ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

А.О. Юлина
старший преподаватель 114 кафедры
Д.В. Бородин
курсант
Военно-Космическая академия
им.А.Ф. Можайского
Санкт-Петербург, Российская Федерация

О РАБОТЕ И.В. МЕЩЕРСКОГО В ОБЛАСТИ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ МОНОРЕЛЬСОВОГО ВАГОНА

В работе подробно рассмотрена статья И.В. Мещерского «Дифференциальные уравнения движения гироскопического вагона однорельсовой железной дороги». Проанализирована значимость статьи в первой половине XX века в истории науки и техники. Приводится история открытия гироскопа и велосипеда. Показана современная актуальность работ И.В. Мещерского и П.П. Шиловского.

Ключевые слова: *Мещерский, дифференциальные уравнения, гироскоп, стабилизация, однорельсовый механизм.*

A.O. Yulina
Lecturer at the Department of 114
D.V. Borodin
Student
A.F. Mozhaisky Military-Space Academy
St. Petersburg, Russian Federation

ON I.V. MESHCHERSKIY WORK IN THE FIELD OF GYRO STABILIZATION OF MONORAIL CAR

I. Meshchersky's article «Differential equations of gyroscopic car motion of single-rail railway» is considered in detail. Significance of the article in the first half of the 20th century for history of science and technology is analyzed. History of the discovery of gyroscope and bicycle is given. Modern actuality of Meshchersky and Shilovsky works is shown.

Keywords: *Meshcherskiy, differential equations, gyroscope, stabilization, single-rail mechanism.*

DOI: 10.25791/intstg.04.2020.1174

Статья «Дифференциальные уравнения движения гироскопического вагона однорельсовой железной дороги» была написана Иваном Всеволодовичем в 1921 году в рамках проекта «Гироскопическая однорельсовая железная дорога Петербург-Гатчина», автором которого выступал Петр Петрович Шиловский (1871–1957). Долгое время нам не удавалось отыскать даже упоминания источника, содержащего данную статью, что в совокупности с нестандартной для автора тематикой вызывает повышенный интерес к этой работе. Для более детального понимания содержания статьи, и ее значимости в период первой половины XX века следует начать ее изучение с истории некоторых предшествующих открытий.

В 1817 году Иоанн Боненбергер (Johann von Bohnenberger; 1765–1831) изобрёл, а следом и опубликовал описание гироскопа [4]. Главной частью устройства был вращающийся массивный шар в кардановом подвесе. В 1852 году французский учёный Ж.Б. Фуко (J. B. L. Foucault, 1819–1868) усовершенствовал гироскоп и впервые использовал его как прибор, доказывающий суточное вращение Земли. В последние два десятилетия XIX века параллельно с началом практического использования гироскопа миру было представлено еще одно, казалось бы, никак не связанное с предыдущим изобретение. Дж.К. Старли (J.K. Starley, 1854–1901) показал миру первый двухколесный велосипед, похожий на

используемые в наши дни, который за 2-3 года практически полностью вытеснил всех своих предшественников, в большинстве своем имевших трех-четырехколесные конструкции [2].

Впервые уравновешенный гироскоп нашел практическое применение в устройстве для стабилизации курса торпеды, изобретенном в 1880-х гг. австрийским инженером Л. Обри (L. Obry, 1863–1915) [3]. Гироскоп Обри устанавливался в кардановом подвесе так, чтобы его ось вращения была параллельна продольной оси торпеды. Ротор гироскопа приводился во вращение за несколько секунд до выстрела, когда ось торпеды была уже направлена на цель. При движении торпеды гироскоп продолжал сохранять исходное направление и при возникновении отклонений торпеды поворачивал ее рули таким образом, чтобы обеспечить неизменность курса.

Строительство железных дорог, по мнению П.П. Шиловского, должно пройти эволюцию, подобную жизни велосипеда. Для перехода на один рельс необходимо было найти способ держать поезд в равновесии. И уже к 1907 году такое механическое приспособление было найдено австрийским инженером Л. Обри (L. Obry, 1863–1915) [3].

