УДК 517.5(091)
DOI: 10.28995/2686-679X-2019-1-94-109

Развитие понятия непрерывности в математическом анализе до XIX в.

Галина И. Синкевич
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия, galina.sinkevich@gmail.com

Аннотация. В статье рассмотрена история тех аспектов понятий числа и непрерывности, которые послужили становлению математического анализа в период до XIX в. Внимание уделено математическим открытиям XIV, XVI, XVII, XVIII и XIX вв., приведен анализ основных концепций числа и непрерывности XIX в.

Ключевые слова. Непрерывность, действительные числа, комплексные числа, теория функций

Для цитирования: Синкевич Г.И. Развитие понятия непрерывности в математическом анализе до XIX в. // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2019. №1 (2). С. 94–109 DOI: 10.28995/2686-679X-2019-1-94-109

The development of the Continuity concept in Mathematical Analysis to the 19th century

Galina I. Sinkevich
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia, galina.sinkevich@gmail.com

Abstract. The article describes the history of those aspects of the number and continuity concepts which served the formation of mathematical analysis in the period to the 19th century. Attention is paid to the mathematical discoveries of the 14th, 16th,17th, 18th and 19th centuries. An analysis of the basic number and continuity concepts of the 19th century is given.

Keywords: continuity, real numbers, complex numbers, theory of functions

For citation: Sinkevich GI. The development of the Continuity concept in Mathematical Analysis. *RSUH / RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" Series.* 2019;1(2):94-109. DOI: 10.28995/2686-679X-2019-1-94-109

Два основных понятия математического анализа – число и непрерывность – прошли долгий путь формирования с античности до нашего времени. Понятие числа как элемента числового отрезка, связанного с понятиями непрерывности и упорядоченности, берет свое начало из античности, в методе исчерпывания Евдокса при работе с геометрическими величинами, принципе Евклида и его усилении в методах Архимеда приближения с избытком и недостатком.

В период с XII по XIV в. шел процесс освоения античного наследия, в том числе абстрагирования и математизации физических понятий континуума, непрерывности, точки, линии и поверхности. В работах Ж. Буридана, Т. Брадвардина, У. Оккама и Р. Суисета появились логические схемы, позже востребованные в построении математического анализа. Среди рассматриваемых ими утверждений были такие, как отсутствие последнего момента существования качества, но лишь возможность первого момента нового качества; между двумя примыкающими частями континуума нет ничего промежуточного; линия непрерывна лишь благодаря отрицанию чего-либо между ее частями, что могло бы стать причиной разрыва между ними; время как континуум разделяется моментом таким образом, что либо в прошлом нет последнего момента, либо его нет в будущем в зависимости от того, к будущему или прошлому мы относим момент настоящего. Новые понятия: изменение, интенсивность, мгновенная скорость, постоянная величина, непрерывная величина, последовательность, упорядоченность, хотя и без формализации, были введены схоластами, которые располагали эти величины на упорядоченных шкалах, между которыми есть соответствие. Была признана условность понятия точки в математическом смысле, признана идея самоподобия континуума, установлены первые парадоксы бесконечного. Буридан рассмотрел последовательность интервалов, в каждом из которых содержится точка континуума [1]. Еще не было понятия «направление» (возникло в математике только в XVIII в.), понятия вектора (кроме радиус-вектора точки). Впервые около 1300 г. на латыни появился термин «пространство».

Благодаря схоластам многие новые понятия стали научными конструктами. Еще не было понятий соседства, окрестности, сближения, сходимости, движения. Граница трактовалась как рубеж, ограничитель фрагмента физического материала. Как математический феномен середины XIV в. отметим описание Н. Оремом различия между переменной и постоянной, описание трех перпендикулярных осей, последовательное изменение интенсивности, представление величины линейного качества в виде площади и вычисление конечной площади бесконечной плоской фигуры [2].

Замечательным в работах схоластов XIV в. является то, что они обсуждали все гипотезы, к которым приводила их интуиция, но отвергали те из них, с которыми не согласовывался их научный опыт, к XIV в. довольно скромный. Многие из идей, высказанных, но отвергнутых после обсуждения Оремом, Брадвардином и Буриданом, послужили конструктивной основой представления о числе XVI в., понятию бесконечно малой XVII в., в анализе XIX века – понятиям плотности, последовательности, границы, представлению о сечении, покрытии, упорядоченности, непрерывности

К чести открытий номиналистов следует отнести развитие тезиса Аверроэса о том, что математика не существует вне души, математические понятия следует отличать от соответствующих им физических понятий. Философы Средних веков обогатили анализ непрерывного и дискретного развитием логики, углублением понятий континуума, бесконечности, введением логических квантификаторов.

