого рода;

6) имеет место следующая формула замены переменной интегрирования: $\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_\Gamma f\left(\varphi(\zeta)\right)\varphi'(\zeta)$ где $z = \varphi(\zeta)$ – аналитическая функция ζ, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между кривыми C и Γ. В частности, $\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f\left(z(t)\right)z'(t)\,dt$, где $z = z(t)$ есть параметрическое задание кривой C, а $z(\alpha)$ и $z(\beta)$ – начальная и конечная точки этой кривой.

Пример. Рассмотрим существенный для дальнейшего пример вычисления интеграла по комплексной переменной: найдем интеграл $I = \int\limits_{C_\rho} \dfrac{d\zeta}{\zeta - z_0}$, где кривая C_ρ представляет собой окружность радиусом ρ с центром в точке z_0, обходимую против часовой стрелки. Воспользовавшись параметрической формой задания кривой C_ρ $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ $\left(0 \le \varphi \le 2\pi\right)$, получим $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$. Отсюда следует, что интеграл $I = \int\limits_{C_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$ не зависит ни от ρ, ни от z_0.

В дальнейшем мы будем рассматривать интегралы от функций, аналитических в некоторой ограниченной области, причем нас в основном будет интересовать тот случай, когда границей области является кусочно-гладкая замкнутая кривая, не имеющая самопересечений. *Кусочно-гладкую замкнутую кривую, не имеющую точек самопересечения, будем называть замкнутым контуром*. Если функция $z\left(t\right)$ $\left(\alpha \le t \le \beta\right)$ задает параметрически замкнутый контур, то она удовлетворяет условию $z\left(t_i\right) \ne z\left(t_k\right)$ при $t_i \ne t_k$, за исключением случая $t_i = \alpha, t_k = \beta$. Интеграл $\int\limits_C f\left(\zeta\right) d\zeta$ по замкнутому контуру называют *контурным интегралом*.

5.2. Теорема Коши

Поскольку значение контурного интеграла зависит от направления интегрирования, условимся в качестве *положительного направления обхода* контура принимать направление, при котором внутренняя область, ограниченная данным замкнутым контуром, остается *слева* от направления движения. Интегрирование в положительном направлении будем обозначать символом $\int\limits_{C^+} f\left(z\right) dz$ или просто $\int\limits_C f\left(z\right) dz$, интегрирование в отрицательном направлении – символом $\int\limits_{C^-} f\left(z\right) dz$.

Свойства интегралов по замкнутому контуру от функций, аналитических внутри области, ограниченной данным контуром, во многом определяются свойствами криволинейных интегралов второго рода. Как известно, для криволинейных интегралов по замкнутому контуру справедливо следующее утверждение: *если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{J}$, ограниченной кусочно-гладким контуром C, а их частные производные первого порядка непрерывны в J, то* $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_J \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы.

Теорема 1.5. Теорема Коши. *Пусть в односвязной области J задана однозначная аналитическая функция $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции $f(z)$ по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области J, равен нулю.*

Доказательство. Согласно формуле

$$\int\limits_C f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_C u\,d\xi - v\,d\eta + i\int\limits_C u\,d\eta + v\,d\xi,$$

имеем $\int\limits_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\int\limits_\Gamma u\,dx + v\,dy.$

Так как функция $f(z)$ – аналитическая всюду внутри контура Γ, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в области, ограниченной этим контуром, обладают непрерывными частными производными первого порядка. Поэтому к криволинейным интегралам, стоящим в правой части последнего равенства, можно применить формулу $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_J \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$. Кроме того, частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ связаны соотношениями Коши – Римана. Поэтому

$$\int_{\Gamma} u\,dx - v\,dy = \iint_{J} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy = 0;$$

$$\int_{\Gamma} v\,dx - u\,dy = \iint_{J} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy = 0,$$

что и доказывает теорему.

Итак, теорема Коши устанавливает факт равенства нулю интеграла от аналитической функции по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в односвязной области ее аналитичности. При дополнительном условии непрерывности функции в замкнутой области это утверждение справедливо и для замкнутого контура, являющегося границей области аналитичности. Последнее утверждение фактически является несколько видоизмененной формулировкой теоремы Коши, но ввиду важности для практических приложений мы выделим его в отдельную теорему.

Теорема 1.6. Вторая формулировка теоремы Коши. *Если функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области J, ограниченной кусочно-гладким контуром C, и непрерывна в замкнутой области $\overline{J}$, то интеграл от функции $f(z)$ по границе C области J равен нулю*: $\int_{C} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$

Теорема Коши устанавливает одно из основных свойств аналитической функции комплексной переменной; ее легко обобщить и на многосвязную область. В этом случае полная граница области состоит из нескольких замкнутых контуров: внешнего C_0 и внутренних – $C_1, C_2, \ldots, C_n$. *Положительным направлением обхода полной границы* многосвязной области будем называть такое движение, при котором *область все время остается слева*. При этом внешний контур обходится в положительном, а внутренние – в отрицательном направлении.

Теорема 1.7. *Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в многосвязной области J, ограниченной извне контуром C_0, а изнутри контурами $C_1, C_2, ..., C_n$, и пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{J}$. Тогда $\int\limits_C f(\zeta)\,d\zeta = 0$, где C – полная граница области J, состоящая из контуров $C_1, C_2, ..., C_n$, причем обход границы C происходит в положительном направлении.*

Доказательство. Проведем гладкие кривые $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, соединяющие контур C_0 с контурами $C_1, C_2, ..., C_n$ (рис. 5). Тогда область, ограниченная кривыми $C_1, C_2, ..., C_n$ и кривыми $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, проходимыми в противоположных направлениях, оказывается односвязной. Как нетрудно убедиться, кривые $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ можно выбрать так, чтобы они не пересекались, т. е. мы получим действительно односвязную область. В силу теоремы 1.6 интеграл по границе этой области равен нулю. Но интегралы по вспомогательным кривым $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ проходятся дважды в противоположных направлениях и при суммировании интегралов аннулируются. Поэтому имеет место равенство

$$\int\limits_{C_0^+} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{C_1^-} f(\zeta)\,d\zeta + ... + \int\limits_{C_n^-} f(\zeta)\,d\zeta = 0,$$

где верхние индексы у C_i указывают направление обхода (рис. 5).

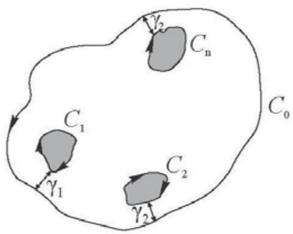


Рис. 5

5.3. Неопределенный интеграл

Важным следствием теоремы Коши является следующее положение. Пусть функция $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области J. Фиксируем в этой области некоторую точку z_0 и обозначим через $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ интеграл по какой-либо кривой, целиком лежащей в J и соединяющей точки z и z_0. В силу теоремы Коши этот интеграл не зависит от выбора кривой интегрирования в области J и является однозначной функцией z: $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z)$.

Теорема 1.8. *Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна в некоторой односвязной области J, а интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру* Γ, *целиком лежащему в данной области, равен нулю. Тогда функция* $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$, *где* $z, z_0 \in J$, *является аналитической функцией в области J, и* $\Phi'(z) = f(z)$.

Эта теорема позволяет ввести понятие неопределенного интеграла функции комплексной переменной. Аналитическая функция $\Phi(z)$ называется *неопределенным интегралом*, или *первообразной*, аналитической функции $f(z)$ в области J, если в этой области имеет место соотношение $\Phi'(z) = f(z)$. Очевидно, что функция $f(z)$ имеет множество различных первообразных, но, как легко показать, все они отличаются лишь постоянными слагаемыми. Действительно, поскольку $\Phi'(z) = \Phi_1'(z) - \Phi_2'(z) \equiv 0$, где $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ – различные первообразные функции $f(z)$, то из формулы

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = v'_y(x, y) + iv'_x(x, y) =$$
$$= u'_x(x, y) - iu'_y(x, y) = v'_y(x, y) - iu'_y(x, y)$$

следует, что все частные производные действительной и мнимой частей функции $\Phi(z)$ тождественно равны нулю, откуда по известной теореме анализа получим $\Phi(z) \equiv 0$. Отсюда следует, что, как и в случае функции действительной переменной, справедлива формула $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta = F(z_2) - F(z_1)$, где $F(z)$ – любая первообразная функции $f(z)$.

6. ИНТЕГРАЛ КОШИ

6.1. Вывод формулы Коши

В предыдущей лекции мы доказали теорему Коши. Она влечет за собой ряд важных следствий, в частности позволяет установить определенную связь между значениями аналитической функции во внутренних точках области ее аналитичности и граничными значениями этой функции. Эта связь выражается формулой $f\left(z_0\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\dfrac{f\left(\zeta\right)}{\zeta-z_0}\,d\zeta.$

Этот интеграл выражает значение аналитической функции $f(z)$ в некоторой точке z_0 через ее значения на любом контуре Г*, лежащем в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащем точку z_0 внутри, и называется интегралом Коши.*

Замечание 1. В последней формуле интегрирование производится по замкнутому контуру Г, целиком лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри точку z_0. При дополнительном условии непрерывности $f(z)$ в замкнутой области $\overline{J}$, в силу теоремы 1.6, аналогичная формула справедлива и при интегрировании по границе C области J.

Замечание 2. Приведенные рассуждения справедливы и для многосвязной области J. При этом для вывода основной формулы $f\left(z_0\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\dfrac{f\left(\zeta\right)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$ следует рассматривать такой замкнутый контур Г, который может быть стянут к точке z_0, все время оставаясь в области J. Тогда легко показать, что при условии непрерывности функции $f(z)$ в замкнутой области $\overline{J}$ с кусочно-гладкой границей формула $f\left(z_0\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\dfrac{f\left(\zeta\right)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$ остается справедливой при интегрировании в положительном направлении по полной границе C данной многосвязной области.

6.2. Следствия из формулы Коши

Сделаем ряд замечаний по поводу формулы

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \, d\zeta.$$

1. Интеграл вида $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \, d\zeta$ по замкнутому контуру Г, целиком лежащему в области J аналитичности функции $f(z)$, имеет смысл для любого положения точки z_0 на комплексной плоскости при условии, что эта точка не лежит на контуре Г. При этом, если точка z_0 лежит внутри Г, значение интеграла равно $f(z_0)$, если вне Г – нулю, поскольку в этом случае подынтегральная функция аналитическая всюду внутри Г. Итак,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} = \begin{cases} f(z_0),\ z_0 \text{ внутри } \Gamma, \\ 0,\ z_0 \qquad \text{вне } \Gamma. \end{cases}$$

2. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области J и z_0 – некоторая внутренняя точка этой области. Опишем из этой точки окружность радиусом R_0, целиком лежащую в области J. Тогда по формуле Коши получим $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \, d\zeta$.