Август Шерль (August Scherl, 1849–1921) [5] в Берлине и Луи Бренанн (Louis Brennan, 1852–1932) в Лондоне, независимо друг от друга, продемонстрировали первые модели однорельсовых поездов, стабилизация которых была основана на применении гироскопов.

В 1909 году Петр Петрович Шиловский сразу в России, Великобритании, Франции, Германии и США подал патентные заявки на систему гироскопической балансировки железнодорожного транспорта. Все патенты, кроме российского, он получил или в том же, или в следующем году, и лишь отечественные чиновники рассматривали его заявку почти пять лет. Для получения хоть какого-то финансирования нужен был действующий образец, который Шиловский и продемонстрировал, как ранее Бреннан, в 1911 году на Петербургской железнодорожной выставке, посвященной 75-летию российских железных дорог. Макет получил грамоту-похвалу. Но так и оставался макетом, даже несмотря на то, что была предпринята попытка строительства на Аляске однорельсовой дороги протяженностью 160 км. Известно лишь, что в России Шиловский не получил должной поддержки и был вынужден отправиться в Лондон, где продемонстрировал идею руководителям крупного автомобильного завода Wolseley Tool & Motorcar Company.

Схема Шиловского в корне отличалась от схемы Бреннана: Шиловский полагал построить гирокар-автомобиль, не нуждающийся в рельсе. И уже 13 ноября 1913 года первый в истории гирокар проехал по внутренней территории завода Wolseley. Машина, естественно, получилась неимоверно тяжелой – 2 750 килограммов, из которых 600 кг весил маховик метрового диаметра. Она была оснащена двумя двигателями – обычным ДВС и приводимым от него генератором, питавшим электромотор, который раскручивал гироскоп.

Успех изобретения Шиловского все-таки сумел привлечь к себе внимание Русского общества. Идея перехода на однорельсовый железнодорожный транспорт становилась очень привлекательной. Большие надежды на изобретение возложили и военные ведомства, заинтересованные возможностью быстрого строительства подъездных путей.

15 апреля 1921 года «Красная газета» сообщила, что Президиум ВСНХ Постановил использовать бездействующую бывшую царскую ветку Петроград – Детское Село – Александровка (Гатчина) для строительства однорельсовой гироскопической железной дороги, рассчитанной для движения состава со скоростью до 150 верст/час (1 верста ≈1,0668 км).Такая скорость для двухрельсовых дорог была пока недоступна. Автором проекта выступал П.П. Шиловский. Гиропоезд создавался как электровоз с собственной генераторной станцией, оснащенной двумя ДВС по 250 л.с. Предполагалось, что поезд будет составлен из двух вагонов обтекаемой формы – моторного и пассажирского на 50 человек.

Ивану Всеволодовичу Мещерскому, в свою очередь, предоставили возможность описать уравнениями движение вагона этого гиропоезда и принять непосредственное участие в осуществлении проекта. К этому времени Иван Всеволодович Мещерский (1859–1935)

уже был известным механиком, профессором Санкт-Петербургского Политехнического университета, автором известного задачника «Сборник задач по теоретической механике» (первое издание 1914 г.), его работы по динамике переменной массы стали теоретической основой современной ракетодинамики.

Предметом статьи стало составление точных дифференциальных уравнений движения гироскопического вагона и определение с помощью этих уравнений величины погрешностей, которые допускаются в том случае, когда движение вагона выражается приближенными линейными дифференциальными уравнениями. Рассмотрим основные параграфы [1].

1. Обозначения. Механическая система: кузов вагона с грузом, гироскопический стабилизатор, две пары колес.

И.В. Мещерский обозначает штрихами и линейные величины, и скорости, поэтому подробно вводит все обозначения.

