ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 51(091)

ЗНАНИЯ О КРУГЕ В ДРЕВНЕЙ ИНДИИ

Шрикришна Г. Дани

Индийский технологический институт Бомбей
Индия, 400076, Повай, Мумбаи;
e-mail: sdani@math.iitb.ac.in

Перевод и примечания Г. И. Синкевич

В статье обсуждается понимание геометрии круга в древней Индии с точки зрения различных принципов описания, построения, применения и проч. на различных этапах истории и в различных культурных контекстах.

Ключевые слова: знания о круге, шульба-сутра Баудхаяны, джайнская математика, астрономия сиддхант, керальская математическая школа.

От переводчика: Профессор Дани любезно согласился написать эту статью специально для журнала «Математика в высшем образовании». Он выбрал темой историю классической задачи о построении круга, равновеликого квадрату, и показал, как она решалась в Индии в различные периоды её истории в различных культурных традициях. Читатель может найти дополнительные сведения в следующих русских изданиях: *Володарский А. И.* Очерки истории средневековой индийской математики. — М.: Наука, 1977. 182 с.; *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. — М.: ГИФМЛ, 1961. 448 с.; *Матвиевская Г. П.* Очерки истории тригонометрии. Ташкент: ФАН, 1990. 160 с. Переводчик выражает свою признательность главному научному сотруднику Музея антропологии и этнографии им. Петра Великого (Кунсткамера) РАН, доктору филологических наук Я. В. Василькову за ценные замечания и проверку индийских имён и цитат.

После треугольников и прямоугольников круг стал следующей простейшей геометрической фигурой, вошедшей в человеческую жизнь ещё на примитивной стадии развития общества, особенно после появления колеса. Помимо обыденного применения, круг играл большую роль в ритуале и духовных отношениях. В древние времена было достигнуто значительное понимание его различных геометрических свойств. Прогресс знаний о круге сопутствовал прогрессу всей человеческой цивилизации. Наши знания об истории древних культур весьма ограничены как относительно сохранившихся источников, так и их понимания. Тем не менее, в индийском контексте мы располагаем информацией из таких источников, как шульба-сутры[1], сочинения джайнов[2], работы по математической астрономии, традиция которой ведётся от Арьябхаты[3],

[1] Сутра — текст, составленный из максимально лаконичных фраз, заучивавшийся наизусть. Сутры содержали изложение ведийских вспомогательных дисциплин, прежде всего — ритуала. Шульба-сутры (букв.: «сутры измерительного шнура») относятся приблизительно к VIII–III вв. до н. э. и представляют собой практические руководства по изготовлению алтарей, решавшие задачи построения геометрических фигур и преобразования их в равновеликие фигуры, а также вычислительные задачи. — *Примечание переводчика.*

[2] Джайнизм — одна из национальных религий Индии, в текстах которой встречаются математические и астрономические сведения. — *Примечание переводчика.*

[3] Индийский астроном и математик (476–550 н. э.). Не путать с Арьябхатой Вторым (ок. 920 – ок. 1000), индийским математиком и астрономом, автором трактата «Махасиддханта». — *Примечание переводчика.*

и, наконец, трактаты керальской математической школы[4]. Они относятся к различным историческим периодам, и это открывает широкую перспективу плодотворного развития идей.

Период шульба-сутр

Шульба-сутры представляют собой каноны конструкций алтарей (vedi) и огневых платформ (citi) для ведийских ритуалов[5]. Помимо того, что каноны содержали подробные инструкции по укладке брусков (т. е. простых прямолинейных форм — квадратов, треугольников и проч.), чтобы достичь тщательного приближения к таким фигурам, как сокол, черепаха, колесо, они также включали формулировки различных геометрических принципов и геометрических построений практической или теоретической значимости, что даёт нам представление о математических знаниях того времени. Среди многочисленных шульба-сутр особенно выделим имеющие математическое значение Баудхаяна[6] -(Baudhāyana śulvasūtra), Апастамба[7] -, Манава[8]- и Катьяяна[9]- шульба-сутры. Временные рамки написания шульба-сутр весьма неопределённы, так как внутри этих текстов нет никаких, кроме языка и стиля, ключей для их датировки, но учёные пришли к общему мнению, что эти сутры относятся к периоду приблизительно между 800 и 200 гг. до н. э. «Баудхаяна» — самая старая, а «Катьяяна» — последняя. Подробности можно найти в [18], [12], [1] и в указанных там источниках, здесь мы сосредоточимся на рассматриваемой конкретной теме, связанной с кругом.

Первое, что сразу приходит в голову — это проблема отношения длины окружности к диаметру. Как и в других древних культурах, в древней Индии это отношение принимали равным трём. В контексте ведийской традиции это отразилось косвенным образом в утверждении «Лунки для жертвенных шестов имеют 1 паду в диаметре, 3 пады в окружности» (Baudhāyana śulvasūtra 4.15, см. [18]); «пада», что буквально означает ногу, была мерой длины, примерно равной 28 см. Вторая часть фразы, видимо, уточняет первую часть, и убеждает нас, что длина окружности считалась в три раза большей диаметра.

Выбор значения 3 для этого отношения сейчас может показаться удивительным; повседневный опыт должен был бы убедить, что оно чуть больше.

[4] Научная школа в Индии в XIV–XVII веках. — *Примечание переводчика.*

[5] Жертвоприношения (yajña), огненные ритуалы, совершаемые ради материальных и/или духовных благ, являются одной из основных особенностей ведийской культуры. В них участвовали как цари, так и миряне из жреческой касты того времени. По поводу специфики жертвоприношений, различавшихся в зависимости от целей, и процедур, которым необходимо следовать, были подробные предписания.