Но на окружности C_{R_0} выполняется $\zeta = z_0 + R_0 e^{i\varphi}$, поэтому $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi}) \, d\varphi$, или $f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0} \int_{C_{R_0}} f(\zeta) \, ds.$

Эта формула носит название *формулы среднего значения* и выражает значение аналитической функции в центре окружности как среднее из ее граничных значений.

6.3. Принцип максимума модуля аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области J и непрерывной в замкнутой области $\overline{J}$. Тогда или $|f(z)| \equiv \mathrm{const}$, или максимальные значения $|f(z)|$ достигаются только на границе области.

Если $f(z)$ принимает максимальное значение M в некоторой внутренней точке области, то $|f(z)| \equiv \mathrm{M}$ во всей области. Согласно соотношениям $\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ аргумент аналитической функции $f(z)$ также сохраняет постоянное значение в области J, следовательно, если модуль аналитической функции постоянен в некоторой области, то эта функция тождественно равна постоянной в данной области. Таким образом, если функция $|f(z)|$ не является постоянной величиной в области J, то она не может достигать своего максимального значения во внутренних точках J. Но так как функция, непрерывная в замкнутой области, достигает своего максимального значения в какой-либо точке этой области, то в последнем случае функция $|f(z)|$ должна достигать своего максимального значения в граничных точках.

Сделаем последнее замечание: *если аналитическая в области J функция $f(z)$ не равна нулю ни в одной точке этой области и непрерывна в $\overline{J}$, то имеет место принцип минимума модуля этой функции*. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть функцию $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ и воспользоваться принципом максимума ее модуля.

6.4. Производная аналитической функции

Производная аналитической функции также является аналитической функцией.

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция на замкнутом контуре C и в ограниченной этим контуром области. Тогда, в соответствии с интегральной формулой Коши, $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$, где z – любая точка внутри рассматриваемой области (рис. 6).

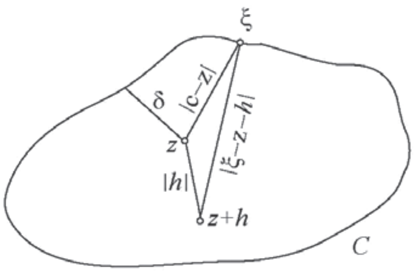


Рис. 6

Отсюда, составив отношение $\dfrac{f'(z+h)-f'(z)}{h}$ и перейдя к пределу при $h\to 0$, можно путем аналогичных выкладок получить, что $f''(z)=\dfrac{2}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}$.

Также доказывается, что при любом целом $n>0$ $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$. Для удобства запоминания отметим, что формально формулы производных можно получить из интегральной формулы Коши, дифференцируя обе ее части по z (в правой части дифференцирование производится по параметру z под знаком интеграла). Последнее равенство получено при условии, что функция $f(z)$ является аналитической как на контуре C, так и в области, им ограниченной. Но если функция $f(z)$ аналитическая в точке z, то всегда можно провести из этой точки окружность C столь малого радиуса, что функция $f(z)$ остается аналитической на этой окружности и в круге, ею ограниченном; следовательно, на основании последней формулы можно заключить, что в точке z и в любой другой точке достаточно малой ее окрестности существует производная любого порядка n этой функции.

Итак, *из аналитичности функции в некоторой точке (т. е. из существования первой производной данной функции в какой-либо окрестности этой точки) следует существование в окрестности той же точки производных данной функции любого порядка и аналитичность этих производных*.

7. ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром C, то справедлива интегральная формула Коши $f\left(z_0\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f\left(z\right)}{z-z_0}$, где $z_0 \in D$ и контур C обходится так, что область D остается все время слева.

Рассмотрим применение интегральной формулы Коши к вычислению некоторых интегралов.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_C \dfrac{e^z\,dz}{z\left(z-2i\right)}$, где C – окружность радиусом 2 с центром в точке $3i$.

Функция $f\left(z\right)=\dfrac{e^z}{z}$ аналитична внутри круга, ограниченного окружностью C, поэтому, применяя интегральную формулу Коши (роль ζ играет z, а роль z – число $2i$), получим:

$$\int\limits_C \frac{e^z dz}{z\left(z-2i\right)}=\int\limits_C \frac{f\left(z\right)dz}{z-2i}=2\pi i f\left(2i\right)=2\pi i\frac{e^{2i}}{2i}=\pi\left(\cos 2+i\sin 2\right).$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_C \dfrac{\cos z\,dz}{\left(z-i\right)^3}$, где C – замкнутый контур, обходящий точку i один раз. Применяя формулу $f^{(n)}\left(z\right)=\dfrac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f\left(\zeta\right)d\zeta}{\left(\zeta-z\right)^{n+1}}$ к функции $f(z) = \cos z$, получим:

$$\int\limits_C \frac{\cos z\,dz}{\left(z-i\right)^3}=\frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2\left(\cos z\right)}{dz^2}\Big|_{z=i}=-\pi i\cos i=-\pi i\,ch\,1.$$

7.1. Интеграл типа Коши

Мы условились называть интеграл вида $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ *интегралом Коши* в предположении, что C – замкнутый контур, а функция $f(z)$ – аналитическая на контуре C и в ограниченной им области G. При этом оказалось, что функция, определяемая интегралом Коши, совпадает с $f(z)$ внутри области G и тождественно равна нулю вне контура C. Если считать, что C – произвольная кусочно-гладкая дуга или совокупность нескольких таких дуг, а функция $f(\zeta)$ задана только на контуре C и непрерывна на нем, то величину $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ принято называть *интегралом типа Коши*. Интеграл Коши является, очевидно, частным случаем интеграла типа Коши.

Функция $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$, определяемая интегралом типа Коши, определена всюду, кроме точек дуги C, так как в любой точке z, не принадлежащей C, интеграл типа Коши существует (подынтегральная функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ остается непрерывной).

Интеграл типа Коши является аналитической функцией в любой точке, не лежащей на дуге C. Для производной любого порядка n интеграла типа Коши справедлива аналогичная формула

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

8. РЯДЫ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ

8.1. Функциональные ряды

Функциональный ряд, членами которого являются функции комплексной переменной z,

$$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots,$$

может сходиться в одних точках и расходиться в других. Сумма такого ряда $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$, где $S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z)$, является функцией переменной z, определенной в точках, где ряд сходится. Множество точек, в которых ряд сходится, будем называть *областью сходимости* этого ряда. *Остатком ряда* называется разность $R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots$.

В каждой точке сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(z) = 0$.

Иными словами, если ряд в данной точке z сходится, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать столь большое число N, что при $n > N$ модуль остатка ряда удовлетворяет неравенству $|R_n(z)| < \varepsilon$.

Наименьшее число N, определяющее номер n, начиная с которого справедливо последнее неравенство, зависит не только от ε, но и от z, и не является, следовательно, одинаковым для всех точек области сходимости ряда; чтобы подчеркнуть эту зависимость, вместо N пишут $N(\varepsilon, z)$.

Предположим, что на некотором множестве точек G (в некоторой области, на некоторой дуге и т. д.) ряд не только сходится, но и *мажорируется* некоторым сходящимся числовым рядом. Это означает, что существует такой сходящийся ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ с положительными членами, что во всех точках рассматриваемого множества $|f_0(z)| \le a_0$, $|f_1(z)| \le a_1$, ... $|f_n(z)| \le a_n$, ...

Будем в этом случае говорить, что на данном множестве точек ряд $f_0(z)+f_1(z)+...+f_n(z)+...$ *сходится правильно*. Для рядов, правильно сходящихся на некотором множестве точек, неравенство $\left|R_n(z)\right|<\varepsilon$ имеет место при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, если $n > N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ достаточно велико и зависит только от ε.

Ряды, для которых можно выбрать N не зависящим от z, называются *равномерно сходящимися* на соответствующем множестве точек. Правильно сходящиеся ряды принадлежат, таким образом, к классу равномерно сходящихся рядов (однако не всякий равномерно сходящийся ряд сходится правильно).

Нетрудно установить, что если все члены ряда $f_0(z)+$ $+f_1(z)+...+f_n(z)+...$, сходящегося правильно на некотором множестве G, умножить на одну и ту же ограниченную по модулю функцию $\varphi(z)$, то полученный ряд $\varphi(z)f_0(z)+\varphi(z)f_1(z)+...$ $+\varphi(z)f_n(z)+...$ будет также правильно сходиться на G.

Назовем некоторые свойства равномерно сходящихся рядов, справедливые и для правильно сходящихся рядов.

1. *Если члены ряда* $f(z)=f_0(z)+f_1(z)+...+f_n(z)+...$ *являются непрерывными функциями в некоторой области G или на числовой дуге L и ряд сходится в этой области или на этой дуге равномерно, то сумма ряда $f(z)$ непрерывна в области G или на дуге L.*

2. *Если члены ряда* $f(z)=f_0(z)+f_1(z)+...+f_n(z)+...$ *непрерывны на некоторой дуге L и ряд сходится на этой дуге равномерно, то его можно почленно интегрировать вдоль дуги L, т. е.* $\int\limits_L f(z)\,dz=\int\limits_L f_0(z)\,dz+\int\limits_L f_1(z)\,dz+...+\int\limits_L f_n(z)\,dz+...$

3. *Если члены ряда* $f(z)=f_0(z)+f_1(z)+...+f_n(z)+...$ *аналитические в некоторой области G и этот ряд сходится в области G равномерно, то его сумма $f(z)$ также является функцией, аналитической в области G.*

8.2. Степенные ряды

Ряд вида $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$, где c_i – постоянные, называется *степенным*.

