Улисс Дини и понятие непрерывности.

Г.И. Синкевич. СПбГАСУ

Опубликовано: Синкевич Г.И. Улисс Дини и понятие непрерывности // История науки и техники. – 2012. - №10. – С. 3–11.

Итальянский математик Улисс Дини работал в период расцвета математического анализа, годы его жизни (1845-1918) совпадают с годами жизни Георга Кантора, который высоко его ценил. Основные результаты Дини относятся к дифференциальной геометрии, основам анализа и рядам Фурье. Курс математического анализа, который Дини читал почти 50 лет, был основан на исследованиях Дирихле, Абеля, Дюбуа-Реймона, Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера, и с годами обогащался результатами Кантора, Гейне, Дедекинда, Ганкеля и Шварца. Во многих случаях Дини ввёл более общие формулы и методы, например, в области непрерывности и равномерной непрерывности функций он показал получение результатов Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера с помощью метода Бетти, и подобным же образом обогатил новыми методами теорию степенных и тригонометрических рядов и теорию функций комплексной переменной. Дини принадлежит определение непрерывности функции через односторонние пределы, а также собственная классификация разрывов. В этой статье мы рассмотрим его вклад в развитие понятия непрерывности. Приведён список работ Дини. Иллюстрация 1 Портрет Улисса Дини.

Улисс Дини родился 14 ноября 1845 года в Пизе в скромной семье Пьетро и Терезы (урожд. Marchionneschi).

В Нормальной школе Пизанского университета[1] учился у Энрико Бетти[2] и О. Моссотти[3]. В 19-летнем возрасте представил диссертацию по приложениям теории поверхностей. Выиграв конкурс на обучение за границей, 1864-65 год провёл в Париже, работая под руководством Ж. Бертрана и Ш. Эрмита, и за это время опубликовал семь работ по теории поверхностей. С 1866 года и до конца жизни работал профессором (с 1867 – ординарным профессором) Пизанского университета (в 1888-1890 – ректор). Сначала занимался высшей алгеброй и теоретической геодезией, в 1871 был назначен профессором анализа и высшей геометрии на место своего учителя Энрико Бетти, которому была передана кафедра математической физики. С 1877 помимо этого читал лекции по инфинитезимальному анализу. Этот курс Улисс Дини читал до самой смерти 28 октября 1918 года.

---

[1] Высшая Нормальная школа Пизы, основанная в 1810 г. Наполеоном по образцу Нормальной школы в Париже, входит в состав университета Пизы. Сам университет ведёт свою историю с XI века, среди его студентов, а потом профессоров в XVI веке был Галилео Галилей. Здание XVI века построил Джорджо Вазари. В 1864 году там читал лекции Б. Риман.

[2] Энрико Бетти был не только ярким учёным, но и участником борьбы за объединение Италии, соратником Гарибальди. Его научные интересы были близки интересам Римана, с которым он состоял в тесной переписке, а в годы пребывания Римана в Италии – в тесной дружбе. В молодости Бетти занимался алгеброй, затем многозначными аналитическими функциями, комбинаторной топологией, ввёл понятия, которые Пуанкаре позже назвал «числами Бетти» и «группами Бетти» . Также занимался теорией упругости и уравнениями матфизики.[65, с. 9]

[3] По кафедре математической физики.

В течение 10 лет был членом правительства города Пизы, и в течение 25 лет был членом Верховного света Пизы, с 1880 – член Национального Парламента как депутат от Пизы. В 1892 году был назначен государственным сенатором. Его политическая деятельность была направлена в сферу образования, в частности, благодаря ему была создана Прикладная инженерная школа, Женская нормальная школа, Технический институт. С 1908 по 1918 директором педагогического колледжа.

Современники вспоминают о Дини как о прямом, честном и добром человеке, который посвятил свою жизнь преподаванию и фундаментальным исследованиям с одной стороны, и общественной деятельности, направленной на благосостояние родного города и страны. Иллюстрация 2. Памятник Дини в Пизе.