[6] Баудхаяна (Baudhāyana) — автор группы ведических дхармических сутр, включавших математические тексты, работавший приблизительно в VIII–VII вв. до н. э. —*Примечание переводчика.*

[7] Āpastamba Dharmasūtra — текст на санскрите приблизительно первого тысячелетия до н. э. Назван по имени Апастамба, автора-составителя либо переписчика. — *Примечание переводчика.*

[8] Mānava (ок. 750–690 гг. до н. э.) — автор геометрических текстов шульба-сутр. — *Примечание переводчика.*

[9] Kātyāyana (прибл. III в. до н. э.) — грамматик, математик и ведический жрец. — *Примечание переводчика.*

Мне представляется правдоподобным следующее объяснение (которое, кажется, не отражено в литературе): отношение 3 восходит к тому времени, когда человечество ещё не мыслило понятия дроби (кроме, возможно, «половины», что могло означать существенную часть целого, а не точное значение в нашем понимании), и преобразовалось в верование (возможно, в связи с религией). Отношению было присвоено значение 3 в том смысле, что это, допустим, не 2 или 4, или даже не «три с половиной». Давно укоренившееся мнение долго не пересматривалось, даже после того, как появилось понятие дроби. В то время как нашему знакомству с кругом, особенно с его обиходным воплощением — колесом — более 5000 лет, дроби, видимо, основательным образом появились в индийской, а также в египетской культуре, существенно позже, возможно, лишь в первом тысячелетии до нашей эры. Если для определения исторически раннего понятия используют более позднюю систему категорий, это модернизированное представление неизбежно вступит в противоречие с историческим контекстом.

«Манава шульба-сутра», однако, ломает шаблоны, и мы сталкиваемся со следующим:

viṣkambhaḥpañcabhāgaśca viṣkambhastriguṇaśca yaḥ |
sa maṇḍalaparikṣepo na vālam atiricyate ||

(Mānava Śulvasūtra 10.3.2.13)

Трёхкратный диаметр и его пятая часть будет длина окружности,
даже толщины волоска не останется.

Несомненно, с годами было признано, что отношение действительно немного больше трёх. В «Манава шульба-сутре» эта разница уже, по-видимому, осознана и дана более точная оценка. Явное улучшение!

В отличие от длины окружности, площадь круга интересовала авторов сутр (sūtrakāra) самым непосредственным образом. В шульба-сутрах нет прямого указания об их осведомлённости о том, что отношение длины окружности к диаметру такое же, как отношение площади круга к квадрату радиуса; видимо, не было повода к тому, чтобы сравнить эти два отношения. Вопрос о площади при строительстве алтарей рассматривался отдельно. Огневые платформы могли быть построены в форме колеса повозки, круглого корыта и т. п. Площадь такой платформы определялась в зависимости от особенностей ритуала и должна была быть одинаковой у всех платформ независимо от их формы. Это побуждало думать, как преобразовать квадрат в круг такой же площади.

Преобразование квадрата в круг

Баудхаяна описывает процедуру построения круга такой же площади, как данный квадрат, в нашем пересказе состоящую в следующем: нарисовать круг, радиус которого равен половине стороны квадрата, увеличенной на одну треть разности половины диагонали и половины стороны квадрата, т. е. $QR = \dfrac{1}{3}QS$, а именно, радиуса PR (см. рис. 1[10]).

[10] Рисунки 1 и 2 были первоначально опубликованы в работе автора [1] и перепечатываются с любезного разрешения издателя.

Для квадрата со стороной a мы легко получаем, что радиус построенного круга равен $\dfrac{(2+\sqrt{2})\,a}{6}$, его площадь в случае $a = 1$ равна $1,01725$, а вычисление величины π, исходящее из описанного построения, даёт 3,0883… вместо 3,14159… Следует иметь в виду, что это была процедура построения круга, а не нахождения числового значения π; последнее не выделилось как понятие и как отношение не вычислялось. Сравнение здесь и в аналогичных контекстах ниже проводится лишь для облегчения общего представления о различных приближениях числа π.

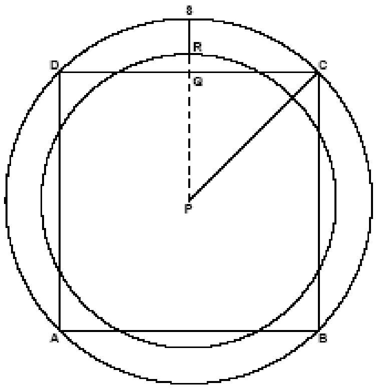

Рис. 1. Построение в «Баудхаяна шульба-сутре»

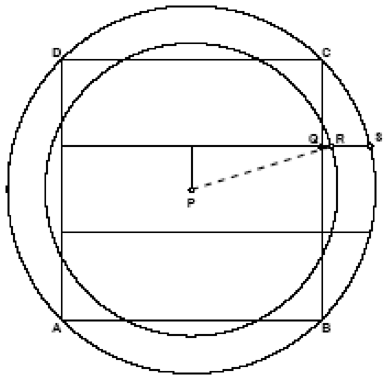

Рис. 2. Построение в «Манава шульба-сутре

«Апастамба шульба-сутра» даёт то же построение круга, что и «Баудхаяна». «Манава», видимо, предусматривает другое построение для круга с площадью данного квадрата. Автору принадлежит следующая интерпретация строфы «Манава шульба-сутры», изложенная в [1]. Для удобства я буду обсуждать строфу и окружающий контекст после того, как сначала опишу процедуру в соответствии с интерпретацией. Последовательность действий иллюстрирует рис. 2. Нарисуйте отрезки, разделяющие квадрат на три горизонтальные полосы. Продолжите эти линии до пересечения с описанной окружностью. На отрезке QS поставьте точку R на расстоянии $\dfrac{1}{5}$ длины этого отрезка от точки Q. Круг радиуса PR, где P — центр квадрата, и объявляется искомым, т. е. с площадью, равной площади исходного квадрата.