В XVI в. важной вехой в расширении числовой области были исследования М. Штифеля, Дж. Кардано, Р. Бомбелли. Штифель (1545) впервые стал рассматривать отрицательные числа как числа, меньшие нуля, а положительные – как большие нуля; он упорядочил целые, рациональные и иррациональные величины относительно друг друга на числовой шкале и установил, что между двумя ближайшими целыми числами находится бесконечно много как дробей, так и алгебраических иррациональных чисел [3 с. 104], [4 с. 5–12]. Его пример можно рассматривать как демонстрацию плотности этих чисел. Теоретико-множественные идеи Штифеля продолжил Галилео Галилей, создав пример соответствия бесконечных числовых множеств [5 с. 141].

Кардано (1545) открыл мнимые числа, Бомбелли (1572) ввел правила арифметических операций над отрицательными числами, указал на возможность определить отношение равенства, сумму и произведение комплексных чисел. Чтобы число стало математическим объектом, нужно было определить отношения (равенство, больше, меньше, то есть порядок) и операции над объектами. Но было неясно, всегда ли операция над комплексными числами приведет к числу такого же вида. Ни физического, ни геометрического смысла у корней из отрицательных величин еще не было. Первую попытку дать геометрическую и физическую интерпретацию отрицательным и мнимым числам сделал Дж. Валлис (1685). А. Муавр (1707, 1722) дал тригонометрическую интерпретацию комплексного числа. Л. Эйлер (1730–1740) рассматривал комплексные числа как точки на координатной плоскости, он же ввел символ i (1777), использовал трехмерную систему координат. Геометрическая интерпретация комплексных чисел была предложена

К. Весселем (1797) и Ж.Р. Арганом (1806). Строгое построение алгебры комплексных чисел было сделано К. Гауссом (1831), при этом Гаусс обратил внимание на тот факт, что теория была бы развита раньше, если бы математиков не отпугивали неудачные термины «невозможное», «мнимое», «фиктивное» число и пр. У. Гамильтон (1843) на базе комплексных чисел создал теорию кватернионов, послужившую ступенью для создания Дж. Гиббсом (1881, 1884) векторного исчисления. Появление мнимой единицы расширило множество вещественных чисел, образовав двумерное пространство – комплексную плоскость. Операции над комплексными числами стали отражать свойства движения в пространстве. Понятие комплексного числа развивалось исходя из внутренней логики математики, а также из потребностей прикладных наук.

Формировалось представление о числовой шкале, на которой положительные числа расположены вправо от нуля по возрастанию, а отрицательные числа – влево от нуля по убыванию. Так постепенно шло расширение числовой области и обогащение ее геометрической и физической интерпретации.

Методы приближенного решения алгебраических уравнений И. Ньютона были развиты Дж. Валлисом (1685), Дж. Рафсоном (1690), Т. Симпсоном (1740). В работах Ньютона постепенно расширяется понятие числа, хотя Ньютон не анализировал сходимости своих методов. Это позже сделали Ж.-Р. Мурайль (1768), Ж.-Б. Фурье (опубл. 1831), А. Кэли (1879) и Л.В. Канторович (1937–1957).

К. Маклорен в своем «Трактате о флюксиях» (1742) предпринял попытку систематически изложить метод флюксий Ньютона и дать его обоснование на базе античной геометрии. Именно у Маклорена впервые появляется термин «аксиома Архимеда» [6 с. 5], за которой он признавал важнейшую роль в обосновании непрерывности. Маклорен освободил приближенные методы от античного принципа однородности, ввел удачную метафору, расположив на отрезке последовательности, сходящиеся справа и слева к искомому числу [6 с. 6] (понятие сходимости и ряда впервые появилось у Дж. Грегори (1660)). Впоследствии этот прием Маклорена войдет в аксиоматику действительного числа.

Зарождение первых теорем о непрерывных функциях началось в алгебре XVII в. Истоком был метод каскадов М. Ролля (1690), развитый в работах И. Ньютона (1707), Г.Ф. Лопиталя (1696), Ш.-Р. Рейно (1708), Дж. Кемпбелла, К. Маклорена (1727–1729), А.К. Клеро (1746), Л. Эйлера (1755), С.Ф. Лакруа (1797), А.Г. Кестнера (1768), Ж.Л. Лагранжа (1798), Б. Больцано (1817), О.Л. Коши (1821), М.В. Дробиша (1834), К. Вейерштрасса (1861, 1886), У. Дини (1878) и Г. Кантора (1879). Анализ алгебраического уравнения привел к формулировке двух фундаментальных положений теории функций – теоремы о корневом промежутке и теоремы о корне производной – и к созданию теоремы о среднем значении.

