УДК 51(091)

ПЕРВЫЕ УЧЕБНЫЕ КУРСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ XIX в.

Г.И. Синкевич (Санкт-Петербург)

Аннотация. Представление о функции зародилось в алгебре и раннем анализе, но окончательное понятие сложилось в первой половине XIX в. Концепция непрерывной функции сформировалась в XIX в. Первые учебные курсы теории функций выделяются из курса дифференциального и интегрального исчисления с 1870-х гг.

Ключевые слова. История теории функций, непрерывность, Э. Гейне, К. Вейерштрасс, У. Дини.

FIRST COURSES ON THE THEORY OF FUNCTIONS IN XIX C.

G.I.Sinkevich (Saint-Petersburg)

Abstract. The idea of the function was born in algebra and early analysis, but the final concept was developed in the first half of the 19th century. The concept of continuous function and its properties were formed in the XIX century. The first training courses in the theory of functions grew out of an analysis training courses from 1870-th.

Key words. Theory of functions History, continuity, E. Heine, K. Weierstrass, W. Dini.

Первый учебный курс математического анализа «Анализ бесконечно малых для исследования кривых» был издан в 1696 г. маркизом Г.Ф. де Лопиталем и содержал изложение лекций И. Бернулли. В нём даны начала дифференциального и интегрального исчисления, введены понятия абсциссы, ординаты, координат, геометрического места точек, геометрический смысл производной, связь возрастания и убывания функции со знаком первой производной, необходимое условие экстремума. Повествовательный характер изложения не отягощался обоснованиями - доказательства тогда использовались только в геометрии. В качестве функций рассматривались целые алгебраические выражения, а аналитические утверждения основывались на геометрическом представлении. Правила дифференциального исчисления 17-18 вв. были определены лишь для алгебраических функций, формулы производных трансцендентных функций появились позже в работах Эйлера и Коши, хотя ещё Дж. Непер кинематическим способом определил скорость роста логарифма.

В 1708 г. в Париже вышел двухтомник Ш.-Р. Рейно «Доказательный анализ». Большинство утверждений автор не доказывал, а разъяснял с помощью примеров, не только математических, но и из области механики и астрономии. В «Доказательном анализе» содержатся прообразы двух первых из теорем о непрерывных функциях: теоремы о корневом интервале и теоремы о корне производной. Они были сформулированы М. Роллем в 1690 г. для многочлена и постепенно развивались до известных нам теорем о непрерывных функциях - теоремы Ролля и теоремы Больцано-Коши [1].

Тенденция сближения алгебры и анализа, отражённая в трактате Рейно, общее развитие математики XVIII в., дискуссия Ж. Даламбера и Л. Эйлера о струне привели к расширению понятия функции. В 1755 г. Петербургская академия наук опубликовала сочинение Л. Эйлера «Наставление по дифференциальному исчислению» [2]. Эйлер гордился тем, что при изложении анализа ему не требуется обращаться к прикладной интерпретации. В IX главе он пишет: «Понятие уравнения можно свести к понятию функции» [2, с. 367]. Эйлер рассматривал многочлен как заведомо непрерывную функцию, удовлетворяющую его представлениям о непрерывной функции – как функции, заданной единым аналитическим выражением.

В 1758–1769 гг. А. Кестнер, профессор математики и физики в Гёттингене, опубликовал четырехтомный (каждый том содержал 2-3 части) курс «Основы математики» [3], включая анализ, превосходный методически, с хорошим историческим обзором, многократно переиздававшийся. В курсе отчетливо видно влияние Эйлера. На русском языке курс Кестнера был издан в 1792–1803 гг.

В 1797-1798 г. Ж.Л. Лагранж издал «Теорию аналитических функций», в 1801 г. – «Лекции по исчислению функций». Аналитическими функциями Лагранж называл функции, разложимые в ряд Тейлора. Вопрос о сходимости не рассматривался, бесконечно малые не использовались. В «Теории аналитических функций» содержится его теорема о среднем значении, названная Ампером «теоремой Лагранжа» в 1806 г.

С 1797 г. начал выходить, многократно переиздаваться и переводиться трёхтомник С.Ф. Лакруа «Трактат о дифференциальном и интегральном исчислении» [4], по которому в XIX в. училось несколько поколений в Европе и России.

В 1817 г. вышла работа, ставшая первым предвестником реформы строгости в математическом анализе - «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» Б. Больцано [5]. Он критикует доказательства Кестнера, Клеро, Лакруа, Меттерниха, Peслинга, Клюгеля и Лагранжа за привлечение геометрических и физических образов (времени и движения) и за отсутствие аналитичности рассуждения, т. е. понимания непрерывности как математического понятия. В этой работе содержится определение непрерывной функции через приращение, понятие верхней грани и первое строгое математическое доказательство второй теоремы Ролля (сейчас она называется теоремой Больцано-Коши). В 1820–1825 годах Больцано развивал теорию целых и рациональных чисел (рукопись «Reine Zahlenlehre»), а 1830-х годах и теорию действительного числа [6]. Эта теория близка к современной концепции действительного числа, включая определение числа через сечение (за 40 лет до Дедекинда), но опирается на понятие переменного бесконечно большого и бесконечно малого числа. В 1830-е гг. Больцано, находясь в вынужденной отставке, написал «Теорию функций» (Functionenlehre) [7]. Эта рукопись оставалась неизвестной в течение столетия. В ней сравнивается различный ход функций и различные виды непрерывности, в том числе равномерной непрерывности, приводится пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции. Другие работы Больцано были известны [8], популяризировались такими математиками как Г. Ганкель [9], О. Штольц [10], философом Е. Дюрингом [11], который преподавал в Берлинском университете.