Основной теоремой теории степенных рядов является ***теорема Абеля***: *если степенной ряд сходится в точке* z_0, *то он сходится, и притом абсолютно, во всех точках, лежащих внутри окружности C с центром в точке* $z = 0$, *проходящей через точку* z_0 (*т. е. во всех точках z, для которых* $|z| < |z_0|$). *При этом во всяком круге* $z \leq \rho$ (рис. 7) *радиусом* ρ, *меньшим чем* $|z_0|$, *ряд сходится правильно.*

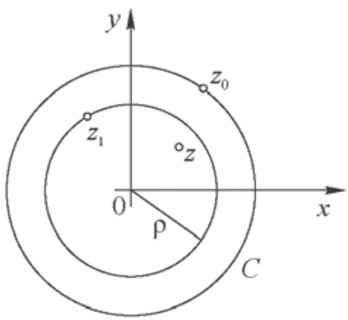


Рис. 7

Доказательство. Из сходимости ряда $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$ при $z = z_0$ вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z^n = 0$ и, следовательно, модули членов этого ряда ограничены, т. е. существует такая постоянная M, что $\left|c_n z_0^n\right| < M$ при любом n. Пусть z – любая точка, лежащая внутри окружности C; тогда $|z| < |z_0|$ и $\left|\dfrac{z}{z_0}\right| = q < 1$.

Общий член ряда можно преобразовать: $c_n z^n = c_n z_0^n \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n$.

Отсюда видно, что $\left|c_n z^n\right| < Mq^n$, т. е. модули членов ряда в точке z меньше соответствующих членов геометрической прогрессии $M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots$ со знаменателем q, меньшим единицы. Следовательно, ряд сходится в точке z абсолютно и первая часть теоремы доказана.

Возьмем теперь произвольный круг $|z| \le \rho$ (см. рис. 7), лежащий внутри окружности C ($\rho < |z_0|$).

Согласно доказанному выше, ряд сходится абсолютно во всякой точке, расположенной внутри окружности C, и, в частности, во всякой точке, лежащей на окружности выбранного нами круга радиуса ρ. Итак, если z_1 – какая-нибудь точка на окружности этого круга (т. е. $|z_1| = \rho$), то числовой ряд $\left|c_0\right| + \left|c_1 z_1\right| + \left|c_2 z_1^2\right| + \ldots + \left|c_n z_1^n\right| + \ldots$ сходится. Но для любой другой точки z, лежащей внутри или на окружности круга $|z| \le \rho$, справедливо неравенство $|z| \le |z_1|$, следовательно $\left|c_n z^n\right| \le \left|c_n z_1^n\right|$ при любом n. Этим доказано, что в круге $|z| \le \rho$, где $\rho < |z_0|$, ряд сходится правильно.

Рассмотрим теперь любой луч, выходящий из нулевой точки. Возможны три случая.

1. Ряд $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$ сходится во всех точках этого луча. Тогда, в силу теоремы Абеля, ряд сходится внутри круга сколь угодно большого радиуса, т. е. во всей плоскости.

2. Ряд расходится во всех точках луча, кроме точки $z = 0$ (в точке $z = 0$ сходится всякий степенной ряд вида $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$, так как при $z = 0$ все члены ряда, кроме первого, обращаются в ноль). В этом случае ряд расходится во всех точках плоскости, кроме точки $z = 0$.

Действительно, из теоремы Абеля следует, что если ряд в некоторой точке z расходится, то он расходится и всюду вне круга с центром в начале координат, окружность которого проходит через точку z. Следовательно, в рассматриваемом случае ряд расходится вне круга сколь угодно малого радиуса с центром в нулевой точке, т. е. всюду, кроме точки $z = 0$.

3. На луче имеются как точки сходимости ряда, отличные от $z = 0$, так и точки расходимости. Как было отмечено, из теоремы Абеля следует, что всякая точка сходимости находится ближе к нулевой точке, чем всякая точка расходимости. Следовательно, на луче найдется точка z^* (рис. 8), отделяющая точки луча, в которых ряд сходится, от точек, где он расходится. Сама точка z^* принадлежит или к числу точек сходимости, или к числу точек расходимости ряда. Ряд будет сходиться внутри круга G с центром в нулевой точке, окружность которого проходит через точку z^*, и расходиться вне этого круга.

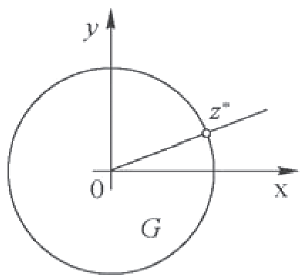


Рис. 8

Круг G называют *кругом сходимости* степенного ряда, а его радиус – *радиусом сходимости* этого ряда. На окружности круга сходимости могут лежать как точки сходимости, так и точки расходимости ряда. В рассмотренных случаях 1 и 2 можно считать, что радиус сходимости равен соответственно бесконечности и нулю.

Так как во всяком круге, находящемся целиком внутри круга сходимости, степенной ряд сходится правильно, из доказанного ранее следует, что сумма степенного ряда внутри круга сходимости является аналитической функцией.

Радиус сходимости степенного ряда можно определять, пользуясь известными признаками сходимости рядов. Ряд $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$, где a – любое комплексное число, также называют степенным. Подстановкой $z - a = t$ он сводится к ряду вида $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$, причем точке $t = 0$ соответствует точка $z = a$. Следовательно, областью сходимости ряда $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$ является круг с центром в точке $z = a$.

8.3. Ряд Тейлора

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, аналитическую внутри круга G, ограниченного окружностью C с центром в точке $z = a$ (рис. 9). Разложим эту функцию в степенной ряд вида $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$

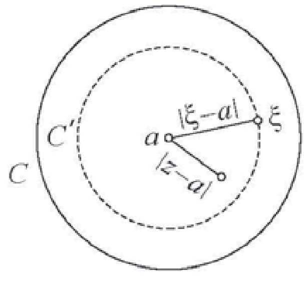


Рис. 9

Пусть z – любая внутренняя точка круга G. Проведем внутри круга G окружность C' с центром в точке a так, чтобы точка z оказалась внутри этой окружности. Тогда, если

ζ – точка на окружности C', в соответствии с интегральной формулой Коши имеем $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'}\dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$. Преобразуем один из множителей подынтегральной функции:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}\right)}.$$

Модуль разности $|\zeta - a|$ равен радиусу окружности C', а так как модуль разности $|z - a|$ равен расстоянию от точки z до центра окружности C, то, как бы ни перемещалась точка ζ по окружности C', величина $\left|\dfrac{z - a}{\zeta - a}\right|$ сохраняет постоянное значение, меньшее единицы. Следовательно, функция $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}}$ является суммой геометрической прогрессии $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}} = 1 + \dfrac{z - a}{\zeta - a} + \dfrac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \dfrac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} + \ldots$, сходящейся во всякой точке z внутри окружности C'. Эта прогрессия сходится правильно на окружности C' относительно ζ, потому что при фиксированном z величина $\left|\dfrac{z - a}{\zeta - a}\right| = q$ постоянна на этой окружности и, следовательно, модули членов ряда $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}} = 1 + \dfrac{z - a}{\zeta - a} + \dfrac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \dfrac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} + \ldots$ совпадают с соответствующими членами сходящегося числового ряда $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$ Тем самым этот последний ряд является мажорирующим для предыдущего ряда. Следовательно, подынтегральную функцию $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ можно представить в виде суммы ряда, сходящегося правильно на окружности C' (величина $|f(\zeta)|$ ограничена на окружности C'):

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{(z-a) f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} + \ldots,$$ а затем

произвести почленное интегрирование, что приведет к разложению функции $f(z)$ в степенной ряд:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} + \frac{(z-a)}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z-a)^2}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \ldots$$

Множители $(z-a), (z-a)^2, \ldots, (z-a)^n, \ldots$ вынесены за знаки соответствующих интегралов.

Итак, во всякой точке z внутри круга G функция $f(z)$ представлена с помощью последнего ряда в виде суммы степенного ряда $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$, коэффициенты которого вычисляются как $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$ (n = 0, 1, 2, …), где C' – или любая окружность с центром в точке $z = a$, лежащая внутри круга G, или любой другой простой замкнутый контур, однократно обходящий точку a в положительном направлении и лежащий внутри круга G, так как, в силу теоремы Коши, величина последнего интеграла не зависит от выбора контура C'. Полученный ряд называется *рядом Тейлора*.

Пользуясь интегральной формулой Коши и вытекающей из нее формулой $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$, можно для коэффициентов ряда Тейлора получить иное представление:

$$c_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a}=f(a),\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{n!},\ (n=1,\,2,\,\ldots)$$

и записать разложение в ряд Тейлора в форме, известной из курса математического анализа для функций действительной переменной:

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

Отсюда, в частности, легко получить известные разложения элементарных функций:

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots;$$
$$\operatorname{arctg} z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\ldots$$

и другие равенства:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots;$$
$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots;$$
$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots,$$

служившие нам для определения функций e^z, $\sin z$, $\cos z$. Их можно теперь рассматривать как разложения этих функций в ряд Тейлора.

Всякая однозначная элементарная функция является аналитической во всех точках, в которых она определена. Но может случиться, что ряд Тейлора для какой-либо элементарной функции сходится и в такой точке, в которой она не определена. Условимся в этом случае приписывать рассматриваемой элементарной функции в соответствующей точке значение, равное сумме ее ряда Тейлора в этой точке.

Так, например, равенство $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - \ldots$ справедливо при любом $z \neq 0$. Однако ряд, стоящий в его правой части, сходится и при $z = 0$, причем его сумма при $z = 0$ равна 1. Условимся поэтому считать, что $\dfrac{\sin z}{z} = 1$ при $z = 0$.

Легко видеть, что при таком условии радиус сходимости ряда Тейлора для всякой однозначной элементарной функции $f(z)$ равен расстоянию ρ от точки $z = a$, являющейся центром круга сходимости, до ближайшей особой точки этой функции.

Действительно, в круге $|z - a| < \rho$ функция $f(z)$ аналитична, и поэтому, как было доказано, в этом круге ее ряд Тейлора сходится. С другой стороны, если бы радиус сходимости ряда Тейлора был больше, чем ρ, то внутрь круга сходимости попала бы особая точка функции $f(z)$, которая, в силу принятого условия, была бы особой точкой и для суммы ряда Тейлора, что невозможно, так как сумма степенного ряда аналитична в круге его сходимости.