Для квадрата со стороной 1 получим $QS = \dfrac{\sqrt{17}-3}{6}$, так что для радиуса r круга имеем $r^2 = \left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\sqrt{17}-3}{6} - \dfrac{1}{2}\right)\right\}^2 + \dfrac{1}{36}$. Площадь такого круга составит 0,9946…, это более точное приближение по сравнению с предыдущим, погрешность составляет всего $\dfrac{1}{2}$%, сейчас с избытком. Значение π в этом случае равно 3,1583…

Строфа из «Манава шульба-сутры», о которой идёт речь, такова:

caturaśraṃ navadhā kuryāddhanuḥkoṭyastridhātridhā |
utsedhātpañcamaṃ lumpetpurīṣeṇeha tāvatsamaṃ ||

(Mānava śulvasūtra 11.15)

В литературе имеются большие разночтения этой строфы. В работе [18] предполагается, что, возможно, «квадраты нарисованы без всякого математического смысла». В [12] приводится толкование, вывод из которого явно неверен. Есть ещё одна интерпретация в [7], приводящая к заключению, что, согласно сутре, величина π должна быть $\dfrac{25}{8}$, но интерпретация первой строки этой строфы не играет никакой роли, в то время как вторая строка выражает смысл вполне конкретно. Ключом проблемы является адекватный перевод.

Я предлагаю следующий перевод; первое предложение по существу такое же, как в [18].

Раздели квадрат на девять частей, разделив каждую сторону на три равные части. Отметь пятую часть выступающей части (квадрата) и покрой (соответствующий круг с центром в начале) рыхлой землёй.

Согласно моей интерпретации, смысл этого объяснит рисунок 2[11]. Здесь неуместно вдаваться в лингвистические тонкости. В пользу нашего толкования приведём две причины. Во-первых, это приводит к значительному улучшению результата, что не могло быть простым совпадением. Во-вторых, если попробовать догадаться, как современники Манавы пытались исправить отклонение результата, то построение возникает как естественное развитие: после построения Баудхаяны долгое время круг рисовали чуть больше ожидаемого. Поскольку оказалось, что деление квадрата пополам не даёт желаемого, решили делить квадрат на три части. Прежние переводы были неточными. Ключом здесь является выбор точки на линии, делящей квадрат на три части, что естественно, но не было замечено предыдущими авторами. Кроме того, по аналогии с предыдущим построением, точка должна выбираться на внешнем продолжении отрезка, который отсекает треть квадрата. В более раннем построении для получения радиуса искомого круга такой отрезок увеличивался на одну треть выступающей наружу части, и заметим, что хотя описанный круг в этом стихе не упоминается, он незримо присутствует в их построении. Добавление $\dfrac{1}{5}$, вероятно, основано на специальном наблюдении, что без этого радиус получался несколько меньше, чем в построении Баудхаяны.

Очевидно, что построение Манавы является плодом настойчивых попыток улучшить исходное построение Баудхаяны путём уточнения общей схемы. Остаётся неясным, как продумывались конкретные детали, как и до какой степени их старались уточнить.

Заметим, что существуют и другие построения, принятые в более широком ведийском сообществе; хотя ведийская культура содержала некоторый общий свод знаний, в различных шульба-сутрах появилось множество вариаций в возникших позже общинах. Менее известная шульба-сутра под названием «Майтраяния шульба-сутра» (*Maitrāyaṇīya*), которая сродни «Манава

[11] Добавим, что условие деления на 9 частей, возможно, означает, что указанные точки должны быть нарисованы на всех 8 выступающих отрезках и искомый круг нужно проводить через них. Это облегчит рисование от руки.

шульба-сутре» (она принадлежит к той же самхите[12]), предлагает построение с помощью поворота квадрата: взять радиус искомого круга как 9/16 стороны квадрата, см. [9]. Для единичного квадрата полученный круг оказывается 0,9940..., что сравнимо с вышеприведённым результатом и соответствует величине π, равной 3,1604... Здесь следует напомнить, что египтяне полагали площадь круга радиуса r равной $\left(\frac{16r}{9}\right)^2$.

Квадратура круга

Обратная задача о «квадратуре круга», то есть о нахождении квадрата той же площади, что и данный круг[13], также рассматривается в шульба-сутрах. «Баудхаяна» даёт следующее выражение для отношения стороны квадрата к диаметру круга (в источнике дано словесное описание):

$$\frac{7}{8}+\frac{1}{8\times 29}-\frac{1}{8\times 29\times 6}+\frac{1}{8\times 29\times 6\times 8}\,. \tag{1}$$

Это соответствует значению отношения 3,0883..., т. е. чуть более 98,3% истинной величины. Заметим, что погрешность составляет 1,7% с недостатком. Заметим, что погрешность составляет 1,7%, причём с недостатком. Последнее не случайно, а, видимо, связано с тем, что решение обратной задачи выполнялось как обратная последовательность этапов решения прямой задачи (см. [19, 17]). Из-за отсутствия геометрической процедуры для решения обратной задачи, т. е. нахождения квадрата, равновеликого кругу, они получали значение стороны квадрата из формулы выражения радиуса [через сторону квадрата], приведённой в предыдущем разделе. До сих пор не выяснены детали этой процедуры.

Чтобы выразить сторону квадрата через радиус, т. е. получить обращение дроби $\frac{(2+\sqrt{2})}{3}$, необходимо понимание приближения $\sqrt{2}$ рациональным числом — имевшегося у древних индусов представления о $\sqrt{2}$ как об определённом отрезке было недостаточно.