До конца XVII в. доказательства были приняты только в геометрии, а в алгебре и зарождающемся анализе они заменялись рассуждениями и демонстрацией примеров. Отправной точкой исследования был многочлен, т. е. заведомо непрерывная функция, а необходимость формулирования свойств непрерывных функций назревает после 1822 г. (появление рядов Фурье). Понятия функции в XVII в. только начало складываться, не было представления о графике как геометрическом месте точек, поэтому не было и представления о корне как о точке пересечения графика с осью. Этот образ возник у Ролля. У Лопиталя использованы понятия абсциссы, ординаты, координат, геометрического места точек, изложен геометрический смысл производной, связь возрастания и убывания функции со знаком первой производной, необходимое условие экстремума. Самую значительную роль в теории функций сыграл Больцано, подробно исследовавший теорему Ролля и давший первое строгое ее доказательство. Это было первое доказательство в математическом анализе. Больцано использовал метод дихотомии, предположение о существовании верхней грани, сформулировал определение непрерывной функции, критерий сходимости последовательности и теорему о среднем значении, что было огромным вкладом в развитие понятий непрерывного и бесконечного. В 1821 г. Коши доказал теорему Ролля с помощью сходящихся последовательностей. С 1861 г. в лекциях Вейерштрасса теорема о корневом промежутке, теорема о среднем значении, теорема о корне производной приобрели статус теорем, описывающих свойства непрерывных функций. Если во времена Коши таких теорем было четыре, то в курсе Дини (1878) их уже одиннадцать.

В XVIII в. в работах Л. Эйлера, Ж. Даламбера (1765), С. Люилье (1786), Ж.Л. Лагранжа (1797), А. Ампера (1806) развивались понятия предела, бесконечно малой и функции. В XIX в. эти исследования продолжили Больцано (1817), Коши (1823), Вейерштрасс (1856). В работах Эйлера (1748, 1755), Лагранжа (1770), Лакруа, Коши развивались правила дифференцирования.

Второй фундаментальной теоремой в группе теорем о непрерывных функциях была теорема о среднем значении Лагранжа (1797), получившая имя благодаря Амперу (1806) и блестяще доказанная Коши (1823). В доказательстве Коши впервые использовал в качестве знака конечной погрешности символ ε, но сам язык «ε-δ» сформировался в берлинских лекциях Вейерштрасса (1856–1861).

Легенда о принадлежности языка эпсилонтики Коши была создана А. Лебегом (1904).

Теорема о сжатой переменной стала следующей в группе теорем о непрерывных функциях. Представление о точке, лежащей в последовательности вложенных отрезков, высказал Буридан. Поиск искомой величины с помощью приближения с избытком и недостатком использовали Ферма, Грегори (1668), Ньютон (1669), Маклорен (1742), Гаусс (1809). Больцано (1817) сформулировал критерий сходимости последовательности, а Коши (1821) ввел его в систематическое изложение анализа. Сейчас он носит название критерия Коши и эквивалентен методу вложенных отрезков Кантора. Коши (1821) уже неявно пользовался принципом сжатой переменной, этот принцип использовали Фурье, Дирихле, Г. Дарбу (1875). Он привел к методу сходящихся последовательностей Гейне–Кантора и стал одним из инструментов обоснования анализа.

Деятельность по упорядочению математического анализа, начатая Б. Больцано, О.Л. Коши, Ш. Мере, была продолжена Г. Ганкелем, К. Вейерштрассом, Э. Гейне, Г. Кантором и Р. Дедекиндом.

Больцано один из первых начал разрабатывать аксиоматический метод как общенаучную логическую процедуру с такими характеристиками, как полнота, непротиворечивость, независимость. Он первым обратил внимание на то, что истины арифметики не могут быть выведены из эмпирических наук, прежде всего из геометрии; основал правила арифметики на четырех аксиомах и двух правилах сложения и умножения, из которых можно вывести все правила арифметики для натуральных чисел. В 1817 г. Больцано для доказательства существования точной верхней границы использует покрытие области интервалами. У него же впервые встречается понятие точки с их периферииями, термин Menge – множество. Он же впервые определил бесконечное множество как эквивалентное своей части.

Опыту логического изложения математики и формализации алгебры были посвящены работы М. Ома. Выявлением аксиом арифметики занимался Н.И. Лобачевский (1834, 1843). Попытку построить теорию арифметики предпринял Г. Грассман (1861). Необычная терминология и абстрактное изложение делали его сочинения малодоступными, он не был понят коллегами.