Первый период научной деятельности Дини связан с дифференциальной геометрией. Он занимался изучением свойств некоторых поверхностей в русле проблематики Ж.-Б. Мёнье и Ж. Лиувилля во Франции и Э. Бельтрами в Италии. Сюда относятся поверхности, у которых произведение или частное двух главных радиусов кривизны остаётся постоянным (изгибание поверхностей, спиралевидные поверхности, пример одной из которых получил название геликоида Дини. Это эллипсоид, кривизна которого постоянно отрицательна и равна $-\frac{1}{a^2}$ представляя собой в вертикальном сечении кривую (трактрису), касательные которой имеют постоянную длину $\sqrt{a^2-\frac{h^2}{4\pi^2}}$, h является общим шагом винтовой линии, изображающей различные точки вертикального сечения [3 - 5] Иллюстрация 3. Поверхность (геликоид) Дини); линейчатые поверхности, для которых один из главных радиусов кривизны является функцией другого[17, 19, 22, 23, 25]. Независимо от Бельтрами Дини в [4] дал доказательство того, что все линейчатые поверхности, у которых главные радиусы кривизны являются функциями друг друга, есть эллипсоиды. В работах [7, 8] Дини дал новое характеристическое свойство некоторому классу поверхностей, имеющих в данной точке одинаковую кривизну. Работы [9-15] посвящены различным поверхностям, описываемым уравнениями в частных производных. Другая группа поверхностей – это например, такие, которые имеют плоскую или сферическую линию кривизны, или имеющие такое свойство, что в любой точке два главных радиуса кривизны связаны отношением – рассмотрена в работах [17, 19, 22, 23, 25].

Значительной является проблема, предложенная Бельтрами в 1868 и решённая Дини в полном объёме в 1869 году [21], посвящённая условиям локального геодезического отображения двух неизометрических поверхностей. Об этом решении Дини написал его ученик Луиджи Бьянки [66].

В работе [33] рассмотрено конформное преобразование поверхностей с применением дифференциальных параметров и неизменяемых функций, что было высоко оценено Бельтрами. Одновременно такие же результаты получил Г. Дж. С. Смит.

Методы высшей геодезии, которыми виртуозно владел Дини, позволили ему дать новые и более простые выводы некоторых приближённых формул Даламбера и сделанных французскими инженерами расчётов географических координат и длины дуги меридиана.

В алгебре Дини установил теорему о верхней и нижней границе для модулей корней алгебраических уравнений вида $a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m = 0$ с действительными или комплексными коэффициентами[4][44].

Дини, ещё будучи студентом-геометром, заявил о себе как о серьёзном аналитике. Первые десять лет творческой работы он предпочитал заниматься теорией поверхностей. По мере знакомства с аналитическими методами школы Вейерштрасса, он заинтересовался рядами Фурье, а затем инфинитезимальным анализом. Уже в работах [13, 16, 18] наряду с использованием методов классического анализа видны попытки нового подхода и ощущение потребности в новых методах. Он чувствовал неудовлетворительность методов доказательств, недостаточность базовых принципов, лежащих в основе анализа, и прежде всего, теории функций действительной переменной. В 1870-х годах он познакомился с работами Э. Гейне, Г. Шварца, Г. Кантора, П. Дюбуа-Реймона и Г. Ганкеля, разрабатывавших проблематику К. Вейерштрасса. Поехать в Германию было сложно, научная информация поступала в Италию из Германии скудно. Дини, размышляя самостоятельно, постепенно приходил к новой концепции непрерывности и к теоремам об ограничениях в теории рядов и дифференцировании, благодаря чему его курс теории функций действительной переменной приобрёл законченный вид, включающий все основные разделы, и имеющий оригинальное изложение. На лекциях Дини

---

[4] «Положим $\theta(\lambda) = \frac{|a_1|\lambda^{m-1} + |a_2|\lambda^{m-2} + \ldots + |a_m|}{a_0}$ и пусть k – максимальное из чисел $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \ldots, \left|\frac{a_m}{a_0}\right|;$ тогда выражения $l = 1 + k_1;\ l_1 = \sqrt[m]{o(l)};\ l_2 = \sqrt[m]{o(l_1)}, \ldots$ - это верхние пределы всех форм корней уравнения и создают ограничивающий ряд» [44].

привлекал студентов не только строгим изложением материала, но и оживлёнными дискуссиями по поводу проблемных вопросов.