***

Если R – радиус круга сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ и эта функция ограничена в круге сходимости (т. е. существует такая постоянная M, что в $|f(z)| \le M$ при $|z| < R$), то, используя интегральную формулу для коэффициентов ряда Тейлора и выбрав в качестве пути интегрирования окружность $|\zeta - a| = \rho$ с центром в точке $z = a$, получим

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

Так как радиус ρ окружности C' можно брать сколь угодно близким к радиусу круга сходимости R, то $|c_n| \le \dfrac{M}{R^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Эти неравенства называют *неравенствами Коши для коэффициентов ряда Тейлора.*

Если функция $f(z)$ аналитическая во всей плоскости, то радиус круга сходимости ряда Тейлора бесконечен, и, следовательно, из неравенств Коши находим, что все коэффициенты c_n, кроме c_0, равны нулю – значит, $f(z) = c_0$. Тем самым показано, что *функция, аналитическая и в то же время ограниченная во всей плоскости, постоянна (**теорема Лиувилля**)*.

***

Нули функции и их порядок. Ряд Тейлора можно почленно дифференцировать. В качестве точки a можно взять любую точку, в которой функция $f(z)$ аналитична. Разложение

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$$

называют *разложением функции $f(z)$ в окрестности точки a*. Если $f(a) = 0$, то точка a называется *нулем функции $f(z)$*. В этом случае разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки a имеет вид $f(z) = c_1(z - a) + c_2(z - a)^2+...$, так как $c_0 = f(a) = 0$. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a $c_0 = c_1 = ... = c_{n-1} = 0$, но $c_n \neq 0$ и, следовательно, разложение имеет вид $f(z) = c_n(z - a)^n + c_{n+1}(z - a)^{n+1} + ...$, то тогда точка a называется *нулем n-го порядка* или *нулем n-й кратности* функции $f(z)$. Если $n = 1$, то нуль называется *простым*. Продифференцировав $f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots$, приходим к выводу, что если a – нуль порядка n функции $f(z)$, то эта же точка является нулем порядка $(n - 1)$ для функции $f'(z)$.

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что *если точка a является нулем порядка n функции $f(z)$, то $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$, но $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

Разложение $f(z) = c_n(z - a)^n + c_{n+1} (z - a)^{n+1} +...$ можно переписать в виде $f(z) = (z - a)^n \cdot (c_n + c_{n+1}(z - a) +...) = (z - a)^n \varphi(z)$, где функция $\varphi(z)$ определяется как сумма степенного ряда $\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \ldots$, имеющего, очевидно, тот же круг сходимости, что и ряд $f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots$ Для функции $\varphi(z)$ точка a уже не является нулем, так как $\varphi(a) = c_n \neq 0$. Справедливо и обратное утверждение: *всякая функция вида $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, где n – целое положительное число, $\varphi(a) \neq 0$, а $\varphi(z)$ аналитична в точке a, имеет в этой точке нуль порядка n.*

Пример. Для функции $f(z) = (z^2 - 4)^3 e^z$ точки $z = \pm 2$ являются нулями 3-го порядка, так как $f(z) = (z-2)^3 (z+2)^3 e^z$, и если положить $\varphi(z) = (z+2)^3 e^z$, то $f(z) = (z-2)^3 \varphi(z)$, причем $\varphi(2) \neq 0$, если же положить $\varphi(z) = (z-2)^3 e^z$, то $f(z) = (z+2)^3 \varphi(z)$ и $\varphi(-2) \neq 0$.

Теорема о единственности аналитической функции. Если значения аналитических в области G функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают в некоторой бесконечной последовательности точек $z_1, z_2, ..., z_k, ...$, сходящейся к точке a $\left(\lim\limits_{k\to\infty} z_k = a\right)$, которая является внутренней точкой области G, то функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ тождественны во всей области G: $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

8.4. Правильные и особые точки аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ задана в области J, ограниченной контуром Г. *Точка* $z_0 \in \overline{J}$ *называется правильной точкой функции* $f(z)$*, если существует сходящийся степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$, *который в общей части области J и своего круга сходимости* $|z - z_0| < \rho(z_0)$ *сходится к функции* $f(z)$. На значение числа $\rho(z_0)$ накладывается единственное ограничение: $\rho(z_0)$ строго больше нуля. Точки $z \in \overline{J}$, не являющиеся правильными точками функции $f(z)$, называются ее *особыми точками*. Ясно, что если функция $f(z)$ – аналитическая в области J, то все внутренние точки этой области являются правильными точками функции $f(z)$. Точки границы Г могут быть как правильными, так и особыми точками аналитической функции $f(z)$. Очевидно, что все точки границы Г, лежащие внутри круга $|z - z_0| < \rho\left(z_0\right)$ с центром в некоторой правильной точке $z_0 \in \overline{J}$, также являются правильными точками функции $f(z)$.

8.5. Ряд Лорана

Предположим, что $f(z)$ является однозначной аналитической функцией внутри кольца между концентрическими окружностями C' и C'' с центром в точке $z = a$ (рис. 10), а z – произвольная внутренняя точка этого кольца. Проведем окружности Γ' и Γ''

с центром в точке a так, чтобы каждая из них находилась внутри данного кольца и каждая точка z оказалась между Γ' и Γ''.

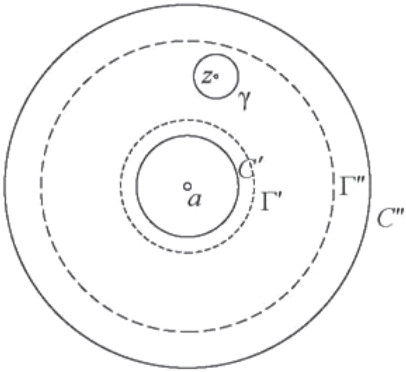


Рис. 10

Опишем из точки z окружность γ, находящуюся в кольце между Γ' и Γ''. Используя теорему Коши для составного контура, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Но, в силу интегральной формулы Коши $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = f(z)$, получаем $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$.

Если ζ – точка на контуре Γ'', то $|\zeta - a| > |z - a|$ и

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a}\left(1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \frac{(z - a)^2}{(\zeta - a)^2} + \ldots + \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} + \ldots\right).$$

Ряд в правой части этого равенства сходится на окружности Γ'' правильно; умножив его почленно на $f(\zeta)d\zeta$ и проинтегрировав вдоль Γ'', получим для первого из интегралов разложение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} + \frac{z - a}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^2} +$$

$$+ \frac{(z - a)^2}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^3} + \ldots + \frac{(z - a)^n}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \ldots =$$

$$= c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots,$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Если же точка ζ находится на контуре Γ', то $|z - a| > |\zeta - a|$ и, следовательно, $\left|\dfrac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1;$ поэтому для получения ряда, правильно сходящегося на Γ', преобразуем $\dfrac{1}{\zeta - z}$ иначе:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = -\frac{1}{(z - a)\left(1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{z - a}\left(1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \frac{(\zeta - a)^2}{(z - a)^2} + \ldots + \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z - a)^{n-1}} + \ldots\right).$$

После такого преобразования для второго интеграла получим

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\zeta)d\zeta +$$

$$+\frac{1}{(z-a)^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\zeta - a)f(\zeta)\,d\zeta + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(z-a)^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\zeta - a)^{n-1} f(\zeta)\,d\zeta + \ldots =$$

$$= \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots,$$

где $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\,d\zeta,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

В силу теоремы Коши для составного контура вместо путей интегрирования Γ′ и Γ″ можно взять любую окружность Γ с центром в точке a, лежащую в данном кольце между C' и С″.

Заметим также, что при замене n на $-n$ подынтегральное выражение $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$ переходит в подынтегральное выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\,d\zeta,$$

поэтому из $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$ мы получаем следующее разложение функции $f(z)$, сходящееся во всякой точке z внутри кольца между C' и С″:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots,$$

где коэффициенты c_n, как при $n = 0, 1, 2, ...$, так и при $n = –1, –2, ...$ определяются формулой $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n=1}}$, а Γ – любая расположенная в данном кольце окружность с центром в точке $z = a$. Полученное разложение называется *рядом Лорана*.

Пример 1. Рассмотрим различные разложения в ряд Лорана функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, выбрав $a = 0$.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z = 1$ и $z = 2$. Следовательно, имеется три круговых кольца с центром в точке $z = 0$, в каждом из которых функция аналитична (рис. 11): 1) круг $|z| < 1$; 2) кольцо $1 < |z| < 2$; 3) внешность круга $|z| > 2$.

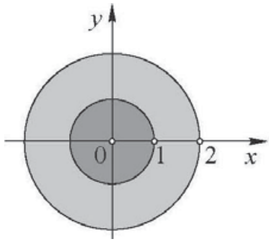


Рис. 11

В данном случае нетрудно получить разложение в ряд Лорана в каждой из перечисленных областей, не прибегая к формулам для вычисления коэффициентов.

1. *Разложение в круге* $|z| < 1$. Функцию $f(z)$ можно представить в виде суммы двух элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Так как $\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$, а функция $\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$ является суммой геометрической прогрессии $\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{2^2}+\ldots+\dfrac{z^n}{2^n}+\ldots$, модуль знаменателя которой $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, то $\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{2^2}-\dfrac{z^2}{2^3}-\ldots-$ $-\dfrac{z^n}{2^{n+1}}-\ldots$

Аналогично $-\dfrac{1}{z-1}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$, причем ряд в правой части сходится, так как $|z|<1$. Складывая два последних разложения, получим

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)z+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^3+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^{n=1}}\right)z^n+\ldots,$$

т. е. $c_n=1-\dfrac{1}{2^{n+1}}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), $c_{-n} = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Полученное разложение является рядом Тейлора.

2. *Разложение в кольце* $1 < |z| < 2$. Ряд $\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{2^2}-\dfrac{z^2}{2^3}-$ $-\ldots-\dfrac{z^n}{2^{n+1}}-\ldots$ остается сходящимся, так как $|z| < 2$, но ряд $-\dfrac{1}{z-1}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$ расходится, потому что $|z| < 1$; поэтому последнее разложение заменим следующим:

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\ldots-\frac{1}{z^n}-\ldots$$

В рассматриваемом кольце последний ряд сходится, так как $|z|<1$ и, следовательно, $\left|\frac{1}{z}\right|<1.$

Складывая ряды, получим

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\ldots-\frac{z^n}{2^{n+1}}-\ldots$$

$$-\frac{1}{z}-\frac{1}{z_2}-\ldots-\frac{1}{z^n}-\ldots,$$

т. е. $c_n=-\frac{1}{2^{n+1}}\,(n=0,1,2,\ldots),\ c_{-n}=-1(n=1,2,\ldots).$

3. *Разложение в области* $|z|>2$. Равенство

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\ldots-\frac{1}{z^n}-\ldots$$

сохраняется, так как если $|z|>2$, то $|z|>1$; но ряд в правой части равенства $\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\ldots-\frac{z^n}{2^{n+1}}-\ldots$ расходится. Заменим это равенство на

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{z^n}+\ldots$$

Здесь ряд в правой части сходится, так как $|z| > 2$ и, следовательно, $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$. Складывая два последних разложения, получим

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z^2} + \frac{2^2-1}{z^3} + \ldots + \frac{2^{n-1}-1}{z^n} + \ldots,$$

т. е. $c_n = 0\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $c_{-n} = 2^{n-1} - 1\,(n = 1, 2, \ldots)$.