Квадратный корень из двух

Три из четырёх шульба-сутр, «Баудхаяна», «Апастамба» и «Катьяяна», дают следующее выражение $\sqrt{2}$ (словами):

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{3\times 4\times 34}\,. \tag{2}$$

[12] Каждая сутра относилась к определенной ритуалистической школе, а каждая школа по своей специализации тяготела к определённой веде как к интеллектуальному направлению, которое было основано на «собраниях» или «сводах» (saṁhita) гимнов. В то же время весь корпус почитался и изучался сообществом в целом. — *Примечание переводчика.*

[13] Не следует путать эту проблему с греческой проблемой нахождения такой же площади с помощью построения циркулем и линейкой. Контекст сутракаров (авторов сутр) был совсем другой, их целью было только найти квадрат, равновеликий кругу, в пределах возможного уровня точности. Возможно, у них не было повода заниматься циркулятурами. Их задача заключалась в нахождении квадрата какими-нибудь доступными средствами.

В десятичном выражении это величина 1,4142157… Это удивительно близко к фактическому значению 1,4142136…, и этот факт был предметом многих восхищённых комментариев в литературе. Кстати, можно напомнить, что около тысячи лет ранее вавилоняне также имели величину, описывающую $\sqrt{2}$ в шестидесятиричной системе, в десятичном выражении равную 1,4142129… (см., например, [4]). Различные представления этого числа и существенные различия в значениях, как с избытком, так и с недостатком, исключают их общее происхождение. Были содержательные предположения и дискуссии о том, как в шульба-сутре было получено значение $\sqrt{2}$; однако мы не будем здесь отвлекаться на эти детали (см., например, [1] и другие указанные там источники).

Стремление найти величину $\sqrt{2}$ приводит к выражению, подобному формуле (2), и видимо, происходит из задачи обращения $\dfrac{(2+\sqrt{2}\,)}{3}$ для получения формулы квадратуры круга (1). Численное значение $\sqrt{2}$ не упоминается в других местах шульба-сутр. В других контекстах, видимо, используется лишь геометрическая форма $\sqrt{2}$ как диагонали единичного квадрата, которая имела специальное название *dvikaraṇī*.

Насколько успешными были решения задач о стороне квадрата, равновеликого данному кругу, где использовалось вышеуказанное значение $\sqrt{2}$, рассмотрено у Ж. Тибо [19], а также у других более поздних авторов. Прежние объяснения, однако, без всякого основания приписывают авторам сутр ловкость в обращении с дробями. В своей недавней работе С. Кичченассами [11] предложил решение вопроса, которое более соответствует характеру шульба-сутр; в его статье также подробно обсуждается несостоятельность других аргументаций.

Было бы также целесообразно отметить ещё одно построение из шульба-сутр, относящееся к свойствам круга. В «Баудхаяна шульба-сутре» описано построение квадрата, которое включает восставление перпендикуляра к данной линии, скажем, L, из точки P на L, путём вычерчивания окружностей с центрами в равноудалённых от P точках на L радиусом, превышающим это расстояние, и соединение точек пересечения двух окружностей (точно так же, как этому сегодня учат в школах). Это построение основано на знании того, что отрезок, соединяющий точки пересечения окружностей, ортогонален отрезку, соединяющему их центры. Хотя построение делалось для окружностей одного радиуса, разумно предположить, что этот «принцип ортогональности» распространялся на любые окружности. В большинстве задач, требующих построения перпендикуляра, использовалось, однако, обратное утверждение теоремы Пифагора[14], а не вышеприведённое построение (произведённое определённым образом, оно оказывается проще, см. [1]).

[14] Теорема Пифагора была известна в Индии, по крайней мере, во времена «Баудхаяна шульба-сутры» (ок. 800 г. до н. э.), в которой имеется её чёткая формулировка. Обратное утверждение теоремы, а именно, что треугольник, квадрат стороны которого равен сумме квадратов двух других сторон, прямоугольный, широко использовалось для построения перпендикуляров (подробнее см. [1]).

Позвольте мне завершить этот раздел о шульба-сутрах следующим комментарием. В толковании шульба-сутр была тенденция приписывать авторам стремление к высокому уровню точности. Хотя значение $\sqrt{2}$ представляется тому примером, тщательное прочтение шульба-сутр показывает, что это нетипично. Во многих текстах описаны иные вспомогательные величины и приближённые построения наряду с некоторыми более точными. Это показывает, что общая практика была преимущественно ориентирована на ритуальные действия. В отличие от строгих академических исследований, здесь приближённые построения не приносят серьёзного ущерба.

Математику древних культур необходимо воспринимать и оценивать в её конкретном контексте, а не через общие абстрактные критерии. Вопрос о квадратуре круга возник, в частности, из желания получить огневые платформы одинаковой площади, что не требует высокой точности, и было бы неверно удивляться её отсутствию.

Джайнская традиция

Помимо ведической религии в течение первого тысячелетия до нашей эры (и позже в течение определённого времени) в Индии процветали джайнизм и буддизм. Давней традицией джайнов была связь с математикой, о чём свидетельствуют многочисленные дошедшие до нас сочинения. Что касается буддизма, то хотя включённые в буддийские практики конструкции, называемые мандалами, имеют сложное построение, которое кажется математически значимым, до нас не дошло их сочинений с использованием математических понятий.

Мотивация джайнов к математике, по существу, происходит не из каких-либо ритуалов, которых они действительно гнушались, но от созерцания космоса, благодаря чему они развили свою собственную сложную и уникальную концепцию. В космографии джайнов плоский мир бесконечен и состоит из концентрических колец, окружающих самую внутреннюю круговую область с диаметром 100 000 йоджан[15], известную как остров Джамбу (Jambudvīpa, что соответствовало Земле), а кольцевые области состоят попеременно из воды и суши, ширина каждого следующего кольца вдвое больше предыдущего. Геометрия круга играла важную роль в общем дискурсе, даже когда учёные, занятые в нём, были более философами, нежели математиками. К сожалению, многие исторические и хронологические детали традиции джайнизма неясны (даже более, чем традиции индуизма) и являются предметом догадок. Наиболее полное изложение свойств круга, известных в традиции джайнизма четвёртого и пятого века, можно найти в работе [14, с. 59]. Однако, как заметил Б. Датта в [2], все они находятся в *Tattvāthādhigama-sūtra-bhāṣya* («Комментарий на Таттвартхадхигама-сутру»), философском труде Умасвати[16], который, согласно традиции *шветамбаров*, жил около 150 г. н. э., а со-

[15] Йоджана (yojana) была мерой длины, порядка от 15 до 20 км, с некоторыми вариантами.