«Основания теории функции действительной переменной» 1878 года - это наиболее известная его работа, дополненное издание на немецком языке [39] вышло в 1892 году, что расширило влияние методов Дини. В 1875 были напечатаны первые девять глав его работы, остальные в январе 1877. В том же году вышла работа [32], посвящённая специальным вопросам анализа «О функциях, нигде на интервале не имеющих производной». В ней обобщаются результаты Дюбуа-Реймона и Ганкеля, посвящённые функциям с бесконечной сингулярностью.

С другой стороны, эти же самые плодотворные идеи воплотились в 1907-1915 годах в «Лекциях по инфинитезимальному анализу»[56]. Методологическая база Дини, обусловленная опытом дифференциальной геометрии, в анализе очень сильна и отличает его курс от курсов других аналитиков. Он работает с пространством как хирург, особенно при анализе поведения функции в окрестности особой точки. Выражена тенденция к специальным функциям, контрпримерам. Дини – мастер детали. Иллюстрируют это два его мемуара [27, 28], в которых он в более широких начальных условиях устанавливает строгую процедуру разложения функции действительной переменной в ряд сферических функций. Известны доказательства этой процедуры П. Дирихле и О. Боне. Семь лет спустя он посвятил этой же теме большой труд «Об аналитическом представлении произвольной функции действительной переменной на некотором интервале» [35], который преимущественно посвящён рядам Фурье, наряду с новыми результатами, продолжающими исследования Ш. Эрмита и отчасти полученными независимо от него, что развито в трактате «Ряды Фурье и другие аналитические представления функций действительной переменной [36].

Ещё одна область исследований, вклад в которую внёс Дини, - это дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных, к которым Дини обращался в течение полувека.

Он нашёл новый метод решения линейного уравнения $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = X$ для случая, когда *a* – это данные функции от *x*, в то время как *X* зависит от *y* и некоторых её производных. Найденная форма получила приложения в [45, 46]. В работе [51] содержатся теоремы об интегрировании уравнений вида $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = a \cdot \frac{du}{dx} + b \cdot \frac{du}{dy} + c$, где *a, b, c* –

заданные функции от x, y. Эти теоремы дополняют и уточняют некоторые утверждения Пикара.

В 1911 выходят литографированные лекции Дини по линейным дифференциальным уравнениям второго порядка [57], где по частично компенсируются недостатки предыдущих методов. Первая часть соответствует курсу, прочитанному в 1903-1904 учебном году, где, на основании своего трактата по рядам Фурье, Дини демонстрирует возможность и единственность разложения произвольных функций в ряды решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка; как только эти результаты были опубликованы, расширилась возможность решения некоторых классов линейных дифференциальных уравнений высоких порядков [54, 55]. Это вызвало большое количество исследований других математиков, в том числе Арцела и Краузе. Вторая часть этого сборника лекций посвящена свойству рядов аналитически представлять функции вещественной переменной, исходящему от Абеля, и используемому в теории интегральных уравнений. Отчасти этот вопрос рассматривался Дини в [35]. Идеи, высказанные Дини в работе [58], посвящены интегральным уравнениям и используются в теории интегральных уравнений. Этой теме Дини посвятил целую главу (XXXII) курса «Лекций по инфинитезимальному анализу» [56], где он основывает изложение на рядах Фурье, и продолжает эту тему в [61].

Дини оказывал предпочтение ТФДП перед ТФКП, хотя уделил много внимания обеим теориям. Ещё в 1870 в статье [24] Дини исследует функцию комплексной переменной. В работе [26] он интегрировал уравнение $\Delta^2 u = f$, где функция $f(x, y)$ непрерывна и конечна вместе с первой и второй производными всюду в рассматриваемой области. Эта работа позже получила приложения в [60]. Замечательна также работа «Некоторые теоремы о функциях комплексной переменной»[38], где дано красивое доказательство выражений Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера для однородных функций, полученное с помощью метода, аналогичного методу Бетти, но ограниченной общности.

Известна теорема Дини о равномерной сходимости рядов и признак Дини поточечной сходимости рядов Фурье [36].

В 1872 году появились статьи Кантора [64, с. 9-17], Гейне [68] и Дедекинда [63], посвящённые расширению понятия числа и непрерывности. 1875-1885 годы – это годы создания Кантором теории множеств. Первое издание курса Дини вышло в 1878 году [34], последнее в 1907-1915 годах [56]. Этот трактат считается наиболее полным в итальянской литературе.