В 1821 г. О. Коши издал первую часть «Курса анализа», написанного на основании лекций, прочитанных в Политехнической школе. Вторая его часть, посвященная дифференциальному и интегральному исчислению, была опубликована в 1823 г. Определение непрерывной функции, введенное в «Алгебраическом анализе», в точности повторяет определение Больцано. Что очень важно для анализа, Коши формулирует теорему о среднем значении как свойство непрерывной функции. Теорема о корневом промежутке, теорема о среднем значении, теорема о корне производной приобрели статус теорем, описывающих свойства непрерывных функций. В 1821 году Огюстен Коши в «Курсе анализа» впервые систематически излагает теорию пределов и доказывает первый классический предел с помощью неявного предположения о сжатой переменной. В 1823 году опубликован «Конспект курса лекций по инфинитезимальному исчислению» [12], прочитанных Коши в Политехнической школе. Курс рассчитан на 40 лекций. На русском языке он вышел под названием «Дифференциальное и интегральное исчисление» в переводе В.Я. Буняковского в 1831 году [13]. Понятие окрестности строго не формулировалось, Коши использовал термин «соседство» (voisinage). Заметим, что первое строгое определение окрестности дал Р. Липшиц в 1864 г. В предположении, что любая непрерывная функция дифференцируема, Коши доказывает теорему о среднем значении. В курсе 1823 г. впервые появилась теорема Коши о среднем значении. Благодаря этим курсам сложилась структура математического анализа как научной и учебной дисциплины.

Представление о непрерывных функциях резко изменилось в середине XIX в. с появлением новых математических объектов, необходимостью классифицировать точки разрыва и оценивать объем этого понятия и возможность пренебрегать ими при разложении функций в ряды Фурье. Определение непрерывной функции на языке эпсилонтики ввел К. Вейерштрасс в 1861 г., развитие концепции непрерывности было продолжено в работах Э. Гейне, Р. Дедекинда и Г. Кантора в 1870-х гг.

В 1872 г. Э. Гейне, обобщая концепции Вейерштрасса и Кантора, и озабоченный необходимостью изложить эти концепции как введение в учебный курс анализа, написал «Лекции по теории функций» [14], где основные понятия (число, непрерывность) вводились с помощью фундаментальных последовательностей. В этой работе содержатся два его знаменитых результата: теорема о равномерной непрерывности, носящая имя Кантора-Гейне, и теорема о покрытиях, носящая имя леммы Гейне-Бореля (Борель строго доказал её в 1895 году).

В 1875 г. вышел первый полный курс У. Дини «Основы теории функций действительного переменного» [15], который включал предшествующие достижения К. Вейерштрасса, Г. Ганкеля, Г. Шварца, Э. Гейне, П. Дюбуа-Реймона, Р. Дедекинда и Г. Кантора. В его курсе систематически изложена новая концепция непрерывности, теоремы об ограничениях в теории рядов и дифференцировании, его группа теорем о непрерывной функции содержит 11 теорем (у Коши их только четыре). Дини дал определение непрерывности функции в окрестности точки с помощью односторонних пределов. Его курс теории функций действительной переменной приобрёл законченный вид, включающий все основные разделы, и имеющий оригинальное изложение.

Все названные курсы теории функций послужили фундаментом для развития теории функций в XX веке.

Литература

1. Синкевич Г.И. История понятия числа и непрерывности в математическом анализе XVII–XIX вв. Санкт-Петербург: Издательство СПбГАСУ. 2016. – 312 с.
2. Euler, L. (1755) Institutiones calculi differentialis. Vol. I. – Petropolis: Academia Imperialis Scientiarum Petropolitanae. 1787. – 224 p.
3. Kästner, A. G. Die mathematischen Anfangsgründe. 4 Th. 7 Bd. – Göttingen: Witwe Vandenhoeck, 1768–1769.
4. Lacroix S. F. Traité du calcul differentiel et du calcul intégral. 2 vol. – Paris: J.B.M. Paris:Duprat. 1797-1798. 3 vol.
5. Bolzano B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. – Prag: Gottlieb Haase, 1817. - 60 s.
6. Рыхлик К. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано // Историко-математические исследования. М., 1958. XI. -- С. 515 – 532.
7. Bolzano B. Functionenlehre // Schriften. Vol.1. / Edited by K. Rychlik. – Prague: Královská Ceská Spolecnost Nauk, 1930. - P. 80–184.
8. Синкевич Г.И. Распространение и влияние идей Больцано на развитие анализа XIX века // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 года. – Москва: РУДН, 2014. - С. 436 – 438.
9. Hankel H. Grenze //Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste. – Leipzig: Brockhaus-Verlag, 1870/71. - Vol. 90. – P. 185 – 211.
10. Stolz O. B. Bolzano’s Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung // Mathematische Annalen. – Leipzig, 1881. - Bd. 18. – S. 255 – 279.
11. Dühring E. Natürliche Dialektik: Neue logische Grundlegungen der Wissenschaft und Philosophie. – Berlin: Witter, 1865. – 227 s.
12. Cauchy A.-L. Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal (1823) // Œeuvres complètes. Ser. 2. Tome IV. – Paris: Gauthier-Villars, 1882–1974. - P. 9 – 261.
13. Коши О. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении / Перевод В.Я. Буняковского. – СПб.: Императорская Академия Наук, 1831. – 254 с.
14. Heine E. Die Elemente der Functionenlehre // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – Berlin, 1872. - 74. – S. 172 – 188.
15. Dini U. Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali. – Pisa: tip. Nistri, 1878. – VIII+407 p.