[16] Умасвати (Umāsvāti) — один из первых индийских учцных первого тысячелетия н. э., основоположник джайнской систематической философии на санскрите. — *Примечание переводчика.*

гласно традиции *дигамбаров*[17] — во втором веке нашей эры. Б. Датта в [2] предполагает, что Умасвати, вероятно, не был первооткрывателем формул, они были известны за много веков до него, и обсуждает некоторые обоснования этого утверждения. Т. А. Сарасвати Амма [15, с. 63] приписывает основные формулы «Сурьяпраджняпти» (Sūryaprajñāpti), сочинению, которое, как полагают, относится к пятому веку до н. э.

В традиции джайнизма отказ от того, что число 3 является отношением длины окружности к диаметру, проявлен достаточно ярко; в «Сурьяпраджняпти» сначала написано традиционное значение 3, а затем автор отказывается от него в пользу $\sqrt{10}$. Джайны также знали, что отношение площади круга к квадрату радиуса даёт то же число, что и отношение длины окружности к диаметру. Фактически они имели формулу площади круга как произведения четверти длины окружности на диаметр, откуда непосредственно следуют два названных отношения. Между прочим, $\sqrt{10}$, который составляет около 3,16227..., является лучшим приближением π, чем в построении Баудхаяны, обеспечивая погрешность всего лишь около $\frac{2}{3}\,\%$.

Это значение было очень удобно для теологов-математиков джайнизма в их вычислениях. Например, в «Джамбудвипапраджняпти» величина окружности Джамбудвипы (Земли) диаметром 100 000 йоджан вычисляется при помощи величины $\sqrt{10}$ как отношения длины окружности к диаметру, путём извлечения квадратного корня из 10^{11}.

Это значение π использовалось более тысячелетия, даже после того, как стали известны лучшие приближения; действительно, его использование в джайнских текстах настолько обыденно, что его часто называют величиной джайна для π. Это значение было также принято в «Панчасиддхантика»[18] и в целом в традиции сиддхант (астрономических книг), процветавшей в период с первого по шестой век нашей эры.

Имеется несколько предположений по поводу того, как $\sqrt{10}$ стал значением для π. Одно объяснение, приписываемое Гунрату (Hunrath), излагается следующим образом: ([15, с. 65]): квадрат стороны правильного 12-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса, очевидно, равен $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ и при выборе $\frac{5}{3}$ как приближения для $\sqrt{3}$ даёт $\frac{\sqrt{10}}{12}$; таким образом, периметр правильного 12-угольника составляет около $\sqrt{10}$ его основной диагонали, но немного меньше. Возможно, это способствовало возникновению формулы длины окружности. Однако объяснение включает в себя много недостаточно обоснованных предположений. Заинтересованный читатель может также найти различные другие объяснения в [6].

[17] Svetāmbara и Digambara (шветамбары и дигамбары) — две древние ветви джайнизма, с некоторыми различиями относительно философской терминологии, а также относительно повседневного обихода.

[18] «Панчасиддхантика» (Pañcasiddhāntika) — «Трактат, включающий пять сиддхант», астрономическое сочинение Варахамихиры (Varāhamihira, 505–587). — *Примечание переводчика.*

Вирасена (Vīrasena), джайнский математик восьмого века, утверждал:

vyāsam ṣoḍaśaguṇitaṃ ṣoḍaśa sahitaṃ trirūparūpairbhaktaṃ |
vyāsam triguṇitaṃ sūkṣmādapi tadbhavet sūkṣmaṃ |
(Ṣaṭkhaṇḍāgama, vol. IV, p. 42)

Шестнадцатикратный диаметр вместе с 16 раздели на 113 и трёхкратный диаметр будет очень хорошей величиной (длины окружности).

В этой формуле «вместе с 16» выглядит странно — безусловно, автору было известно, что длина окружности пропорциональна диаметру, и что добавление 16, независимое от величины диаметра, не будет с этим согласовываться. Если пренебречь этой частью[19], мы получим величину π, составляющую $3+\dfrac{16}{113}=\dfrac{355}{113}$, что представляет неплохое приближение, которое автор оценивает как «sūkshmadapi sūkshamam» (лучшее из лучших!). В Китае приближение для π было дано Цзу Чунчжи (Chong-Zhi, 429–500). Его значение 3,1415929… вместо 3,1415926… даёт 6 верных десятичных знаков.

В «Трилокасаре» (*Trilokasāra*), другом трактате джайнской школы, составленном Немичандрой[20], который жил около 980 г. н. э., можно найти иное значение числа π, нежели $\sqrt{10}$: это значение $\left(\dfrac{16}{9}\right)^2$, которое мы уже видели в «Майтраяния шульба-сутре», (общее с египетским). Это может свидетельствовать в пользу связи с индуистской традицией, но разрыв во времени весьма интригующий.