Его идеи относительно непрерывности рядов и непрерывных функций развивали Ч. Арцела и М. Краузе. Учеником Дини был Вито Вольтерра, который обратился к математике после лекций Дини.

Приведём здесь определения и теоремы, связанные с непрерывностью из «Оснований ТФДП» 1878 года [34] (курсив Дини, перевод Синкевич). Этот курс создавался в те годы, когда уже был разработан анализ Вейерштрасса, появилось определение действительного числа, данное в 1872 году Кантором, Гейне и Дедекиндом, но ещё не были написаны основные работы Кантора по теории множеств. Дини во многом продвинулся в разработке понятия непрерывности самостоятельно, с помощью методов дифференциальной геометрии. Ему принадлежит новое определение непрерывности функции в точке с помощью левого и правого предела. Все эти теоремы он сохранил в издании 1907-1915 годов [56]. Непрерывность числовой прямой и понятие числа Дини излагает по Дедекинду, но придаёт большее значение пределам слева и справа. Определение функции даётся по Дирихле. Разрывы функций Дини сначала классифицирует по Риману (устранимый или нет), затем вводит новую классификацию (конечный или нет, односторонний или нет). Обозначения $f(a-0)$ и $f(a+0)$ принадлежат Дирихле. Теорему Кантора о равномерной непрерывности Дини излагает на основании сообщения Шварца. Первичные понятия точечных множеств, предельной точки, верхней и нижней границы, и производного множества излагает по Кантору.

Определение предела функции в точке: Если существует конечная определённая величина *A*, обладающая свойством, что найдётся сколь угодно малое положительное и отличное от нуля число σ, на которую неопределённо отличается *x* в большую или меньшую сторону при приближении к величине *a*, по нашему предположению конечной, и никогда не достигает $x = a$; тогда разность *A – y останется и всегда будет оставаться* меньше по абсолютной величине, чем выбранное число σ; иначе говоря, А есть предельное значение, полученное для *y*, когда *x* увеличивается или уменьшается или, что не ограничивает общности, изменяется на прямой произвольно, и слева и справа от *a*. И в дальнейшем мы будем говорить, что *y* имеет предельные значения справа или слева от а, или, проще говоря, правый или левый предел *y* при $x = a$, или при $x = a + 0$, $x = a - 0$ соответственно,[5] когда для сколь угодно малого и положительного числа σ можно будет

[5] Эти символы $a + 0$, $a - 0$ часто используются для указания точки справа или слева от *a* соответственно, и сколь угодно много соседних с ней (*a* исключено), и мы будем использовать это обозначение в том же смысле – *примечание Дини*.

найти такое ε, положительное в первом случае и отрицательное во втором, что для всех значений *x*, расположенных между *a* и *a* + ε (*a* исключено), разность *A* – *y* всегда будет меньше, чем σ. [34, с. 22].

Теоремы о непрерывности функции в точке.

1. *Для того, чтобы значения y справа и слева от конечного числа a, например, справа, имели определённый предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого положительного числа* σ *существовало положительное число* ε, *такое, что разность* $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta}$ *между значением y в точке* $x = a + \varepsilon$, *т. е.* $y_{a+\varepsilon}$, *и любым другим значением* $y_{a+\delta}$, *соответствующим значению x в* $a + \delta$, *значения y для x между a и a + ε (a исключено), было численно меньше, чем σ.*[34, с. 27].

2. *Для того, чтобы значения y для бесконечно больших значений x, положительных или отрицательных, допустим, что для положительных, имели конечный определённый предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного произвольно малого числа* σ *существовало положительное число* x' *настолько большое, что при всех положительных значениях x, больших, чем* x', *по абсолютному значению будет* $y_{x'} - y_x < \sigma$.[34, с. 29].

3. *Если значения y для x, неопределённо близких к a справа или слева, или при x, растущих до бесконечности, всегда остаются конечными, но не имеют конечного предела, то они будут постоянно (непрерывно) колебаться, по крайней мере, некоторые из границ этих колебаний, как ожидается, отличаются друг от друга на величину, отличную от нуля,* как это происходит, например, во-первых, с функцией $sin\frac{1}{x-a}$, а во-вторых, с функцией $sin\, x$.[34, с. 30]

4. *Если при приближении x к конечной величине a справа или слева, или растущем до бесконечности положительного или отрицательного значения, допустим, что для положительного, величина y всегда сохраняет одинаковый знак, и не растёт или не уменьшается по абсолютной величине, оставаясь однако всегда меньше определённого конечного числа, то для x = a справа или слева или для* $x = \infty$ *она будет иметь определённый конечный предел* [34, с. 30-31].