AOB – плоскость пути, будем считать ее горизонтальной. Точка *O* неизменно связанная с вагоном, находится на оси колебаний вагона, *OY* – прямая, параллельная продольной оси вагона; положительное направление совпадает с направлением движения вагона по рельсу. Пусть *OZ* будет та ось наклоненного вагона, которая при нормальном его положении совпадает с вертикалью *OC*.

Θ – угол наклонения вагона, отсчитываемый от вертикали. Прямая *OX* перпендикулярна к плоскости *YOZ*.

Пусть $O_1\zeta$ – ось гироскопа; $O_1\xi$ – ось вращения стабилизатора; она параллельна *OX* и составляет угол θ с прямой, параллельной *OA*; ось $O_1\eta$ перпендикулярна к плоскости $\xi O_1\zeta$.

Ψ – угол отклонения оси гироскопа $O_1\zeta$ от оси *OZ*, с которой она совпадает при нормальном положении вагона.

Координаты в системе *XOY*:

центра тяжести кузова вагона: x_0, y_0, z_0;

центров тяжести передних колес: $x' = 0$, y', $(y' + a)$, $z' = R'$,

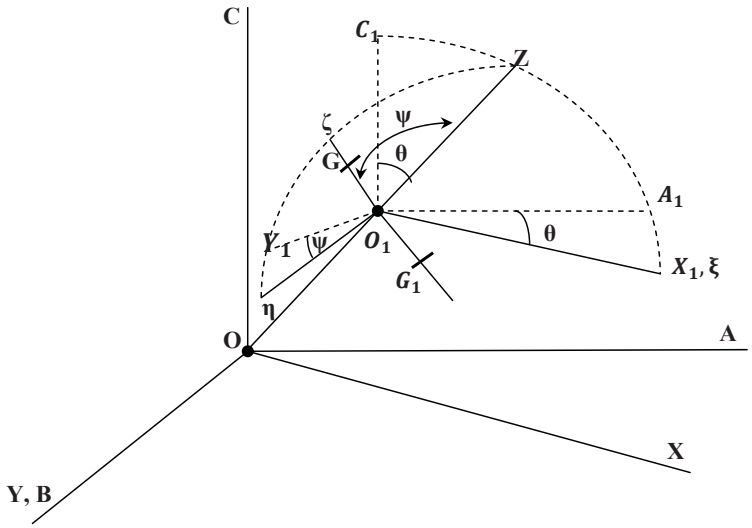
a – расстояние между осями колес пары, и R' их радиус;

центров тяжести задних колес: $x' = 0$, $-y'$, и $-(y' + a)$, $z' = R'$.

Центры тяжести частей стабилизатора: *G* – гироскопа, G_1 – кожуха и G_2 – добавочного груза:

$h = O_1G$, $h_1 = O_1G_1$, $h_2 = O_2G_2$. Знаки величин h, h_1, h_2 зависят от положения соответствующих центров тяжести на по положительной или на отрицательной стороне оси $O_1\zeta$. Расстояние OO_1 обозначим через *H*.

Скорости: угловая скорость вращения гироскопа около его оси $O_1\zeta$ – $\mathbf{\Omega}$; $\boldsymbol{\theta}'$ – угловая скорость вращения вагона около оси *OY*, $\boldsymbol{\psi}'$ – угловая скорость вращения гироскопа и кожуха около оси $O_1\xi$. ***V*** – скорость движения



Чертеж 1

вагона по рельсу (точки O) – функция времени, в частности, величина постоянная, направлена по оси OY.

$\boldsymbol{\omega}^{/}$ – величина угловой скорости колес, $\omega^{/} = \frac{V}{R^{/}}$. $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость поворота вагона около вертикальной оси на криволинейном участке пути.