Помимо круга в целом, джайнские математики также интересовались связью между круговыми дугами и соответствующими им хордами. Это связано с их представлением о географии Джамбудвипы, включая различные области, горы и т. д. Умасвати отмечает различные связи между длиной хорды c, высотой h соответствующей стрелы (т. е. отрезка, соединяющего середину хорды с серединой дуги) и диаметром d круга. Одно из отношений выражено как $c=\sqrt{4h(d-h)}$. Также представлены различные другие формулы, с современной точки зрения алгебраически эквивалентные этой. Заинтересованный читатель может обратиться к [17, 2], а также [8] за дальнейшим обсуждением этого вопроса, в двух последних источниках приведены также некоторые подробности по поводу аналогичных формул в других древних культурах.

Есть ещё интересная формула для длины a минорной дуги (меньшей из двух дуг, отсекаемых хордой): $a=\sqrt{6h^2+c^2}$ (в тех же обозначениях, что и выше). Это приближённое соотношение. Можно заметить, что в частном случае, когда хорда является диаметром, а дуга является полукругом, равенство

[19] Не много нужно, чтобы в чём-то исказить окончательный смысл при переводе; здесь важны и смысл и грамматика. Можно, например, истолковать слова ṣoḍaśa sahitaṃ «с шестнадцатью» буквально, подчеркнув, что делить на 113 нужно всю ту сумму, в которую уже добавлено 16, т. е. «вместе с 16», что даст неверный результат, который вряд ли имел в виду автор.

[20] Немичандра (ок. 10 в.), по прозвищу «Сиддхантачакравартин» («Император философии») — индийский учёный, известный духовный наставник джайнской традиции. — *Примечание переводчика.*

соответствует длине полукруга с радиусом $\sqrt{10}$, так что отношение этих величин даёт значение π. Как только мы переходим к малым дугам, отношение отклоняется от π. Удивительно, однако, то, что формула всё время продолжает быть частью джайнской литературы, в том числе в знаменитой математической работе «Ганитасарасанграха» (*Gaṇita sāra saṅgraha*) Махавиры[21] в 850 г. (Глава VII, стих $73\frac{1}{2}$, см. [14, с. 469]). Формула также появляется в «Трилокасаре» Немичандры (см. [3]).

Зная хорду, можно помимо длины фрагмента дуги искать площадь отсекаемого сегмента (со стороны меньшей дуги). «Ганитасарасанграха» даёт значение площади $\frac{1}{4}\sqrt{10\,ch}$, где c — длина хорды, а h — высота над хордой (длина стрелы). Эта же формула находится в «Трилокасаре». Эта формула справедлива только для полукруглого сегмента с π вместо $\sqrt{10}$, но даёт отклонение от фактического значения при малых дугах.

Иная формула площади сегмента, отсекаемого хордой, дана в «Тиршатике» (*Triśatika*) Шридхары (около 750 г.)[22], она же цитируется в более поздних работах, в том числе у Бхаскары (Bhāskara, о нём подробнее ниже). Возможно, стоит упомянуть, что Шридхара не вполне вписывается в традиции астрономов-математиков — его известные работы относятся исключительно к математике, и он хорошо известен своей процедурой решения квадратного уравнения. Согласно Шридхаре, площадь A сегмента между хордой и соответствующей дугой выражается как

$$A = \frac{\sqrt{10}}{3}\left(\frac{h\,(c+h)}{2}\right).$$

Очевидно, что здесь $\sqrt{10}$ предназначен заменить π.

Казалось бы, многие формулы для дуговых сегментов, отсекаемых хордами, были написаны путём упрощённой экстраполяции отношения полукруга к его части и имели некоторые (эвристические) основания, но никаких записей не найдено. С исторической точки зрения это подчёркивает трудности, стоявшие перед древними математиками в освоении длин дуг и площадей ограниченных ими областей, и их стремление обойти эти трудности до возникновения тригонометрии, а затем дифференциального и интегрального исчисления.

Арьабхата и астрономическая традиция

Арьабхата (Āryabhaṭa), родившийся в 476 году нашей эры (о чём он сам говорит[23] в своей работе «Арьябхатия» (*Āryabhaṭīya*)), был пионером в том,

[21] Махавира — здесь: джайнский математик 9 века. Не путать с основателем джайнизма Джиной Махавирой, 6 в. до н. э. — *Примечание переводчика.*

[22] Хотя до некоторого времени не было аргументов по поводу его происхождения и времени жизни, сейчас достигнуто общее мнение, что Шридхара жил в 8 веке н. э. и был джайном, по крайней мере, во время своего сочинительства — с этим согласуется его математическая работа.

[23] «Когда шестьдесят раз по шестьдесят лет текущей юги истекло [499 г. н. э.], минуло двадцать три года с моего рождения». — *Примечание переводчика.*

что называется традицией сиддханты (siddhānta) астрономов-математиков Индии, которая процветала почти восемь столетий, до Бхаскары (Бхаскарачарьи, *Bhāskarāchārya*) в 12 веке, и даже позже, что, в свою очередь, привело к возникновению математической школы Керала[24]. Несмотря на явные связи с более древней эллинистической математической астрономией, традиция преодолела влияние раннего периода и наметила собственный курс. Были разработаны новые математические идеи, отвечавшие теоретическим требованиям изучения астрономии, а также в стремлении к чистой математической мысли. В частности, развивалось более глубокое понимание круга как с точки зрения геометрии, так и тригонометрии. В работе «Арьябхатия» мы находим следующее:

Caturadhikam śatamaṣtaguṇam dvāṣaśtistathā sahasrāṇam |
ayutadvayaviṣkambhasyāsanno vṛttapariṇahah ||
(Gaṇitapāda 10, in Āryabhaṭīya)

Длина окружности круга с диаметром двадцать тысяч есть приблизительно сто и четыре по восемь раз, и шестьдесят две тысячи (т. е. 62 834).