После этих теорем Дини даёт строгое определение непрерывной и разрывной функции:

Будем говорить, что она *непрерывна* для $x=a$ или в точке a, если она имеет значение $f(a)$, когда для произвольного сколь угодно малого положительного отличного от нуля σ будет существовать отличное от нуля положительное число ε, что для всех δ, численно меньших чем ε, разность $f(a+\delta)-f(a)$ будет численно меньше, чем σ, или, иными словами, мы говорим, что $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, где имеет значение $f(a)$, и даже при желании (произвольно) разность $f(a+h)$ и $f(a-h)$, где h – положительное, и для $h = 0$ имеем предельное значение $f(a)$, или, наконец, когда величины $f(a+h)-f(a)$ и $f(a-h)-f(a)$ отличаются бесконечно мало вместе с h [34, с. 37].

Будем говорить, что $f(x)$ *разрывна* в $x=a$, если не существует при произвольном положительном σ, соответствующего ε, что для всех значений δ, меньших чем ε, всегда выполняется $f(a+\delta)-f(a)<\sigma$, или, иными словами, мы говорим, что $f(x)$ разрывна в $x=a$, когда значения $f(a+h)$ в $f(x)$ справа от a, и значения $f(a-h)$ в $f(x)$ слева от a, не имеют определённых пределов, равных между собой, или отличаются от значения $f(a)$, которое функция имеет в точке a.

Отметим, однако, что если a лежит на краю интервала (α, β), то, как в случае непрерывности, так и в случае разрыва, нельзя говорить о значении $f(x)$ на краю этого интервала, так как невозможно определить значения $f(a+h)$, $f(a-h)$ и $f(a)$.[34, с. 37-38].

Введём новые различия для разрывов $f(x)$ в точке a.

1. В случае, если точка a не является крайней точкой интервала, и в этой точке имеет место разрыв, для которого функция $f(x)$ имеет значения $f(a+h)$ и $f(a-h)$ справа и слева от a, равные одному и тому же числу A, то непрерывность в этой точке может быть восстановлена, если вместо $f(a)$ взять в качестве значения функции число A, по Риману, *разрыв устраним*, если изменить значение функции в этой точке [34, с. 38].

2. В случае, когда точка *a* разрыва функции $f(x)$ не лежит на краю интервала, и значения $f(x)$ с одной стороны от *a* имеют предел $f(a)$, а с другой стороны не имеют определённого предела, или отличаются от $f(a)$, то будем говорить, что $f(x)$ *непрерывна с одной стороны* (*правой или левой*) *от a*, и *разрывна с другой стороны*, или просто скажем, что $f(x)$ *разрывна или непрерывна с одной стороны от a*[6].

3. Если функция $f(x)$ имеет разрыв по одну сторону от *a*, и этот разрыв такой, что с одной стороны от *a* функция $f(x)$ имеет определённый предел, то будем говорить, что это *обычный разрыв* или *разрыв первого рода*, а если же значения $f(x)$ не имеют определённого предела, разрыв будем называть *разрывом второго рода*; в случае, когда разрыв можно устранить, изменив значение функции в соответствующей точке, это будет обычный разрыв, а если функция $f(x)$ в точке *a*, не лежащей на краю интервала, разрывна, она может быть непрерывна с одной стороны, а с другой стороны иметь обычный разрыв или разрыв второго рода, или, будучи разрывной с обеих сторон от точки *a*, то она может иметь с одной стороны обычный разрыв, а с другой иметь разрыв второго рода, и изменяя значение функции в этой точке, мы можем устранить разрыв по крайней мере, с одной стороны, если это разрыв первого рода, но это невозможно в случае разрыва второго рода [34, с. 39].