Г. Ганкель в 1867 г. разъяснил сущность идей Грассмана, а позже (1869) дал свое независимое изложение теоретической арифметики. Научной особенностью математического творчества Ганкеля, ученика Римана, было сочетание историко-математического и философского методов. Ганкель был единственным среди немецких профессоров, преподававшим историю математики. Он видел развитие идеи во времени и связь идеи с потребностями времени. В историческом отношении интересна статья Г. Ганкеля о пределе (1869) [7], подводящая итоги развития концепции предела незадолго до возникновения концепций числа и непрерывности. Ганкель констатировал процесс расширения понятия числа. Он рассмотрел действительные, комплексные и гиперкомплексные числовые системы, барицентрическое исчисление Мебиуса и построил для него алгебраическую систему, а также алгебраические системы для некоторых алгебр Грассмана и кватернионов Гамильтона. Ганкель выделил инвариантный почти для всех цивилизаций принцип записи чисел; ему принадлежат формулировка принципа постоянства формальных законов для новых концепций, предвосхищение теории меры, метод сгущения особенностей. Так как теория множеств еще не появилась, Ганкелю не хватало характеристик для описания множеств точек разрыва, но его работа стала важным продвижением к современной теории интеграла. Вопрос о необходимости аксиоматизации арифметики, поднятый Больцано и продолженный Грассманом и Ганкелем, был дополнен работами Дедекинда, Дж. Буля и завершен в 1889 г. Дж. Пеано. Из работ Ганкеля видно, насколько остро встала необходимость классификации точечных множеств и характеристики их сравнения, классификации точек разрыва; насколько нужна была новая концепция числа, как с точки зрения теоретической арифметики, так и с позиций анализа; необходимость новой концепции непрерывности и нового категориального аппарата, новых математических инструментов.

В последующие годы Кантором была создана теория множеств, Кантором и Дедекиндом – концепция непрерывности, Дедекиндом и Пеано – аксиоматика арифметики; в лекциях Вейерштрасса начинают формироваться концепция компактности, концепция метрического и топологического пространства, позже оформившиеся в работах М. Фреше (1906) и Ф. Хаусдорфа (1914). Ганкель отмечает, что если в прежние века математика изучала и описывала естественный мир, то в последний век создавался математический аппарат для технических достижений. Потребность в математических методах в приложении к теории потенциала, электротехники и другим разделам физики XIX в. давала свободу выбора адекватных математических моделей, соответствующих прикладным потребностям в областях, созданных физиками.

В 1869 и 1872 гг. вышли работы Ш. Мере с его концепцией иррационального числа, не получившие признания, но от этого не менее значимые. Он расширил понятие числа добавлением иррациональных чисел как классов эквивалентных сходящихся последовательностей и фиктивных пределов (сходящаяся последовательность есть число). Но неудачная терминология, тяжелый язык и отказ расширить понятие функции обрекли его труды на неудачу, его работа получила признание лишь столетие спустя. Французы называют ее концепцией Мере–Кантора.

К. Вейерштрасс сделал решительный шаг в анализе – ввел язык эпсилонтики (1861). В его лекциях содержится понятие окрестности, бесконечно малой, иррационального числа как предела бесконечного ряда. Теория иррациональных чисел, использующая предельную точку, появилась у Вейерштрасса после 1872 г. и была развита Кантором. Вейерштрасс вводит в теорию иррациональных чисел понятие точной верхней грани. Изложение его теории постепенно обогащалось. Это привело к созданию Вейерштрассом своей концепции континуума. Вейерштрасс нуждался в понятиях связности и континуума для приложений в области аналитических функций (аналитическое продолжение). Множества, рассматриваемые Вейерштрассом – это, как правило, счетные множества точек, исключенных из области определения функции (особые точки функции), или их дополнения. Условие связности у Вейерштрасса более сильное, чем у Кантора.

Сравнительный анализ понятий континуума и связности у Вейерштрасса и Кантора был сделан Г. Миттаг-Леффлером (1883) и Э. Фрагменом (1884). Вейерштрасс определил понятие непрерывности функции в окрестности точки на созданном им языке ε-δ. Им сформулированы свойства функций, непрерывных в точке, а также на отрезке, в том числе теорема о приближении функций многочленами; разработано понятие равномерной сходимости рядов как условия интегрирования. Задолго до Фреше и Хаусдорфа в лекциях Вейерштрасса формируется аксиоматика метрического и топологического пространства. Благодаря особенностям преподавания Вейерштрасс создал школу строго обоснованного математического анализа, теории эллиптических и абелевых функций, вариационного исчисления, многие его ученики стали крупными математиками. Влияние Вейерштрасса распространилось в России, Франции, Италии и других странах.