Пример 2. Выбрав $a = 1$, найдем разложения в ряд Лорана в различных областях рассмотренной выше функции $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$. Построим две круговые области с центром в точке $z = 1$ (рис. 12):

1) круг, из которого удален центр $0 < |z - 1| < 1$;
2) внешность круга $|z - 1| > 1$.

В каждой из этих областей функция $f(z)$ аналитична, а на границе имеет особые точки.

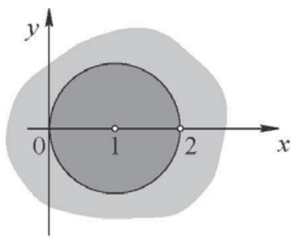


Рис. 12

Разложим в каждой из этих областей функцию $f(z)$ по степеням разности $(z - 1)$.

1. *Разложение в области* $0 < |z - 1| < 1$. Как и в примере 1, получим:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1};$$

$$\frac{1}{(z-2)} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\left(1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots+(z-1)^n+\ldots\right),$$

причем ряд в правой части сходится, так как $|z - 1| < 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \ldots - (z-1)^n - \ldots,$$

т. е. $c_n = -1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), $c_{-1} = -1$, $c_{-2} = c_{-3} = \ldots = c_{-n} = \ldots = 0$.

2. *Разложение в области* $|z - 1| > 1$. В этой области

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}} =$$

$$= \frac{1}{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(z-1)^n} + \ldots,$$

причем ряд в правой части равенства сходится, так как $|z - 1| > 1$ и, следовательно, $\dfrac{1}{|z-1|} < 1$. Итак,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \ldots + \frac{1}{(z-1)^n} + \ldots,$$

т. е. $c_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), $c_{-1} = 0$, $c_{-2} = c_{-3} = \ldots = c_{-n} = 1$.

***

Можно доказать единственность разложения функции в ряд Лорана, т. е. разложения вида

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

$$\ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots$$

Иными словами, *если функция* $f(z)$ *является в некотором кольце с центром в точке* $z = a$ *аналитической, то не существует двух различных рядов указанного вида, сходящихся в этом кольце и имеющих своей суммой функцию* $f(z)$ (рис. 13).

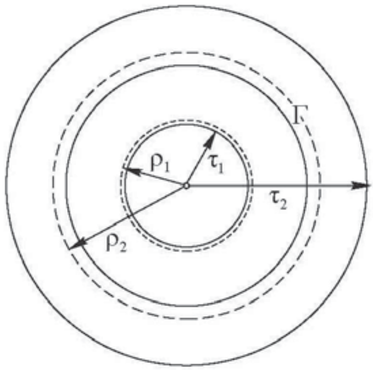


Рис. 13

Отсюда следует, что ряды $c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots$ и $\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots$ сходятся правильно на всякой лежащей в данном кольце окружности Γ с центром в точке a (см. рис. 13). Эти ряды, а следовательно и ряд

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$
$$\ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots,$$

можно интегрировать вдоль Г.

Ранее было доказано, что интегралы вида $\int\limits_{\Gamma}(z-a)^n\,dz$, где замкнутый контур Г однократно обходит в положительном направлении точку $z = a$, равны нулю при всяком целом n, кроме $n = -1$ (в последнем случае интервал равен $2\pi i$). Следовательно, при почленном интегрировании последнего ряда исчезнут все члены, кроме первого дробного, и мы получим $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma}\frac{c_{-1}dz}{z-a} = c_{-1}\cdot 2\pi i$, откуда $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz.$ Чтобы определить c_{-n}, нужно до интегрирования умножить все члены ряда на $(z-a)^{n-1}$. Тогда после интегрирования все интегралы, кроме одного, опять обратятся в нуль и мы получим

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)(z-a)^{n-1}dz = \int\limits_{\Gamma}\frac{c_{-n}dz}{z-a} = 2\pi i c_{-n},$$

откуда $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)(z-a)^{n-1}\,dz.$

Аналогично чтобы определить c_n при $n = 0, 1, 2, \ldots$, нужно перед почленным интегрированием ряда

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$
$$\ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots$$

разделить его члены на $(z-a)^{n+1}$. Тогда после интегрирования получим

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\int\limits_{\Gamma}\frac{c_n dz}{z-a}=c_n\cdot 2\pi i \text{ и } c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Мы пришли к уже известным формулам для коэффициентов ряда Лорана и тем самым доказали, что никакое другое разложение функции $f(z)$ в ряд указанного вида невозможно. Так как ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, то доказана и единственность разложения в ряд Тейлора.

8.6. Изолированные особые точки

Особая точка $z = a$ функции $f(z)$ называется *изолированной*, если в некоторой ее окрестности функция $f(z)$ не имеет других особых точек, т. е. если в некоторой окрестности точки $z = a$ функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z = a$. Разложение функции в ряд Лорана, сходящийся к этой функции во всех точках круга с центром в данной изолированной особой точке a, кроме этой точки a (меньший радиус кольца, в котором происходит разложение, равен нулю), будем называть *разложением функции в ряд Лорана в окрестности данной изолированной особой точки*. Так, в примере 2 первое из разложений является разложением в окрестности особой точки $z = 1$.

Будем называть ряд

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots$$

правильной частью, а ряд

$$\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots$$

главной частью ряда Лорана.

8.7. Классификация особых точек

Если функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности изолированной особой точки $z = a$, то мы можем всегда считать эту точку правильной точкой функции, положив $f(a) = c_0$ (см. пример с разложением функции $\frac{\sin z}{z}$). Поэтому изолированная особая точка $z = a$ функции $f(z)$, для которой разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = a$ не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z - a)$, называется *устранимой особой точкой*.

Пусть теперь функция $f(z)$ не ограничена в окрестности изолированной особой точки $z = a$. В этом случае либо $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, либо при $z \to a$ функция $f(z)$ вообще не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного). В первом случае будем называть точку $z = a$ *полюсом* функции $f(z)$, во втором – *существенно особой точкой*.

Если точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$, то в достаточно малой окрестности этой точки $f(z) > M$, как бы ни было велико M, и поэтому $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $z = a$. Следовательно, функция $F(z) = \frac{1}{f(z)}$, будучи отношением двух аналитических функций ($f(z) \neq 0$), является также функцией, аналитической в некоторой окрестности точки $z = a$ всюду, кроме самой точки $z = a$. Но по условию $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, следовательно, $\lim\limits_{z\to a} F(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0$, поэтому функция $F(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки $z = a$ и, согласно доказанному выше, эту точку можно считать правильной для $F(z)$, положив $F(a) = 0$. Итак, если точка $z = a$ является полюсом функции $f(z)$, то она является нулем функции $\frac{1}{f(z)}$. Будем называть точку

$z = a$ полюсом порядка n функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\dfrac{1}{f(z)}$. В случае $n = 1$ этот полюс будем называть *простым*.

Как было показано, точка $z = a$ тогда и только тогда является нулем функции $\dfrac{1}{f(z)}$ порядка n, когда $\dfrac{1}{f(z)} = (z-a)^n \varphi(z)$, где $\varphi(a) \neq 0$ (функция $\varphi(z)$ аналитична при $z = a$). Но из этого представления следует, что $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n \varphi(z)}$, или, если положить $\psi(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$, $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-a)^n}$, причем функция $\psi(z)$ также аналитична при $z = a$ и $\psi(a) \neq 0$. Итак, *точка $z = a$ тогда и только тогда является полюсом порядка n функции $f(z)$, когда $f(z)$ можно представить в виде* $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-a)^n}$.

Так, например, точка $z = -2$ является полюсом третьего порядка для функции $\dfrac{e^z}{(z+2)^3}$; точки $z = \pm 2i$ – полюсами первого порядка для функции $\dfrac{\cos z}{z^2+4}$, так как $z^2 + 4 = (z - 2i)(z = 2i)$; точка $z = 0$ – полюсом второго порядка для функции $\dfrac{\sin z}{z^3}$, так как $\dfrac{\sin z}{z^3} = \dfrac{\left(\dfrac{\sin z}{z}\right)}{z^2}$ и $\dfrac{\sin z}{z} \neq 0$ при $z = 0$.

Если числитель правой части $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-a)^n}$ разложить в окрестности точки $z = a$ в ряд Тейлора, то мы получим

$$f(z) = \frac{c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots}{(z-z)^n},$$

где $c_0 = \psi(a) \neq 0$. Проведя почленное деление, будем иметь

$$f(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + c_{n=2}(z-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{c_{n-1}}{z-a} + \frac{c_{n-2}}{(z-a^2)} + \ldots + \frac{c_0}{(z-a^n)}, \quad (c_0 \neq 0).$$

Таким образом, если точка $z = a$ является полюсом порядка n функции $f(z)$, то главная часть разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = a$ представляет собой не бесконечный ряд, а конечную сумму, причем порядок полюса равен наивысшему показателю степени $(z - a)$ в знаменателях членов главной части разложения.

И обратно, если главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = a$ содержит лишь конечное число отличных от нуля членов, то точка $z = a$ – полюс функции $f(z)$ порядка n.

Итак, *главная часть разложения функции в ряд Лорана тогда и только тогда содержит лишь конечное число членов, когда точка, в окрестности которой произведено разложение, является полюсом*.

Отсюда следует, что главная часть разложения функции в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки содержит бесконечно много отличных от нуля членов. Поведение функции в окрестности существенно особой точки подчиняется нижеследующей теореме, которую мы приведем без доказательства.

Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса. *Если точка a является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для любого заданного комплексного числа A найдется последовательность точек, сходящихся к точке a, вдоль которой значения $f(z)$ стремятся к A*; для $A = \infty$ теорема также верна.

Пример. Найти особые точки функции $e^{\frac{1}{z}}$ и определить их характер.

Принимая во внимание, что $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$, получим $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots$, причем ряд в правой части сходится всюду, кроме точки $z = 0$. Это равенство можно рассматривать как разложение функции $e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$, и так как его главная часть содержит бесконечное множество членов, точка $z = 0$ является существенно особой точкой функции $e^{\frac{1}{z}}$.

Рассмотрим поведение функции $e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z = 0$. При $z \to 0$ вдоль положительной части действительной оси получим $\frac{1}{z} \to +\infty$ и $e^{\frac{1}{z}} \to +\infty$; если $z \to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\frac{1}{z} \to -\infty$ и $e^{\frac{1}{z}} \to 0$. Пусть теперь $A = re^{i\varphi}$ – любое комплексное число, отличное от нуля и бесконечности. Из равенства $e^{\frac{1}{z}} = A$, или $\frac{1}{z} = \text{Ln}\, A$, находим $z = \frac{1}{\text{Ln}\, A} = \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2k\pi i}$. Полагая $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получим последовательность точек, сходящуюся к точке $z = 0$, так как $\lim\limits_{k\to\pm\infty} \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2k\pi i} = 0$, причем функция $e^{\frac{1}{z}}$ не только стремится к A вдоль этой последовательности, но даже в точности равна A в каждой ее точке.

Других особых точек функция $e^{\frac{1}{z}}$ не имеет.

***

Классификацию изолированных особых точек можно распространить и на случай *бесконечно удаленной точки*. Назовем бесконечно удаленную точку изолированной особой точкой функции $f(z)$, если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (т. е. вне круга достаточно большого радиуса с центром в начале координат) нет других особых точек функции $f(z)$.

Разложение функции в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса с центром в точке $z = 0$ (кроме, может быть, самой бесконечно удаленной точки), будем называть *разложением в окрестности бесконечно удаленной точки.* Последнее из разложений в примере 1 является разложением функции $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Ряд $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!z^2} + \ldots + \dfrac{1}{n!z^n} + \ldots$ является разложением функции $e^{\frac{1}{z}}$ не только в окрестности точки $z = 0$, но также и в окрестности бесконечно удаленной точки. При разложении функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки следует, в соответствии с определением, считать $a = 0$ в разложении

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

$$\ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots$$

Запишем члены разложения в следующем порядке:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

Назовем ряд $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z_n}$ *правильной частью*, а ряд $\sum_{m=1}^{\infty} c_n z^n$ – *главной частью разложения*. Такая терминология вполне естественна, если учесть, что при замене $\tilde{z} = \frac{1}{z}$ окрестность бесконечно удаленной точки отображается на окрестность точки $\tilde{z} = 0$ и разложение $f(z)$ превращается в разложение в ряд Лорана функции $f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)$ в окрестности точки $\tilde{z} = 0$:

$$f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) = c_0 + c_{-1}\tilde{z} + c_{-2}\tilde{z}^2 + \ldots + c_{-n}\tilde{z}^n + \ldots + \frac{c_1}{\tilde{z}} + \frac{c_2}{\tilde{z}^2} + \ldots + \frac{c_n}{\tilde{z}^n} + \ldots,$$

в котором ряд $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\tilde{z}^n$ является правильной, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\tilde{z}^n}$ – главной частью.

Путем аналогичных рассуждений можно прийти к выводу, что если в некоторой окрестности точки $z = \infty$ функция $f(z)$ ограничена, то $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \ldots = 0$, разложение примет вид $f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots$, и точку $z = \infty$ можно считать правильной точкой функции $f(z)$, положив $f(\infty) = c_0$.

Если $z = \infty$ – правильная точка функции $f(z)$ и $f(\infty) = 0$, то будем называть точку $z = \infty$ *нулем порядка m* функции $f(z)$, если точка $z = 0$ является нулем порядка m функции $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Если $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, будем называть точку $z = \infty$ *полюсом* функции. Очевидно, что если точка $z = \infty$ – полюс функции $f(z)$, то точка $z = 0$ – полюс функции $f\left(\frac{1}{z}\right)$. Назовем точку $z = \infty$ *полюсом порядка m* функции $f(z)$, если точка $z = 0$ является полюсом порядка m функции $f\left(\frac{1}{z}\right)$. В этом случае разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ будет иметь вид

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \ldots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m,$$

где $c_m \neq 0$.

Если функция $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ не ограничена и в то же время не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$, то точку $z = \infty$ назовем существенно особой точкой для $f(z)$. В этом случае главная часть разложения содержит бесконечно много отличных от нуля членов, а поведение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ определяется теоремой Сохоцкого – Вейерштрасса.

9. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

9.1. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Определение и формулы вычисления вычета

Введем важное для приложений понятие вычета однозначной аналитической функции в изолированной особой точке.

Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$. Согласно предыдущим рассуждениям, в окрестности этой точки функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ и, в частности, $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C f(\zeta)\,d\zeta$.

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$, взятого в положительном направлении по любому лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ замкнутому контуру γ, содержащему единственную особую точку z_0 функции $f(z)$. Для обозначения вычета обычно применяются выражения Выч $[f(z), z_0]$, res$|f(z), z_0|$, res$(f(z_0))$. Очевидно, что если точка z_0 является правильной или устранимой особой точкой функции $f(z)$, то вычет $f(z)$ в этой точке равен нулю. Для вычисления вычета функции $f(z)$ в ее изолированной особой точке можно использовать формулу $\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right] = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C f(\zeta) d\zeta = c_{-1}$.

Однако в ряде случаев можно указать более простой способ вычисления вычета, сводящийся к дифференцированию функции

$f(z)$ в окрестности точки z_0. Тем самым вычисление контурного интеграла от аналитической функции может быть заменено вычислением производных от этой функции в некоторых точках, лежащих внутри контура интегрирования. Данное обстоятельство определяет одно из основных приложений теории вычетов. Перейдем к рассмотрению этих случаев.

Случай 1. Пусть точка z_0 является полюсом первого порядка функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки имеет место разложение $f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots$ Умножив обе части на $(z - z_0)$ и перейдя к пределу при $z \to z_0$, получим $c_{-1} = \lim\limits_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$. Заметим, что в данном случае функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 может быть представлена в виде отношения двух аналитических функций: $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, а точка z_0 является нулем первого порядка функции $\psi(z)$, т. е. $\psi(z) = (z - z_0)\psi'(z_0) + \dfrac{\psi''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \ldots,\ \psi'(z_0) \neq 0.$

Тогда получим *формулу вычисления вычета в полюсе первого порядка*:

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, 345\ f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Пример. Пусть $f(z) = \dfrac{z}{z^n - 1}$. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_k = \sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}\ (k = 0, 1, \ldots, n-1)$, причем все они представляют собой полюсы первого порядка. Найдем res[(z), z_k]. Согласно формуле $\operatorname{res}[f(z), z_0] = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, учитывая, что здесь $z_k^n = 1$, получим $\operatorname{res}[f(z), z_k] = \dfrac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \dfrac{1}{n} \cdot z_k^2 = \dfrac{1}{n} \cdot e^{i\frac{4\pi k}{n}}$.

Случай 2. Пусть точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$. Согласно сказанному выше, в окрестности этой точки имеет место разложение

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots$$

Умножив обе части на $(z - z_0)^m$, получим

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \ldots$$

Взяв производную порядка $(m - 1)$ от обеих частей этого равенства и перейдя к пределу при $z \to z_0$, окончательно получим *формулу вычисления вычета в полюсе порядка m*:

$$\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z - z_0)^m f(z)\Big).$$

Легко увидеть, что формула вычисления вычета в полюсе первого порядка является частным случаем последней формулы.

Пример. Пусть $f(z) = \dfrac{1}{(1 + z^2)^n}$. Особыми точками этой функции являются точки $z_{1,2} = \pm i$, причем обе они представляют собой полюсы порядка n. Вычислим $\operatorname{res}[f(z), i]$:

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^n}, i\right] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z - i)^n \frac{1}{(1+z^2)^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n \cdot (n+1) \ldots (2n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n-1}} \Big|_{z=i} =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2} \cdot \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -i \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}.$$

Основная теорема теории вычетов. Перейдем теперь к анализу важнейших сфер применения введенных понятий. Весьма существенной для теоретического рассмотрения и разнообразных практических приложений является следующая теорема.

Теорема 9.1. Основная теорема теории вычетов. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\overline{J}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k, $(k=1, ..., N)$, лежащих внутри области J. Тогда* $\int\limits_{\Gamma^+} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{N}\operatorname{res}\left[f(z), z_k\right]$, *где Γ^+ представляет собой полную границу области J, проходимую в положительном направлении.*

Доказательство. Выделим каждую из особых точек z_k замкнутым контуром γ_k, не содержащим внутри других особых точек, кроме точки z_k. Рассмотрим многосвязную область, ограниченную контуром Г и всеми контурами γ_k (рис. 14). Внутри этой области функция $f(z)$ всюду является аналитической, поэтому по теореме Коши получим $\int\limits_{\Gamma^+} f(\zeta)d\zeta + \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k^-} f(\zeta)d\zeta = 0.$

Перенеся второе слагаемое направо, в силу формулы $\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} f(\zeta)d\zeta = c_{-1}$, получим утверждение теоремы: $\int\limits_{\Gamma^+} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{N}\operatorname{res}\left[f(z), z_k\right].$

Практическая важность этой формулы заключается в том, что во многих случаях оказывается гораздо проще вычислить вычеты функции $f(z)$ в особых точках, лежащих внутри области интегрирования, чем непосредственно вычислять интеграл, стоящий в левой части. В дальнейшем мы рассмотрим ряд важных приложений полученной формулы, а сейчас введем еще одно понятие – вычет в бесконечно удаленной точке.

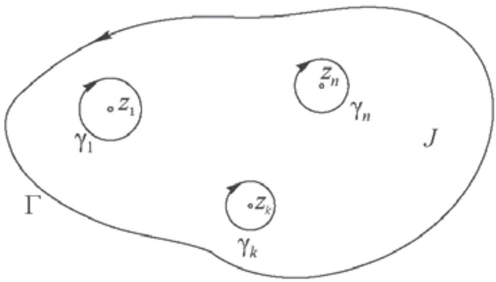


Рис. 14

Пусть точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$.