Массы: M_0 – кузов вагона, $M^{/}$ – колесо вагона, m – масса гироскопа, m_1 – кожух, m_2 – прибавочный груз, M – масса всего стабилизатора и l – расстояние центра тяжести стабилизатора от оси вращения.

$$M = m + m_1 + m_2$$
$$Ml = mh + m_1 h_1 + m_2 h_2,$$

M – масса всей системы, L – расстояние от рельса до горизонтальной плоскости, в которой находится центр тяжести всей системы, когда вагон и стабилизатор не отклонены от вертикального положения:

$$\mathbf{M} = M_0 + 4M^{/} + M,$$

$$\boldsymbol{ML} = M_0 z_0 + 4M^{/} R^{/} + M(H + l).$$

Центральные моменты инерции, относительно осей, параллельных OX, OY, OZ:

кузова вагона A_0, B_0, C_0,

каждого из колес $A^{/}$, $B^{/}$, $C^{/}$.

Центробежные моменты инерции кузова D, E, F.

Центральные моменты инерции частей стабилизатора относительно осей, параллельных $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$:

гироскопа A, B, C,

кожуха A_1, B_1, C_1,

добавочного груза A_2, B_2, C_2.

Моменты инерции всего стабилизатора относительно оси вращения $O_1\xi - A$, относительно оси, совпадающей с осью гироскопа $O_1\zeta - C$

$$\boldsymbol{A} = A + A_1 + A_2 + mh^2 + m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2$$
$$\boldsymbol{C} = C + C_1 + C_2.$$

Момент инерции всей системы относительно рельса в нормальном положении:

$$K = M_0\left(x_0^2 + z_0^2\right) + 4M^{/}R^{/2} +$$
$$+MH\left(H + 2l\right) + B_0 + 4B^{/} + A.$$

2. Выражения живой силы (так по Лейбницу раньше называли кинетическую энергию) системы и силовой функции ($\Pi = -U$, Π – потенциальная энергия, U – силовая функция).

Живая сила каждой из частей системы представляет сумму двух живых сил: движения поступательного и движения вращательного около центра тяжести.

$T_{O_{1C}}, T_{O_{1r}}$ – живая сила кузова вагона; $T_C^{/}, T_r^{/}$ – живая сила для двух пар колес: T_C, T_r – для гироскопа: $T_{O_{2C}}, T_{O_{2r}}$ – для прибавочного груза: T – живая сила всего стабилизатора.

Кузов вагона:

$$2T_{O_{1C}} = M_0\left\{\begin{array}{l}\theta^{/2}\left(x_0^2 + z_0^2\right) + \left[V + \omega\left(x_0\cos\theta + z_0\sin\theta\right)\right]^2 + \\ +\omega^2 y_0^2 + 2\omega\theta^{/} y_0\left(x_0\sin\theta - z_0\cos\theta\right)\end{array}\right\}$$

$$2T_{O_{1r}} = B_0\theta^{/2} + \omega^2\left(A_0\sin^2\theta + C_0\cos^2\theta + E\sin 2\theta\right) +$$
$$+2\omega\theta^{/}\left(F\sin\theta - D\cos\theta\right)$$

$$\boldsymbol{T}_0 = T_{O_{1C}} + T_{O_{1r}}.$$

Колеса вагона:

$$2T_C^{/} = 4M^{/}\left[\begin{array}{l}R^{/2}\theta^{/2} + \left(V + R^{/}\omega\sin\theta\right)^2 + \\ +\left(y^{/2} + ay^{/} + \frac{1}{2}a^2\right)\omega^2\end{array}\right],$$

$$2T_r^{/} = 4\left[A^{/}\left(\omega^{/} + \omega\sin\theta\right)^2 + B^{/}\left(\theta^{/2} + \omega^2\cos^2\theta\right)\right].$$

Стабилизатор

Для гироскопа:

$$2T_C = m\left\{\begin{array}{l}V^2 + \theta^{/2}\left(\mathrm{H} + \mathrm{h}\cos\psi\right)^2 + \mathrm{h}^2\Psi^{/2} + \\ +\omega^2\left[\left(\mathrm{H} + \mathrm{h}\cos\psi\right)^2\sin^2\theta + \mathrm{h}^2 sin^2\psi\right] + \\ +2\psi^{'}\omega h\left(\mathrm{H}\cos\psi + \mathrm{h}\right)\sin\theta - \\ -2\theta^{'}\omega h\left(H + h\cos\psi\right)\cos\theta\sin\psi + \\ +2V\omega\left(H + h\cos\psi\right)\sin\theta + 2V\psi^{'}h\cos\psi\end{array}\right\}.$$

Для кожуха получаем аналогичное выражение $2T_{1,\,c}$, только вместо h, m войдут h_1, m_1. Для прибавочного груза, h_2 если изменяется с течением времени, в выражение войдет добавочный член $m_2[\left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 + 2\frac{dh_2}{dt}(V + \omega H\sin\theta)\sin\psi]$.