Начиная с работ Больцано, Дирихле и Гейне развивались понятия равномерной сходимости, равномерной непрерывности и идея покрытий отрезка. К понятиям равномерной сходимости ряда обращались О. Коши (1821, 1823, 1853), Н. Абель (1826), К. Вейерштрасс (1842), Ф.Л. Зайдель (1849), Дж.Г. Стокс (1849), В. Томе (1866), Э. Гейне (1870). Метод покрытия (неразбиения) интервалами впервые использовал Больцано в 1817 г. Дирихле в своих лекциях (1854 и 1858) использовал идею покрытий как инструмент доказательства. Он сформулировал равномерную непрерывность как фундаментальное свойство непрерывных функций, но не доказал ее строго, ибо в то время еще не была доказана теорема о пределе ограниченной монотонной функции, не было обосновано понятие точной верхней грани, которые сформулировал в своих лекциях Вейерштрасс в 1870-е; не была разработана концепция действительного числа, появившаяся в 1870-е годы в работах Кантора и Гейне. Понятие иррационального числа и вычисление функции от такого числа в 1850-е гг. еще было неясным. Не было известно, как много иррациональных чисел на отрезке, как они упорядочены. Не было понятия плотности расположения чисел. Все это ввел Кантор в 1872–1874 гг. Р. Липшиц, ученик Дирихле, продолжил исследования своего учителя относительно расширения условий сходимости рядов Фурье для случая бесконечного числа разрывов и экстремумов (1864) и впервые дал определение окрестности. Липшиц один из первых обратил внимание на различие между множествами, которые потом будут названы нигде не плотными, всюду плотными и приводимыми.

Э. Гейне, ученик Дирихле, вводя понятие равномерной сходимости (1870) писал, что на возникновение идеи повлияла работа Дирихле. Тогда же Гейне ввел понятие равномерной непрерывности для функции одной и двух переменных. Развивая эту идею в «Лекциях по теории функций» (1872) [8] на русском языке см. [4 с. 184–200], Гейне, следуя рассуждению Кантора, ввел понятие фундаментальной последовательности, на ее основе концепцию действительного числа, предела, функции, непрерывной функции, затем сформулировал теорему о равномерной непрерывности функции (теорема Гейне–Кантора) и доказал ее с помощью идеи покрытий конечным числом интервалов, каждый из которых содержит хотя бы одну точку интервала (лемма Гейне). Гейне не повторял, а развивал идею покрытий на основе своей концепции действительного числа. Его доказательство представляет собой значительный шаг вперед по сравнению с доказательством Дирихле, который рассматривал кусочно-непрерывную функцию и пользовался нестрогими геометрическими представлениями. В этой же работе Гейне первым высказал мысль, что некоторым (конечным) множеством точек разрыва можно пренебрегать, но языка теории множеств и способов оценки величины или меры такого множества еще не было. Заметим также, что «Лекции по теории функций» были первым учебным пособием по теории функций, ознаменовавшим появление нового раздела математического анализа.

Впоследствии варианты теоремы о покрытиях формулировались У. Дини (1878), К. Вейерштрассом (1880), И. Томе (1880), С. Пинкерле (1882), Э. Борелем (1895 и 1903), А. Гурвицем (1891), П. Кузеном (1895), А. Шенфлисом (1900), В.Г. Юнгом (1902), Э.Л. Линделефом (1903), А. Лебегом (1902/1903), О. Вебленом (1904).

В создании понятия равномерно непрерывной функции огромная подготовительная работа была проделана математиками середины XIX в. Больцано, Коши, Дирихле, Риманом, Липшицем, а окончательно сформулировали понятие равномерно непрерывной функции и ее свойства Кантор и Гейне. К этому времени была создана теория множеств, зарождалась теория меры. Использование понятия производного множества стимулировало ее развитие. Борель выделял те области, к которым применимо мероопределение. Лебег ввел внутреннюю меру области. Появилась классификация точек на внешние и внутренние, классификация предельных точек. Развивалось исследование числовых областей и позже построение областей по заданным свойствам. Это привело к появлению конструктивной и дескриптивной ветвей теории функций. Метод покрытий, будучи сначала вспомогательным инструментом деления отрезка на части и суммирования тех из них, где функция имеет ограниченное колебание, превратился за сотню лет в важный инструмент анализа свойств функции. Постепенное обогащение смыслами сопутствовало методу покрытий в истории анализа.