Это соответствует величине π приблизительно 3,1416, что в самом деле совпадает с правильным округлением до четырёх знаков после запятой. Нужно напомнить, что в греческой астрономии Птолемей имел значение в шестидесятиричной системе, соответствующее 3,14166... Прямой информации, указывающей на то, как Арьябхата получил это значение, нет. Можно ожидать, что, как и в аналогичных случаях в других культурах, значение было получено путем многократного применения формулы

$$S_{2n} = \sqrt{\frac{S_n^2}{4} + \left(1 - \sqrt{\frac{4r^2 - S_n^2}{4}}\right)^2},$$

где S_n — сторона правильного n-угольника в круге единичного радиуса. Формула следует из теоремы Пифагора, которая, как уже отмечалось, была известна в Индии со времён «Баудхаяна шульба-сутры». Согласно Ганеше (Ganeśa), который комментировал «Арьябхатию» в шестнадцатом веке, для аппроксимации круга строился вписанный многоугольник с 384 сторонами, и использовалась вышеприведённая формула: начиная с шестиугольника (сторона которого совпадает с радиусом окружности), и достигая многоугольника с количеством сторон $384 = 6 \times 2^6$. Выбор 20000 в качестве диаметра легко объясняется облегчением вычисления квадратных корней в целых числах, величины могли округляться с избытком или с недостатком, чтобы получать целые значения на различных этапах применения формулы, как описано выше, а квадратный корень вычислялся с помощью хорошо известной предназначенной для этого процедуры, приписываемой Арьабхате. Можно заметить, что значение π, как и выше, несколько больше фактического, несмотря на

[24] Kerala — штат в Индии. Керальская научная школа астрономии и математики существовала в XIV–XVII веках. — *Примечание переводчика.*

его представление через периметр вписанного правильного многоугольника — это из-за округления на некоторых этапах.

В «Арьабхатии» имеются также тригонометрические функции синус и косинус[25]. «Арьабхатия» содержит в стихотворной форме таблицу синусов для углов до 90°, кратных $3^\circ 45'$ (24-я часть прямого угла[26]): для облегчения расчёта длин хорд радиус R выбирали как радиус окружности, длина которой 21 600 (мера всей окружности в минутах). Использование в качестве значения радиуса большого целого числа позволяло избежать вычисления корней из дробных чисел. Для последовательных величин угла α составлялась таблица значений $R\sin\alpha$. Аналогичная таблица приведена в «Панчасиддхантике», более древнем сочинении первых веков нашей эры, в которой значение R принималось равным 120. Этот выбор имел другие преимущества: расчёт начинали с половины радиуса, т. е. с числа, которое является основанием 60-ричной системы. Подробности этого способа малоизвестны.

Располагая такими таблицами, можно рассчитать длины дуг окружностей с использованием таблицы синусов не обращаясь к специальной формуле, как в математике джайнов. Также в «Арьабхатии» применялись интерполяционные методы для действий с некоторыми вспомогательными углами. Помимо таблицы синусов там содержится также любопытная приближённая формула для функции синуса, часто используемая в традиции сиддханты. Как правило, её относят к Бхаскаре Первому (7-й век н. э.), так как она является частью его «Махабхаскария», (*Mahābhāskarīya*), но независимо от этого она обнаружена в работе Брахмагупты «Брахмаспута сиддханта» (*Brāhmaspuṭa siddhānta*), относящейся к тому же времени. В современных обозначениях формулу можно представить так:

$$\sin\theta = \frac{4\cdot(180-\theta)}{40\,500-\theta(180-\theta)}\,,$$

где θ — угол, измеряемый в градусах. Формула выглядит удивительно точной, допуская погрешность менее 1%, за исключением очень малых углов. Неясно, как она могла быть получена (см. подробнее [5, 20]).

Знание различных свойств круга и тригонометрии постепенно становилось важной частью обучения в традиции сиддханты, как необходимое условие для занятий математической астрономией. Традиция поддерживалась, хотя, возможно, в некоторые периоды слабее, чем в другие, и отдельные представители сделали собственные открытия, наряду с совершенствованием корпуса математических знаний в целом. Здесь мы не будем углубляться в исторические подробности относительно этого. Бхаскара Второй, 12 век (также известный как *Bhāskarācārya*, Бхаскара-учитель), считается последним крупным представителем этой традиции. Помимо освоения традиционных

[25] В то время как греки создавали геометрию хорд, именно в Индии возникла тригонометрия полухорд.

[26] Синус такой дуги по величине равняется радиусу. Поэтому радиус и тригонометрические линии в круге, в т. ч. линия синуса, выражали в частях окружности, сравнивая по величине дугу и прямолинейный отрезок (Матвиевская Г. П. Очерки истории тригонометрии. — Ташкент, 1990. с. 42). — *Примечание переводчика.*

знаний, Бхаскара внёс собственный вклад. В его время в обществе широкое распространение и приложения получили вспомогательные для математической астрономии виды математики, особенно арифметика и геометрия. Бхаскара написал обширный труд, «Сиддханташиромани» (*Siddhānta Śiromaṇī*), содержавший, в традиции сиддханты, главу, посвящённую названным выше математическим темам, под названием «Лилавати» (*Līlavatī*). Эта глава, однако, приобрела свою собственную жизнь и репутацию математической работы, получив широкое распространение. На протяжении нескольких веков она служила учебником математики почти для всей Индии. В частности, относительно круга я только упомяну следующую (приближённую) формулу из Лилавати для длины дуги окружности; сама формула, видимо, связана с формулой Бхаскары для функции синуса, в радианах:

$$a = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{5\,p^2 c}{4(c+4d)}} = \frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{5c}{c+4d}}\right),$$

где p означает длину окружности (периметр) круга, а другие обозначения такие же, как выше, а именно, a — длина дуги, c — длина хорды, и d — диаметр круга; первое выражение такое же, как оно даётся в первоначальном стихе, а второе является его упрощением. Видно, что в связи с развитием геометрии окружности и тригонометрии развивалось и более общее знание.