Таким образом, удвоенная кинетическая энергия поступательного движения всех частей стабилизатора будет:

$$2(T_C + T_{1,c} + T_{2,c}) =$$
$$M\left\{\begin{array}{l} V^2 + H\theta^{/2}\left(H + 2l\cos\psi\right) + \\ +H\omega^2\left(H + 2l\cos\psi\right)\sin\theta + 2Hl\psi'\omega\sin\theta\cos\psi - \\ -2Hl\theta'\omega\cos\theta\sin\psi + 2HV\omega\sin\theta + \\ +2lV(\psi' + \omega\sin\theta)\cos\psi \end{array}\right\} +$$
$$+\left(mh^2 + m_1h_1^2 + m_2h_2^2\right)\cdot$$
$$[\theta'^2\cos^2\psi + \psi'^2 + \omega^2\left(\left(\sin^2\theta\cos^2\psi\right) + \sin^2\psi\right) +$$
$$+2\psi'\omega\sin\theta - 2\theta'\omega\cos\theta\sin\psi\cos\psi] +$$
$$+m_2[\left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 + 2\frac{dh_2}{dt}(V + \omega H\sin\theta)\sin\psi].$$

Кинетическая энергия вращательного движения стабилизатора:

$$2\left(T_r + T_{1,r} + T_{2,r}\right) =$$
$$= \left(A + A_1 + A_2\right)[(\psi' + \omega\sin\theta)^2 + (\theta'\cos\psi\text{-}\omega\cos\theta\sin\psi)^2 +$$
$$+C\Omega^2 + 2C\Omega\left(\theta'\sin\psi + \omega\cos\theta\cos\psi\right) + C(\theta'\sin\psi + \omega\cos\theta\cos\psi)^2].$$

Удвоенная сумма живых сил всей системы будет равна:

$$2\boldsymbol{T} = 2T_{O_{1C}} + 2T_{O_{1r}} + 2T_C^{/} +$$
$$+2T_r^{/} + 2T_C + 2Tr.$$

Силовая функция для сил тяжести U, приложенных к системе, имеет следующее выражение:

$$U = -g\begin{bmatrix} M_0z_0 + 4M'z' + \\ +M\left(H + l\cos\psi\right) \end{bmatrix}\cos\theta + gM_0x_0\sin\theta.$$

3. Числовые предположения для оценки погрешностей.

Из выражений кинетической энергии и силовой функции получаются весьма сложные уравнения движения. Для того чтобы отбросить те или иные члены, необходимо представлять величину погрешности, возникающей при отбрасывании того или иного слагаемого. На данном этапе автор принимает некоторые определенные числовые значения для величин, входящих в уравнения. Эти величины могут значительно отличаться от действительных. Однако изменение данных величин в пределах некоторых приближенных пропорциональностей не оказывает влияния на полученную оценку погрешностей. За единицу массы берем тонну, за единицу длины метр, за единицу времени секунду (таблица).

4. Уравнения движения по прямому участку пути с постоянной скоростью.

Простой тип движения вагончика: движение по прямому участку пути с постоянной скоростью. Для такого движения $\omega = 0$, $V = \text{const}$, $\omega' = \text{const}$, $h_2 = \text{const}$.