Р. Дедекинд, ученик Гаусса и Дирихле, занимался вопросами алгебры. В 1871 г. он, обобщив теорию многочленов и алгебраических чисел, ввел в математику абстрактные алгебраические структуры: кольца, идеалы и модули. Совместно с Л. Кронекером он разработал общую теорию делимости. Знакомство с Г. Кантором способствовало его интересу к проблемам теории множеств. Идея Дедекинда о постепенном восхождении человечества по лестнице смыслов была высказана им в работе «Что такое числа и для чего они служат?» (1888) [9]. Это было его собственное построение теории множеств (систем), где Дедекинд применил аксиоматический метод построения системы натуральных чисел. Термин «вещь» он употребляет как элемент множества, рассматривая принадлежность вещей к одному множеству через их связанность в нашем сознании и возникновение нового объекта в сознании. Последовательность таких этапов образует лестницу смыслов, согласованную с предшествующим построением математики и образующую новые понятия, новое представление о непрерывности числовой области. Понятие о числе независимо от представлений о физическом и геометрическом пространстве является продуктом нашей мысли.

Система аксиом арифметики, сформулированная Дедекиндом для натуральных чисел, год спустя была развита и упрощена Пеано, чье имя за ней и закрепилось, но еще до него Дедекинд показал, как основные теоремы арифметики получаются из его аксиом. В начале XX в. аксиоматический метод был окончательно принят школой Гильберта как основной в математике.

В учебных курсах XIX в. по теории функций понятие числа пополнилось анализом иррационального числа, понятиями непрерывной и равномерно непрерывной функции, что было вызвано потребностями анализа числового интервала и совокупностей точек разрыва. В лекциях Дирихле, Вейерштрасса, Гейне шло дидактическое совершенствование изложения этих понятий.

С 1872–1884 гг. Г. Кантор написал основные работы по теории множеств. В 1872 г. действительное число было определено им как предел сходящихся последовательностей, для которого определены отношение порядка и арифметические операции. Кантор развил эту идею, образуя новые последовательности из иррациональных чисел (иерархию предельных точек). Основополагающими для определения числа Кантор сделал понятия взаимно-однозначного соответствия между множествами, иерархии производных множеств, а впоследствии сравнения их по мощности. Кантор принял как аксиому взаимно-однозначное соответствие точек оси и чисел: всякой точке оси соответствует некоторое число, которое он назвал действительным, оценил алгебраические иррациональные числа как счетное множество, а все иррациональные числа как несчетное множество и пришел понятию мощности множеств, что позволило ему создать первую часть теории множеств – теорию точечных множеств. Гейне придерживался концепции Кантора, методически изложил ее в курсе лекций, впервые сформулировал принцип пренебрежения некоторым множеством точек, то есть степень общности утверждения.

Концепция Вейерштрасса основана на понятии функции как ряда, а числа как агрегата (конечной или «обозримой» числовой совокупности), каждая неизмеримая числовая величина по Вейерштрассу есть граница ранее определенных измеримых величин. Вейерштрасс определяет действительное число как предел частичных сумм абсолютно сходящегося ряда, обращая внимание на необходимость арифметизации понятия предела. Вводит упорядоченность, замкнутость относительно арифметических операций. В отличие от Кантора, отвергающего прикладные аспекты, и Дедекинда, направленного на арифметическую сторону понятия числа, Вейерштрасс предназначал свою концепцию для обоснования теории аналитических функций. Те понятия, которые он вводит, не носят глобального характера, но необходимы лишь для его построений. Он вводит собственные понятия континуума и связности, которые отличаются от таковых же понятий у Кантора; для аналитического продолжения по пути строит цепочку открытых дисков, что эквивалентно лемме Гейне о покрытиях. При этом если функция представлена в виде ряда, то это не сужает, а расширяет возможности исследования этой функции, но ряд должен обладать равномерной сходимостью.

Дедекинд основал свою концепцию действительного числа на понятии сечения как для чисел, так и для точек на прямой. Особенностью определения Дедекинда был алгебраический подход к числу. Он стремился дать арифметическое определение понятие непрерывности, свободное от геометрической интерпретации. Причем Дедекинд утверждает, что это наш мысленный акт, который производится независимо от того, является ли реальное пространство непрерывным или разрывным, это мысленное заполнение новыми точками не влияет на реальное бытие пространства. Он определяет вычисления с вещественными числами. При этом он доказывает теорему о непрерывности арифметических операций. Дедекинд устанавливает связь введенных им понятий с основными положениями анализа бесконечных, доказывает теорему о пределе ограниченной монотонной величины. Работы Дедекинда легли в основу фундамента общей алгебры. Определение понятий непрерывности и действительного числа у Дедекинда безупречно с логической точки зрения, но представление об объеме и структуре понятия из него не следует. В создающихся на основе этих работ учебных курсах математического анализа и теории функций число определялось по Дедекинду, а затем в построениях переходили к более практичному определению числа Кантора, используя понятие фундаментальной последовательности и предельной точки.