Вычетом аналитической функции $f(z)$ *в точке* $z = \infty$ *называется комплексное число, равное значению интеграла* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-} f(\zeta)d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(\zeta)d\zeta$, *где контур* C *– произвольный замкнутый контур, вне которого функция* $f(z)$ *является аналитической и не имеет особых точек, отличных от* ∞. В силу определения коэффициентов ряда Лорана имеет место формула $\operatorname{res}\left[f(z),\infty\right] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(\zeta)d\zeta = -c_{-1}$. Вместе с основной теоремой теории вычетов она позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 9.2. *Пусть функция* $f(z)$ *является аналитической на полной комплексной плоскости, кроме конечного числа изолированных точек* z_k ($k = 1, ..., N$), *включая* $z = \infty$. *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{N}\operatorname{res}\left[f(z), z_k\right] = 0.$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур C, содержащий внутри все $(N - 1)$ особых точек z_k, расположенных на конечном расстоянии от точки $z = 0$. Согласно теореме 9.1, имеем $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(\zeta)d\zeta = \sum\limits_{k=1}^{N-1}\operatorname{res}\left[f(z), z_k\right]$. Но, в силу формулы $\operatorname{res}\left[f(z),\infty\right] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(\zeta)d\zeta = -c_{-1}$, интеграл, стоящий в предпоследней формуле слева, равен вычету функции $f(z)$ в точке $z=\infty$, взятому с обратным знаком, что и доказывает теорему 9.2.

Данная теорема иногда позволяет упростить вычисление интеграла от функции комплексной переменной по замкнутому контуру. Пусть $f(z)$ является однозначной аналитической функцией на всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и требуется вычислить интеграл от $f(z)$ по некоторому замкнутому контуру Г. Если внутри Г содержится много особых точек функции $f(z)$, то применение теоремы 9.1 может быть сопряжено с весьма трудоемкими вычислениями. При этом может оказаться, что вне Г функция $f(z)$ имеет лишь несколько особых точек z_k ($k = 1, 2, ..., m$), значение вычетов в которых, а также вычет в бесконечно удаленной точке определяются достаточно просто. Тогда удобно вместо прямого вычисления искомого интеграла по теореме 9.1 воспользоваться очевидным следствием теорем 9.1 и 9.2:

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(\zeta)d\zeta = -2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}\left[f(z), z_k\right] - 2\pi i\operatorname{res}\left[f(z),\infty\right].$$

9.2. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Доказанные в предыдущем разделе теоремы находят самое разнообразное применение не только при вычислении интегралов от функций комплексной переменной, но и при вычислении различных определенных интегралов от функций действительной переменной, причем часто удается достаточно просто получить ответ и в тех случаях, когда применение других методов анализа оказывается затруднительным. Рассмотрим ряд типичных случаев.

Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$. Рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta,$$

где R – рациональная функция своих аргументов.

Интегралы такого типа легко могут быть сведены к интегралам от аналитической функции комплексной переменной по замкнутому контуру. Для этого сделаем замену переменной интегрирования, введя комплексную переменную z, связанную с переменной θ соотношением $z = e^{i\theta}$. Очевидно, что $d\theta = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$. При изменении θ от 0 до 2π комплексная переменная z пробегает замкнутый контур (окружность $|z| = 1$) в положительном направлении. Таким образом, интеграл $J = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ переходит в интеграл по замкнутому контуру от функции комплексной переменной: $J = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} R\left(z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z}\right)dz.$ В силу общих свойств аналитических функций подынтегральная функция, очевидно являющаяся рациональной функцией $\tilde{R}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}$, аналитична внутри круга $|z| = 1$ всюду, кроме конечного числа $N \le m$ особых точек z_k, являющихся нулями знаменателя. Поэтому, в силу теоремы 9.1, $J = 2\pi\sum\limits_{k=1}^{N} \operatorname{res}\left[\tilde{R}(z), z_k\right]$. Точки z_k являются полюсами функции $\tilde{R}(z)$. Пусть α_k – порядок полюса z_k (очевидно, что $\sum_{k=1}^{N}\alpha_k \le m$).

Тогда на основании формулы о вычислении полюса порядка m можно переписать последнее представление интеграла в виде $J = 2\pi\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(\alpha_k - 1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{\alpha_k - 1}}{dz^{\alpha_k - 1}}\left((z - z_k)^{\alpha_k}\tilde{R}(z)\right)$.

Пример. Вычислить интеграл $J = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1 + a\cos\theta}, |a| < 1$. Положим $z = e^{i\theta}$, получим $J = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{1 + \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{z} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{az^2 + 2z + a}$.

Особыми точками подынтегральной функции являются нули знаменателя $z_{1,2} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$. Это полюсы первого порядка. Так как $z_1 \cdot z_2 = 1$, то лишь одна из этих точек лежит внутри круга $|z| = 1$. Как легко видеть, это точка $z_1 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$. Поэтому, в силу теоремы 9.1,

$$J = 4\pi\,\mathrm{res}\left[\frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1\right] = 4\pi\frac{1}{a(z - z_2)}\Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Рассмотрим применение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов первого рода вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, в частности тот случай, когда функция $f(x)$ задана на всей действительной оси и может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость так, что ее продолжение удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Предположим сначала, что бесконечно удаленная точка является нулем *второго* или более высокого порядка функции $f(x)$ и, следовательно, разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид $f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots$ (случай $c_{-2} = 0$ не исключается). Допустим также, что $f(x)$ является аналитической функцией на действительной оси, а в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет лишь конечное число особых точек: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда все лежащие в верхней полуплоскости особые точки функции $f(x)$ можно заключить внутрь расположенного в верхней полуплоскости полукруга достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. В соответствии с основной теоремой о вычетах интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz,$ взятый по границе L этого полукруга, будет равен числу $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов функции $f(x)$ относительно всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости, причем при дальнейшем увеличении R этот интеграл изменяться не будет, так как никакие новые особые точки внутрь полукруга не попадут.

Пусть C_R – полуокружность, входящая в состав границы L указанного полукруга, тогда $\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{C_R} f(z)\,dz + \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx.$

На основании $f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots$ имеем $f(z) = \frac{1}{z^2}\varphi(z),$ где $\varphi(z) = c_{-2} + \frac{c_{-3}}{z} + \ldots$ Для функции $\varphi(z)$ бесконечно удаленная точка является правильной, причем $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z) = c_{-2}.$ Следовательно, функция $\varphi(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки и, в частности, на полуокружности C_R, если ее радиус R достаточно велик, т. е. во всех точках полуокружности C_R $|\varphi(z)| \le M,$ где M – некоторое положительное число.

Отсюда

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{C_R} \frac{\varphi(z)\,dz}{z^2}\right| \le \frac{M}{R^2}\pi R = \frac{M\pi}{R} \ \text{ и } \ \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

А так как $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$ то тем самым доказано, что если функция $f(z)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *равен произведению числа* $2\pi i$ *и суммы вычетов функции* $f(z)$ *относительно всех ее особых точек, расположенных в верхней полуплоскости.*

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$. Функция $\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$ имеет в бесконечности нуль четвертого порядка; особыми точками функции являются полюсы второго порядка в точках $z = \pm i$, из которых только первый находится в верхней полуплоскости.

Имеем

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}, i\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{\left(z^2-i\right)^2}{\left(z^2+1\right)^2}\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\left(z+i\right)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{-2}{\left(z+i\right)^3} = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{1}{4}i.$$

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}i\right) = \frac{\pi}{2}.$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ может быть вычислен с помощью теории вычетов и в некоторых других случаях. В частности, интегралы такого вида, встречающиеся в операционном исчислении, часто удается вычислить с помощью ***леммы Жордана***: *пусть*

C_R *– лежащая в верхней полуплоскости дуга окружности радиусом* R *с центром в некоторой фиксированной точке* z_0 (рис. 15), *а функция* $f(z)$ *имеет вид* $f(z) = e^{itz}F(z)$, *причем* $t > 0$. *Если функция* $F(z)$ *аналитична на действительной оси, а в верхней полуплоскости имеет лишь конечное число особых точек и* $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, *то* $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$.

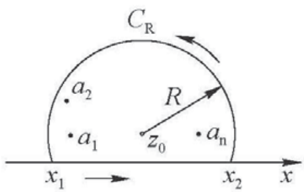


Рис. 15

Очевидно, что если a_1, a_2, ..., a_n – особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, то при достаточно большом R (см. рис. 15) $\int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{res}\left[f(z), a_k\right]$.

Очевидно также, что при $R \to \infty$ имеем $x_1 \to -\infty$, $x_2 \to +\infty$; переходя к пределу при $R \to \infty$, по лемме Жордана получим $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{res}\left[f(z), a_k\right]$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\cos x\, dx}{x^2 - 2x + 10}$. Функция $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Здесь $t = 1$ и $F(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z + 10}$. Особые точки функции $f(z)$ – полюсы первого порядка $z = 1 + 3i$ и $z = 1 - 3i$ (эти точки являются нулями первого порядка для функции $z^2 - 2z + 10$). В верхней полуплоскости имеется единственная особая точка $z = 1 + 3i$. Вычислим вычет функции $f(z)$ относительно этой точки:

$$\operatorname{res}\left[f(z), 1+3i\right] = \frac{ze^{iz}}{\left(z^2 - 2z + 10\right)'}\Big|_{z=1+3i} = \frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} = 2\pi i \frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i} = \frac{\pi}{3} e^{-3} \left(\cos 1 + i \sin 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} e^{-3} \left(\cos 1 - 3\sin 1\right) + i \frac{\pi}{3} e^{-3} \left(3\cos 1 + \sin 1\right).$$

Сравнивая действительные и мнимые части в обеих частях этого равенства и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2 - 2x + 10} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2 - 2x + 10} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 - 2x + 10},$$

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3} e^{-3} \left(\cos 1 - 3\sin 1\right);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3} e^{-3} \left(3\cos 1 + \sin 1\right).$$