Керальская школа

В контексте нашей темы мы закончим эту статью несколькими замечаниями о математической школе Кералы. Она ведёт своё начало со второй половины 14 века от работы Мадхавы (Mādhava), и непрерывной преемственностью от учителя к ученику на протяжении приблизительно 250 лет достигла процветания. В рамках этой школы были получены замечательные результаты в инфинитезимальных методах, и, в частности, получены ряд Грегори – Лейбница для арктангенса и ряд Ньютона для синуса (за два века до того, как их открыли в Европе). Мы не будем вдаваться в подробное обсуждение вопроса о математике керальской школы, последние годы этот вопрос глубоко изучался. Заинтересованный читатель может обратиться к [10, 14] и [16]. По-видимому, предметом увлечения этой школы было вычисление точного значения числа π, что относится к нашей теме. В частности, Шанкараварияр (Śankara Vāriar,1556) в трактате «Криякрамакари» (Kriyākramakarī, см. [14]) приписывает Мадхаве следующее удивительно хорошее приближение π: мера окружности для круга диаметром 900 000 000 000 есть 2 827 433 388 233. Таким образом,

$$\pi = \frac{2827433388233}{900000000000} = 3,141592653592\ldots$$

вместо 3,141592653589…, с точностью 11 знаков после запятой, если округлить. В формуле

$$\text{Длина окружности} = 4 \text{ диаметра} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$$

ряд сходится очень медленно. Чтобы избежать этого недостатка, Мадхава ввёл остроумный приём, называемый *antya samskāra*, «окончательная поправка». Для последовательности частичных сумм S_n он ввёл последовательность a_n такую, что последовательность $S_n + a_n$ сходится быстрее. Это даёт последовательность $S_n+(-1)^{n-1}\,\dfrac{n^2-1}{4n^3+5n}$. Её пятидесятый член как раз обеспечивает 11 знаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dani S. G. Geometry in the Śulvasūtras. Studies in History of Mathematics. — Proceedings of Chennai Seminar, Ed. C. S. Seshadri, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010. P. 9–37.
2. Datta Bibhutibhushan. The Jaina School of Mathematics // Bull. Cal. Math. Soc. 21. 1929. P. 115–145.
3. Datta Bibhutibhushan. Mathematics of Nemicandra // Jaina Antiquary 1. 1935. P. 25–44.
4. Fowler D., Robson E. Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context // Historia Math. 25. 1998. P. 366–378.
5. Gupta R. C. Bhāskara I's approximation to sine // Indian J. History Sci. 2. 1967. P. 121–136.
6. Gupta R. C. Mādhavacandra's and other octagonal derivations of the Jaina value $\pi = \sqrt{10}$ // Indian J. Hist. Sci. 21. № 2. 1986. P. 131–139.
7. Gupta R. C. New Indian values of π from the Mānava śulva sūtra // Centaurus 31. № 2. 1988. P. 114–125.
8. Gupta R. C. Area of a bow-figure in India // Studies in the history of the exact sciences (Pingree Volume). Brill, Leiden, 2004. P. 517–532.
9. Gupta R. C. Śulvasūtras: earliest studies and a newly published manual // Indian J. Hist. Sci. 41. 2006. P. 317–320.
10. Joseph G. G. A Passage to Infinity: Medieval Indian Mathematics from Kerala and Its Impact. — Delhi: Sage Publications (Inda) Pvt. Ltd., 2009. 236 p.
11. Kichenassamy S. Baudhāyana's rule for the quadrature of the circle // Historia Mathematica, 33. 2006. P. 149–183.
12. Kulkarni R. P. Chār Śulvasūtra (in Hindi). — Ujjain: Maharshi Sandipani Rashtriya Vedavidya Pratishthana, 2000. LIII + 334.
13. Padmavathamma. Srī Mahāvīrācarya's Gaṇitasārasaṅgraha. — Shimoga: Sri Siddhāntakrīithi Granthamāla, Sri Hombuja Jain Math, Hombuja, 2000. 834 p.
14. Plofker K. Mathematics in India: 500 BCE – 1800 CE. — Princeton: Princeton University Press, 2008. 360 p.
15. Saraswati Amma T. A. Geometry in Ancient and Medieval India. — Delhi: Motilal Banarsidas, 1979. 280 p.
16. Ramasubramanian K., Srinivas M. D. Development of calculus in India / In: Studies in the history of Indian mathematics. Cult. Hist. Math., 5. — New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010. P. 201–286.
17. Seidenberg A. The ritual origin of geometry //Archive for History of Exact Sciences. 1. 1962. P. 488–527.
18. Sen S. N., Bag A. K. The Śulvasūtras of Baudhāyana, Āpastamba, Kātyāyana, and Mānava. Indian National Science Academy, 1983. 293 p.
19. Thibaut G. On the Śulvasūtras // The Journal Asiatic Society of Bengal, Part I. 1875. (Printed by C. B. Lewis, Baptist Mission Press, Calcutta). 134 p.

20. Van Brummelen G. The mathematics of the heavens and the earth; The early history of trigonometry. — Princeton: Princeton University Press, 2009. 352 p.

Примечание: работы Р. К. Гупты, цитируемые здесь, доступны также в сборнике Gaṇitānanda, опубликованном под редакцией К. Рамасубраманиана Индийским обществом истории математики (IndianSociety for History of Mathematics) в 2015 г.

Поступила 23.10.2016

COGNITION OF THE CIRCLE IN ANCIENT INDIA

S. G. Dani

In this article we discuss the understanding concerning geometry of the circle in ancient India, in terms of enuciation of various principles, constructions, applications etc., during various phases of history and cultural contexts.

Keywords: understanding the circle, Bāudhayana śulvasūtras, Jaina mathematics, Siddhānta astronomy, Kerala school of mathematics.