Удвоенная кинетическая энергия системы будет

$$2T = Mv^2 + 4A'\omega^{/2} + 2MlV\psi'\cos\psi +$$
$$+K\theta'^2 - 2MHl\left(1 - \cos\psi\right)\theta'^2 -$$
$$-\left(A - C\right)\theta'^2\sin^2\psi + A\psi'^2 + C\Omega^2 + 2C\Omega\theta'\sin\psi.$$

Составляем уравнение, содержащее угловое ускорение θ'':

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\theta'} - \frac{\partial T}{\partial\theta} - \frac{\partial U}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = \theta'\begin{bmatrix} K - 2MHl\left(1 - cos\,\psi\right) - \\ -\left(A - C\right)\sin^2\psi \end{bmatrix} + C\Omega\sin\psi; \frac{\partial T}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = g\left[ML - Ml\left(l - \cos\psi\right)\right]\sin\theta + gM_0x_0\cos\theta.$$

Составляем уравнение, содержащее угловое ускорение ψ''

Таблица

Величина	Значение, допущенное И.В. Мещерским	Значение из проектной документации (прицепной вагон)
Масса M_0	3,8	10,5
Разность главных моментов инерции $A_0 - C_0$	10	
Центробежные моменты *D, F, E*	10; 10; 1	
X_0, Y_0, Z_0 (координаты центра тяжести кузова)	±0,1; ±1; 1	0, 0, 1
$R^/$, $M^/$ радиус, масса колеса	0,57; 0,18;	
Центральные моменты инерции $A^/$, $B^/$	0,05; 0,025	
Расстояние от средней поперечной плоскости до колеса $Y^/$, *a*	4,8 ; 2,4	
Момент количества движения гироскопа вокруг его оси $C\Omega$	15,2	
Расстояния *H, l,* h_1	1; 0,05; 0,4	
Масса стабилизатора *M*	0,45	5,5
Масса прибавочного груза m_2	0,02	
Моменты инерции *A, C*	0,12; 0,16	
M всей системы	5	29
Расстояние рельс – центр тж	1	1
Момент инерции относительно рельса *K*	12	
Наибольшие углы наклонения θ, ψ Принимаем период колебаний 12 сек, получаем наибольшие значения соответствующих угловых скоростей $\theta^/$,$\psi^/$	10, 60, 0.09; 0.55	
Скорость поезда *V*	40	До 150–200
Радиус закругления	500	
Угловая скорость ω	0,08	
Для колес $\omega^/$	70	

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \psi'}-\frac{\partial T}{\partial \psi}-\frac{\partial U}{\partial \psi}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi}=-MVl\psi'\sin\psi-MHl\theta'^2\sin\psi-$$

$$-(A-C)\theta'^2\sin\psi\cos\psi+C\Omega\theta'\cos\psi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'}=MVl\cos\psi+A\psi'$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi}=gMl\cos\theta\sin\psi.$$

Таким образом, получаем дифференциальные уравнения равномерного движения вагончика по прямому участку пути:

$$\theta''\left[K-2MHl(1-\cos\psi)-(A-C)\sin^2\psi\right]-$$

$$-2\theta'\psi'\left[MHl+(A-C)\cos\psi\right]\sin\psi+$$

$$+C\Omega\psi'\cos\psi-g\left[ML-Ml(l-\cos\psi)\right]\sin\theta+gM_0x_0\cos\theta=0$$

$$A\psi''+\theta'^2\left[MHl+(A-C)\cos\psi\right]\cdot sin\psi-$$

$$-C\Omega\theta'\cos\psi-gMl\cos\theta\sin\psi=0.$$

Отбрасывая добавочные к моменту инерции K члены, в коэффициенте при θ'' погрешность при использовании данных уравнений не превосходит 0,05 % т.к. данные члены не превосходят 0,053, при значении $m = 12$.