На рубеже XIX–XX вв. самым совершенным был признан «Курс теории действительной переменной» Улисса Дини (1878) [10]. Дини читал его почти 50 лет. Курс был основан на исследованиях П. Дирихле, Н. Абеля, П. Дюбуа-Реймона, К. Вейерштрасса и Г. Миттаг-Леффлера и с годами обогащался результатами Г. Кантора, Э. Гейне, Р. Дедекинда, Г. Ганкеля и Г. Шварца. Во многих случаях Дини вводил более общие формулы и методы. Так, например, в области непрерывности и равномерной непрерывности функций он продемонстрировал получение результатов Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера с помощью метода Э. Бетти и подобным же образом обогатил новыми методами теорию степенных и тригонометрических рядов, а также и теорию функций комплексной переменной. Методологическая база Дини, обусловленная опытом дифференциальной геометрии, в анализе бесконечно малых очень сильна и отличает его курс от курсов других аналитиков. Дини принадлежит определение непрерывности функции через односторонние пределы, а также собственная классификация разрывов. Как отмечал позже Лузин, это привело к появлению дескриптивного и конструктивного направлений в математическом анализе. Исследования Дини легли в основу современного анализа.

Теория действительного числа и понятие непрерывности числового континуума получили дальнейшее развитие в работах французской школы теории функций (Р. Бэр, Э. Борель, А. Лебег и другие), московской школы теории функций (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин и его ученики), польской школы теории множеств и теории меры (В. Серпинский и его ученики) и других математиков XX в. Системы аксиом арифметики и геометрии требовали обобщения на едином основании. В 1899 г. Д. Гильберт создал новую систему аксиом, в которую ввел аксиому Архимеда и аксиому полноты. В XX в. А.Н. Колмогоров построил аксиоматическую концепцию действительных чисел как совокупности, являющейся полным линейным упорядоченным полем. Аксиому полноты Колмогоров назвал аксиомой непрерывности. Приведя аксиомы концепций XIX в., (аксиому Дедекинда о сечении, аксиому Больцано о существовании верхней (нижней) грани, аксиому Вейерштрасса о предельной точке, аксиому о сходящейся подпоследовательности, аксиому Больцано о монотонной последовательности, аксиому Кантора о вложенных отрезках), Колмогоров доказал их эквивалентность. Исследования Колмогорова показали, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков (фундаментальных последовательностей Коши–Кантора) вместе с аксиомой Архимеда.

К началу XX в. сформировалось понятие числовой прямой. Развитие этого понятия шло от античного представления о телесной прямой как фрагмента физического материала. В античности числа представлялись как совокупность натуральных и рациональных положительных чисел, образующих шкалу. Иррациональные величины традиционно от Евклида понимались как неизвлекаемые корни. В состав чисел очень долго не входил ноль. Впервые отрицательные числа как числа, меньшие нуля, и положительные числа, как числа, большие нуля, определил Штифель (1544). У него же ноль, а также дробные и иррациональные величины названы числами. Людольф ван Цейлен (1596) вычислил число π с 35 десятичными знаками; Галилей (1630) понимал линию как результат движения. Только в XVII в. на шкале появились ноль и отрицательные числа, а с ними шкалы термометров с отрицательной температурой и отсчет времени до и после Р. Х. Геометрическая прямая, или ось, как понятие в математическом анализе формируется в период XVI–XVIII вв. Понятие прямой или кривой как геометрического места точек обобщается в XVII веке в первых работах по математическому анализу. Л. Эйлер (1748) высказал предположение о существовании кроме иррациональных алгебраических чисел еще и трансцендентных иррациональных чисел, получаемых в результате трансцендентных вычислений, например, логарифмирования, и дал обозначения π и *e*; И. Ламберт (1766) доказал иррациональность чисел π и *e*; Лагранж определил иррациональные числа через бесконечные непрерывные дроби; Коши (1821), определил иррациональные числа как пределы сходящихся последовательностей, но не определил отношение порядка и операции над ними; Больцано (1830) сделал попытку построить теорию действительного числа (его передовая работа была опубликована лишь столетие спустя); Ж. Лиувилль (1840-е гг.), начал строить теорию трансцендентных чисел; Ш. Эрмит (1873) доказал трансцендентность числа e; Ф. Линдеман (1882) доказал трансцендентность числа π; К. Вейерштрасс (1885) упростил его доказательство.

Но теория действительного числа еще не была создана. Нельзя было строго определить ноль, больше, меньше или равно нулю. Поэтому Вейерштрасс в своих лекциях по дифференциальному исчислению (1861) доказывал теорему «Непрерывная функция, у которой производная внутри определенных интервалов аргументов всюду равна нулю, сводится к константе». В 1869 г. теорию действительного числа построил французский математик Ш. Мере. Мере ввел понятие неизмеримого числа как фиктивного предела, его теория эквивалентна теории Кантора, но ее не приняли современники.