9.3. Логарифмический вычет

Понятие логарифмического вычета. Пусть в области J задана однозначная функция $f(z)$, аналитическая всюду в J, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k = 1, \ldots, p$), причем все z_k являются полюсами. Предположим, что на границе Γ области J нет ни нулей, ни особых точек функции $f(z)$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$\varphi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Функцию $\varphi(z)$ часто называют *логарифмической производной* функции $f(z)$, а вычеты функции $\varphi(z)$ в ее особых точках z_m ($m = 1, ..., M$) – *логарифмическими вычетами* функции $f(z)$. Определим особые точки функции $\varphi(z)$ в области J. В силу общих свойств аналитических функций ясно, что особыми точками функции $\varphi(z)$ будут нули $\tilde{z}_k\left(k=1,...,n\right)$ и полюсы z_k ($k = 1, ..., p$) функции $f(z)$. Найдем значение вычета функции $\varphi(z)$ в каждой из ее особых точек. Пусть точка $z=\tilde{z}_k$ является нулем порядка n_k функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=\left(z-\tilde{z}_k\right)^{n_k} f_1(z)$, $f_1\left(\tilde{z}_k\right)\neq 0$, причем точка $\tilde{z}_k$ является правильной точкой функции $f_1(z)$. Вычисляя функцию $\varphi(z)$ в окрестности точки $z=\tilde{z}_k$ по формуле $\varphi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, получаем

$$\varphi(z)=\left(\ln f(z)\right)'=n_k\left(\ln\left(z-\tilde{z}k\right)\right)'+\left(\ln f_1\right)'=\frac{n_k}{z-\tilde{z}k}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Отсюда следует, что точка $\tilde{z}_k$ является полюсом первого порядка функции $\varphi(z)$, причем вычет функции $\varphi(z)$ в этой точке равен n_k. Итак, в нуле порядка n_k логарифмический вычет функции $f(z)$ равен n_k, т. е. порядку нуля: $\operatorname{res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},\tilde{z}_k\right]=n_k$.

Пусть точка z_k является полюсом порядка p_k функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{\left(z-z_k\right)^{p_k}}$, $f_1(z_k)\neq 0$, причем точка z_k является правильной точкой функции $f_1(z)$. Поэтому для логарифмической производной функции $f(z)$ в окрестности точки $z = z_k$ получим выражение

$\varphi(z) = -\dfrac{p_k}{z - z_k} + \dfrac{f_1'(z)}{f_1(z)}$. Отсюда следует, что точка z_k также является полюсом первого порядка функции $\varphi(z)$, причем вычет в этой точке равен $-p_k$. Итак, в полюсе порядка p_k логарифмический вычет функции $f(z)$ равен порядку полюса, взятому со знаком «–»: $\operatorname{res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = -p_k$.

Подсчет числа нулей аналитической функции. Полученные результаты позволяют доказать важную теорему.

Теорема 9.3. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\overline{J}$, за исключением конечного числа лежащих внутри J изолированных особых точек z_k, являющихся полюсами, и пусть $f(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке границы Γ области J. Тогда разность между полным числом нулей и полным числом полюсов функции $f(z)$ в области J определяется выражением* $N - P = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma^+} \dfrac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta.$

Под полным числом нулей (полюсов) понимается число нулей N (число полюсов P) с учетом их кратности: $N = \sum\limits_{k=1}^{n} n_k$, $P = \sum\limits_{k=1}^{p} p_k$.

Доказательство. Интеграл по Γ от функции $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ может быть вычислен с помощью основной теоремы теории вычетов; так как все особые точки функции $\varphi(z)$ – это нули и полюсы функции $f(z)$, а вычеты в них определяются формулами $\operatorname{res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}, \tilde{z}_k\right] = n_k$ и $\operatorname{res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}, \tilde{z}_k\right] = -p_k$, то

$$\int\limits_{\Gamma^+} \varphi(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{m=1}^{M} \operatorname{res}\left[\varphi(z), z_m\right] = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} n_k - \sum_{k=1}^{p} p_k \right) = 2\pi i (N - P),$$

что и доказывает теорему.

Покажем простой геометрический смысл доказанной теоремы, для чего преобразуем интеграл, стоящий в правой части равенства $N - P = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+} \dfrac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+} d \ln f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+} d\Big(\ln\left|f(\zeta)\right| + i \arg f(\zeta) \Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+} d \ln\left|f(\zeta)\right| + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^+} d \arg f(\zeta).$$

Действительная функция $\ln|f(\zeta)|$ – однозначная, поэтому ее вариация (изменение) при обходе точкой ζ замкнутого контура Γ равна нулю. Следовательно, первое слагаемое в правой части равно нулю. Второе слагаемое представляет собой полную вариацию аргумента функции $f(\zeta)$ при обходе точкой ζ замкнутого контура Γ, деленную на 2π. Итак, $N - P = \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{Var}\left[\arg f(z)\right]_{\Gamma^+}$. Будем изображать значения функции $w = f(z)$ точками на комплексной плоскости w. Так как функция $f(z)$ непрерывна в области $\overline{J}$, то при полном обходе точкой z контура Γ на плоскости z соответствующая точка w описывает некоторый замкнутый контур C. При этом точка $w = 0$ может оказаться как внутри, так и вне области, ограниченной контуром C. В первом случае вариация аргумента w при полном обходе C равна нулю, во втором случае она определяется числом полных обходов вокруг точки $w = 0$, которые совершает точка w при движении по контуру C. При этом точка w может обходить точку $w = 0$ как по часовой стрелке (в отрицательном направлении), так и против нее (в положительном направлении). Итак, разность полного числа нулей и полюсов функции $f(z)$ в области J определяется числом оборотов, которые совершает точка $w = f(z)$ вокруг точки $w = 0$ при положительном обходе точкой z контура Г. Эти соображения часто оказываются существенными при подсчете числа нулей аналитической функции в заданной области. При этом во многих случаях вычисления можно значительно облегчить благодаря следующей теореме.

Теорема 9.4. Теорема Руше. *Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в замкнутой области $\overline{J}$, причем на границе Г области J имеет место неравенство $\left|f(z)\right|_\Gamma > \left|\varphi(z)\right|_\Gamma$. Тогда полное число нулей в области J функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ равно полному числу нулей функции $f(z)$* (рис. 16).

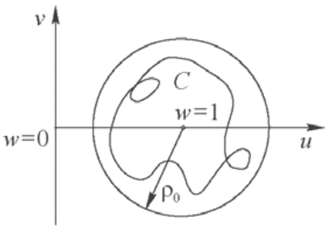


Рис. 16

Пример. Найти полное число нулей функции $F(z) = z^8 - 5z^5 - 2z + 1$ внутри единичного круга $|z| < 1$. Представим функцию $F(z)$ в виде $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, положив $f(z) = -5z^5 + 1$ и $\varphi(z) = z^8 - 2z$. Тогда $\left|f(z)\right|_{|z|=1} \geq \left|-5z^5\right|_{|z|=1} - 1 = 4$, $\left|\varphi(z)\right|_{|z|=1} \leq \left|z^8\right|_{|z|=1} + \left|2z\right|_{|z|=1} = 3$, откуда $\left|f(z)\right|_{|z|=1} > \left|\varphi(z)\right| > 0$. Следовательно, полное число нулей в области $|z| < 1$ функции $F(z)$ равно полному числу нулей функции $f(z)$, которая имеет пять нулей: $z_k = \sqrt[5]{\frac{1}{5}} e^{i\frac{2\pi k}{5}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$.

Важным принципиальным следствием теоремы Руше является *основная теорема высшей алгебры.*

Теорема 9.5. *Полином n-й степени имеет на комплексной плоскости ровно n нулей (с учетом их кратности).*

Доказательство. Представим полином $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ в виде $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, положив $f(z) = a_0 z^n$, $\varphi(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

Составим отношение $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)} = \dfrac{a_1}{a_0} \cdot \dfrac{1}{z} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_0} \cdot \dfrac{1}{z^n}$. Легко увидеть, что при любых заданных значениях коэффициентов a_0, a_1, ..., a_n всегда найдется такое значение R_0, что для всех значений $|z| = R > R_0$ имеет место неравенство $0 < \left|\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right|_{|z|=R} < 1$. В силу теоремы Руше отсюда следует, что полное число нулей функции $F(z)$ в круге $|z| = R$ равно числу нулей функции $f(z) = a_0 z^n$ в этом круге. Но функция $f(z) = a_0 z^n$ на всей комплексной плоскости имеет единственный n-кратный ноль – точку $z = 0$. В силу произвольности $R \geq R_0$ отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Список литературы

Литература к историческому очерку

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич // Математика XIX века : Геометрия : Теория аналитических функций / Б. Л. Лаптев [и др.]. – М. : Наука, 1981. – С. 115–255.

2. *Юшкевич А. П.* Элементы теории функций комплексного переменного / А. П. Юшкевич // История математики. В 3 т. Т. 3. Математика XVIII столетия / под ред. А. П. Юшкевича. – М. : Наука, 1972. – С. 365–368.

3. *Ермолаева Н. С.* Аналитические исследования Ю. В. Сохоцкого / Н. С. Ермолаева // Историко-математические исследования. – 1993. – Вып. 34. – С. 60–103.

4. *Синкевич Г. И.* Формирование топологических понятий в лекциях Вейерштрасса 1886 года / Г. И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ : межвуз. тематич. сб. тр. – 2013. – Вып. 19. – С. 4–23.

Литература к лекциям

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. – М. : ГИТТЛ, 1950. – 704 с.

2. *Свешников А. Г.* Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Физматлит, 2010. – 334 с.

3. *Араманович И. Г.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1968. – 416 с.

4. *Романовский П. И.* Ряды Фурье : Теория поля : Аналитические и специальные функции : Преобразование Лапласа / П. И. Романовский. – М. : ГИТТЛ, 1957. – 292 с.

Литература к практическим занятиям

1. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Физматлит, 2006. – 336 с.

2. *Краснов М. Л.* Функции комплексного переменного : Операционное исчисление : Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 304 с.

3. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986. – 416 с.

Оглавление

Учебное издание

Синкевич Галина Ивановна,
Полякова Оксана Рудольфовна

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ
Конспект лекций

Учебное пособие

Редактор *Т. В. Середова*
Корректор *Е. Н. Апринцева*
Компьютерная верстка *М. В. Смирновой*

Подписано к печати 26.01.2024. Формат $60\times84\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 6,7. Тираж 100 экз. Заказ 5. «С» 3.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.
Отпечатано на МФУ. 198095, Санкт-Петербург, ул. Розенштейна, д. 32, лит. А.