Теперь будет полезно сформулировать следующую теорему Вейерштрасса о нижних и верхних пределах (или максимальном и минимальном значении функции) (реальной и всегда конечной) в заданном интервале. Если $f(x)$ задана в произвольном интервале (α, β) (пределы включены), то по теореме § 15 можно сказать, что существует верхний предел λ и нижний предел μ значений функции в этом интервале. Теперь мы утверждаем, что *в этой области есть по крайней мере одна определённая точка* x' (которая может также лежать на краю интервала), *такая, что значения* $f(x)$*, соответствующие окрестности точки* x' (§ 11), *будут сколь угодно близки к верхнему пределу* λ (Вейерштрасс) [34, с. 43].

---

[6] Следует отметить, что теперь у нас есть понятие непрерывной функции в точке *a*, или с одной стороны от этой точки; т. е. во-первых для того случая, когда *y* – это величина, данная для всех значений *x*, в том числе и в интервале $(a, a \pm \varepsilon)$, и справа и слева от *a* (*a* включено), случай (§ 20), где значения y_a в точке $x = a$ совпадают с предельными значениями и справа и слева от *a*, и, во-вторых, для того случая, если только *y*, рассматриваемый как функция от *x*, является непрерывной функцией лишь с одной стороны, с правой или с левой, от *a*. – *примечание Дини*.

Теоремы о функциях, непрерывных в заданном интервале [34, с. 46].

Непрерывными в заданном интервале называются такие функции, которые во всех точках этого интервала (края включены) непрерывны. *Непрерывными вообще* в интервале называются такие функции, которые являются разрывными лишь в конечном числе точек этого интервала, так что удаление этих точек вместе с содержащими их произвольно малыми интервалами, оставляет функцию непрерывной на остальной части интервала.

Теорема Кантора[7]. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна всюду в интервале* (α,β), *взяв любое сколь угодно малое положительное число* σ, *всегда можно разложить весь интервал* (α,β) *на конечное число достаточно малых частичных интервалов, величина которых отлична от нуля, таким образом, чтобы изменение функции в каждом из них было бы меньше* σ [34, с. 47].

Теорема I. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в определённой точке* x', *и определена во множестве точек, для которых* x' *является предельной точкой* (§ 12), *тогда она определена и в точке* x' [34, с. 49].

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в определённом интервале* (α,β) *и определена в точках бесконечного множества G, то она определена во всех точках производного множества G.*

Теорема II. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в некотором интервале* (α,β) *и определена только в точках второго типа множества G, являющихся производными точками, образованными из первого множества, т.е. на полученном множестве* G', *которое содержит все точки отрезка, то она будет определена и в других (остальных) точках* [34, с. 50].

Теорема III. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x', *а в точках, отличных от* x', *кроме произвольно малого количества точек, функция принимает значения A, или принимает числовые значения, которые отличается от A произвольно мало, тогда* $f(x')=A$.[34, с. 50-51].

---

[7] Так называет её Дини, хотя чаще употребляется название теорема Гейне-Кантора, так как она была опубликована впервые в статье Гейне 1872 года[68, с. 188], но Гейне в ней пишет, что теорема принадлежит Кантору. Дини даёт эквивалентную формулировку и собственное доказательство этой теоремы.

Теорема IV. *Если* $f(x)$ *непрерывна в точке* x'*, и при неопределённом приближении x с одной стороны от* x' *она конечна и не превышает A, а с другой стороны от этой точки она конечна и меньше A, тогда в точке* x' *она будет иметь значение A* [34, с. 51].

Теорема V. *Функция* $f(x)$*, которая в заданном интервале* (α,β) *непрерывна и не равна постоянной, достигает в этом интервале своего наибольшего и наименьшего значения. (Вейерштрасс)* [34, с. 51].

Теорема VI. *Если* $f(x)$ *является непрерывной функцией в* (α,β) *и в этом интервале принимает значения, численно меньшие любой данной величины, то в этом интервале существует такая точка x, в которой функция примет значение ноль*[8][34, с. 52].

Теорема VII. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна между* α *и* β *и в этом интервале принимает численные значения, сколь угодно близкие к данному числу A, тогда для определённого значения x из этого интервала она обязательно примет также и значение A* [34, с. 52].

Теорема VIII. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в интервале между* α *и* β (α и β включены) *и в некоторой точке x, равной a, она положительна, а в другой точке x, равной b из того же интервала* (α и β включены), *она отрицательна, то для некоторого значения x между a и b она примет нулевое значение*[9] [34, с. 52].