Отбрасывая подобные малые величины в сравнении с соседними слагаемыми, автор приходит к дифференциальным уравнениям вида:

$$\theta''[K]+C\Omega\psi'\cos\psi-g([ML]\sin\theta+$$

$$+M_0x_0\cos\theta)=0$$

$$A\psi''-C\Omega\theta'\cos\psi-gMl\cos\theta\sin\psi=0.$$

Суммарная погрешность не превышает 0,5 %. Далее вводя множитель $\kappa = 0{,}75$ для замены $\cos\psi$ и, переходя от $\cos\psi$ к ψ, получаем:

$$\theta''[K]+C\Omega\psi'k-g\left([ML]\theta+M_0x_0\right)=0$$

$A\psi''-C\Omega\theta'k-gMl\psi=0$, с погрешностью не более 25 %.

5. Уравнения неравномерного движения по прямому участку пути.

При рассмотрении уравнения неравномерного движения по прямому участку пути первое уравнение останется без изменений:

$$\theta''[K]+C\Omega\psi'\cos\psi-g\left([ML]\sin\theta+M_0x_0\cos\theta\right)=0$$

$$\theta''[K]+C\Omega\psi'k-g\left([ML]\theta+M_0x_0\right)=0.$$

Во второе уравнение, в свою очередь, добавляется одно слагаемое, выражающее торможение поезда $Ml\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\cos\psi$. Таким образом, второе уравнение движения будет иметь вид:

$$A\psi''-C\Omega\theta'k-gMl\psi+Ml\frac{dV}{dt}=0.$$

6. Уравнения равномерного движения по закруглению.

Рассматривая движение с постоянной скоростью по дуге окружности радиуса R, получаем зависимость $V = R\omega$, где $\omega = \text{const}$.

Получим уравнения:

$$\theta''[\mathrm{K}]+\mathrm{C}\Omega\psi'\cos\psi-\ \mathrm{g}\left([ML]\sin\theta+M_0x_0\cos\theta\right)-$$

$$-\omega V\left(ML\cos\theta-M_0x_0\sin\theta\right)-4A'\omega'\omega\cos\theta=0,$$

с погрешностью менее 2,5 %.

$$A\psi''-C\Omega\theta'\cos\psi-gMl\cos\theta\sin\psi+$$

$$+MlV\omega\sin\theta\sin\psi+C\Omega\omega\cos\theta\sin\psi=0,$$

погрешность менее 0,4 %.

Или же с погрешностью не более 25 %

$$\theta''[K]+C\Omega\psi'k-g\left([ML]\theta+M_0x_0\right)-$$

$$-\omega V\left(ML-M_0x_0\theta\right)=0$$

$$A\psi''-C\Omega\theta'k+\psi(-gMl+C\Omega\omega)=0.$$

7. Уравнения неравномерного движения по закруглению.

В случае неравномерного движения вагона по дуге окружности радиуса R, $\omega \neq \text{const}$, приближенные дифференциальные уравнения автор приводит в виде

$$\theta''[K]+C\Omega\psi'k-g\left([ML]\theta+M_0x_0\right)-$$

$$-\omega V\left(ML-M_0x_0\theta\right)=0$$

$$A\psi''-C\Omega\theta'k+\psi\left(-gMl+C\Omega\omega\right)+Ml\frac{dV}{dt}=0.$$

8. Уравнения движения в общем случае. Общий случай представляется тогда, когда

рассматривается движение вагона со скоростью, которая есть функция времени, по кривой $V = F(t)$, $\varphi = f(s)$. В уравнения движения войдут добавочные члены, и уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$\theta''[K] + C\Omega\psi'\cos\psi - g\left([ML]\sin\theta + M_0 x_0\cos\theta\right) -$$
$$-\omega V\left(ML\cos\theta - M_0 x_0\sin\theta\right) - 4A'\omega'\omega\cos\theta +$$
$$+2m_2\frac{dh_2}{dt}(H + h_2\cos\psi)(\theta'\cos\psi - \omega\cos\theta\sin\psi) = 0$$

$$A\psi'' - C\Omega\theta'\cos\psi - gMl\cos\theta\sin\psi +$$
$$+MlV\omega\sin\theta\sin\psi + C\Omega\omega\cos\theta\sin\psi +$$
$$+2m_2h_2\frac{dh_2}{dt}(\psi' + \omega\sin\theta) = 0.$$

При этом отбрасывая новые слагаемые, и возвращаясь к предыдущим дифференциальным уравнениям, получаем ошибку не более 8 % (исключение – случай малых углов отклонения ψ и малой угловой скорости θ').