Числовая прямая как концепт сформировалась в работах Кантора и Дедекинда 1872 г. Дедекинд рассмотрел точки на прямой линии и установил для них те же свойства, что и для рациональных чисел, постулируя, что каждому рациональному числу соответствует точка на прямой линии. Это свойство прямой Дедекинд называет аксиомой, принимая которую мы придаем прямой непрерывность. Кантор постулировал взаимно однозначное соответствие между числами и точками на прямой он утверждал, что доказать это невозможно. Вейерштрасс полагал, что каждому числу соответствует точка на геометрической прямой; но неизвестно, каждой ли точке соответствует число.

Привычный нам образ числовой прямой формировался в течение более чем двух тысячелетий от телесного отрезка до шкалы положительных целых, затем рациональных чисел; в XVII в. на шкале появились ноль и отрицательные числа; были добавлены иррациональные числа; концепция Кантора завершила представление о числовой прямой как о совершенном связном множестве.

Новые концепции соответствовали потребностям науки и преподавания XIX в., благодаря им пополнился инструментарий исследований. Дальнейшее направление развития этих концепций привело к появлению таких теорий XX в., как дескриптивная теория множеств, теория функций, топология и функциональный анализ.

Литература

1. *Буридан Ж.* Трактат «О точке» // Зубов В.П. Из истории мировой науки. Избранные труды 1921–1963. СПб.: Алетейя, 2006. С. 311–347.
2. *Орем Н.* Трактат о конфигурации качеств // Историко-математические исследования. М.: Наука, 1958. Вып. XI. С. 636–719.
3. *Stifelio M.* Arithmetica Integra. Norimbergae: apud Johan. Petreum, 1544. 327 p.
4. *Синкевич Г.И.* История понятия числа и непрерывности в математическом анализе XVII–XIX вв. СПб.: СПбГАСУ, 2016. 312 с.
5. *Галилей Г.* Избранные труды: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1964. С. 141.
6. *MacLaurin C.* A Treatise of Fluxions in two books by Colin MacLaurin, A.M., Professor of Mathematics in the University of Edinburg and Fellow of the Royal Society. Edinburg: T.W. and T. Ruddmans, 1742.
7. *Hankel H.* Grenze //Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste. 167 bd. Leipzig: Brockhaus-Verlag, 1870. Bd. 90. S. 185–211.
8. *Heine E.* Die Elemente der Functionenlehre // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1872. Vol. 74. S. 172–188.
9. *Дедекинд Р.* Что такое числа и для чего они служат? / общ. ред. и пред. Г.И. Синкевич. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2015. 98 с.
10. *Dini U.* Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali. Pisa: tip. Nistri, 1878. VIII+407 p.

References

1. Buridan J. Treatise “On the Point”. V: Zubov VP. From the history of world science. Selected works 1921–1963. Saint Petersburg: Aleteya Publ.; 2006. p. 311-47. (In Russ.)
2. Orem N. Treatise on Qualities configuration // Historical and mathematical research. Moscow: Nauka Publ.; 1958. Vol. 11. p. 636-719. (In Russ.)
3. Stifelio M. Arithmetica Integra. Norimbergae: apud Johan. Petreum, 1544. 327 p.
4. Sinkevich GI. The history of the number and continuity concepts in mathematical analysis in 17^{th}–19^{th} centuries. St. Petersburg: SPbGASU Publ.; 2016. 312 p.
5. Galilei G. Selected works. In 2 Vols. Moscow: Nauka Publ.;1964. Vol. 2. p. 141. (In Russ.)
6. MacLaurin C. A treatise of fluxions in two books by Colin MacLaurin, A.M., professor of Mathematics in the University of Edinburg and Fellow of the Royal Society. Edinburg: T.W. and T. Ruddmans, 1742.
7. Hankel H. Grenze. *Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste*. 167 bd. Leipzig: Brockhaus-Verlag, 1870. Bd. 90. p. 185-211.
8. Heine E. Die Elemente der Functionenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Berlin, 1872. Vol. 74. S. 172-88.
9. Dedekind R. What are numbers and what are they for? Sinkevich GI., ed., preface. Izhevsk: NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika” Publ.; 2015. 98 p. (In Russ.)
10. Dini U. Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali. Pisa: tip. Nistri, 1878. VIII+407 p.

Информация об авторе

Галина И. Синкевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия; Россия, Санкт-Петербург, 190005, 2-я Красноармейская ул., д. 4; galina.sinkevich@gmail.com

Information about the author

Galina I. Sinkevich, Cand. of Sci. (Phisics and Mathematics), associate professor, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia; bld.4, 2-nd Krasnoarmeiskaya str., Saint Petersburg, 190005, Russia; galina.sinkevich@gmail.com