Заканчивая рассмотрение вопроса о дифференциальных уравнениях движения вагона по кривой, лежащей в горизонтальной плоскости, И.В. Мещерский замечает, что в тех случаях, когда участок пути имеет форму периодической кривой (например, синусоиды), ω, $\frac{d\omega}{dt}$ будут периодическими функциями времени. В подобных случаях автор обращает внимание на появление резонанса в результате пренебрежения малыми величинами в интегралах.

Работа Мещерского по гироскопической стабилизации была необходима при создании однорельсовой железной дороги, но ее практически забыли вместе с проектом, для которого создавалась. Однако современный мир быстро меняется, появляются новинки во всех сферах, в том числе транспортной. А исследования, проведенные в первой половине XX века, могут оказать помощь современным изобретателям, и не теряют актуальности и по сей день.

Список литературы

1. *Проект однорельсовой жироскопической железной дороги Петроград–Гатчина системы П.П. Шиловского: ВСНХ*. Комиссия по сооружению однорельсовой жироскопической ж. д. Петроград.: Гос. изд-во, 1922. 265 с. С. 133–162.

2. *History of Technology. Edited by Ian Inkster. Bloomstery Academic*. 2001. Vol. 23. Pp. 158–160.

3. Ваннах М. «Физик»: скрытный и смертоносный // *Популярная механика*. 2017. № 7. С. 82.

4. Wagner J., Trierenberg A. The Origin of the Gyroscope. The Machine of Bohnenberger // *Bulletin of the Scientific Instrument Society*. 2010. Vol. 107. № 10. 2010. 12.01. Pp. 1–5.

5. Kerry Stiff. The Scherl Gyroscopic Locomotive // *Railway Age Gazette*. 1910. Vol. 48. № 3, 21 January 1910. P. 1.

References

1. *Proyekt odnorel'sovoj zhiroskopicheskoj zheleznoj dorogi Petrograd–Gatchina sistemy P.P. Shilovskogo: VSNH*. Komissiya po sooruzheniyu odnorel'sovoj zhiroskopicheskoj zh. d. [The project of the single-rail gyroscopic railway Petrograd–Gatchina system P.P. Shilovsky: Supreme Soviet of the National Economy. Commission for the construction of single-rail gyroscopic railway]. Petrograd.: State. Publishing House, 1922. 265 p. Pp. 133–162.

2. *History of Technology. Edited by Ian Inkster. Bloomstery Academic*. 2001. Vol. 23. Pp. 158–160.

3. Vannah M. «Fizik»: skrytnyj i smertonosnyj [«Physicist»: secretive and deadly]. *Populyarnaya mekhanika* [Popular mechanics]. 2017. № 7. P. 82.

4. Wagner J., Trierenberg A. The Origin of the Gyroscope. The Machine of Bohnenberger. *Bulletin of the Scientific Instrument Society*. 2010. Vol. 107. № 10. 2010. 12.01. Pp. 1–5.

5. Kerry Stiff. The Scherl Gyroscopic Locomotive. *Railway Age Gazette*. 1910. Vol. 48. № 3, 21 January 1910. P. 1.

Информация об авторах

Юлина Анна Олеговна, старший преподаватель 114 кафедры
Бородин Дмитрий Владимирович, курсант
Военно-Космическая академия им.А.Ф. Можайского
197082, г. С-Петербург, Российская Федерация, ул. Ждановская, д. 13

Information about authors

Yulina Anna Olegovna, Lecturer at the Department of 114
Borodin Dmitriy Vladimirovich, Student
A.F. Mozhaisky Military-Space Academy
197082, St. Petersburg, Russian Federation, st. Zhdanovskaya, 13