Теорема IX. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна от* α *до* β *и в обеих точках a и b этого интервала* (α и β включены) *принимает различные значения A* и *B, тогда для одного или более значений x между a и b она принимает некоторое значение C, заключённое между A* и *B* [34, с. 53].

Теорема X. *Если функция* $f(x)$*, непрерывная от* α *до* β, *и в этом интервале хотя бы один раз для определённого значения переменной величины принимает значения между своим максимальным и своим минимальным значением, которые имеются в этом интервале* [34, с. 53].

Теорема XI. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в интервале* (α, β) *и в некоторой окрестности на краю интервала, например, в окрестности* α, *постоянна и равна A, но при этом не равна постоянной на всём интервале*

[8] Эту теорему приводит Гейне в статье 1872 года [68, с. 186]
[9] Теорема Больцано.

(α, β) *и, допустим например, что* α < β, *то внутри этого интервала существует определённая точка* x' *такая, что между* α *и* x' (x' *включено*) *всегда будет* $f(x)=A$, *а для любого интервала* $(x', x'+\varepsilon)$ *справа от* x', *с левой крайней точкой в* x' *всегда найдутся точки* x, *в которых не будет выполняться* $f(x)=A$[34, с. 53].

Георг Кантор высоко ценил этот курс Дини. 28 декабря 1878 года в письме к Дедекинду он писал: «Вы должны несомненно располагать книгой «Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali» (Pisa 1878) Улисса Дини. Этот труд, как мне кажется, выполнен человеком, знающим свой предмет и весьма искусным. При введении чисел он пользуется Вашим методом»[64, с. 350]. В 1879 году Кантор писал: «В недавно появившемся труде Дини мы находим понятие производного множества развитым ещё далее тем, что он взял его за исходный пункт ряда замечательных обобщений известных аналитических предложений [64, с. 40].

Литература

Труды Улисса Дини.

1. Dini U. Sull'equazione differenziale delle superficie applicabili su di una superficie data. « Giorn. Di Mat », II (1864) p. 282-288.
2. Sulla superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante. «Ann. di Mat.», [1], VII (1865) p. 5-18.
3. Sopra alcuni punti della teoria delle superficie applicabili. Ivi, p. 25-47.
4. Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei raggi di curvatura principale e una funzione dell'altro. Ivi, p. 205-210.
5. Sur les surfaces à courbure constante négative et les surfaces applicables sur les surfaces à aire minima. « C. R. Acad. Sciences ». Paris, LX (1865), p. 340-341.
6. Sur les surfaces gauches qui peuvent etre représentées par des équations à differences partielles du second ordre. Id., LXI (1865), pag. 1001-1004.
7. Sulla teoria delle superficie. « Giorn. Di Mat. », III (1865), p. 65-81.
8. Sulle superficie di curvatura costante. Ivi, p. 240-256.
9. Su alcune proprietà delle superficie rigate. Ivi, p. 281-297.
10. Sulle superficie gobbe che possono essererappre sentiate da un' equazione data a derivate parziali del second'ordine e applicazione alla ricerca di quelle i cui raggi di curvatura ρ, ρ' verificano una delle relaztoiti $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=m, \rho=m, \rho+\rho'=2m,\ \rho-\rho'=2m,$ essendo *m* una costante. Ivi, p. 321-337.
11. Sulle superficie gobbe applicabili su quelle di rivoluziotie e su alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali di una curva, Id., IV, (1866) p. 298-304.
12. Sulle superficie gobbe che soddisfano a date equazioni alle derivate parziali del second' ordine. Ivi, p. 305-318.
13. Memoria sulla serie a termini positivi. «Ann. Univ. Toscane », IX ii (1867) p. 41-76.
14. Nota sulla Memoria precedente. 77-80.

15. Stille superficie le quali hanno le linee di curvatura piane. «Ann. di Matem. » [2], I, p. (1867-68) 146-154.
16. Sulla serie a termini positivi. « Giorn. di Mat. », VI (1868), p. 166-174.
17. Sopra alcuni punti della teoria delle superficie. « Mem. d. Soc. Ital. di Scienze», I, Parte II (1868), p. 17-92.
18. Sui prodotti infiniti « Ann. di Mat. » [2], II (1868-69), P- 28-38.
19. Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane. « Ann. d. Univ. Toscane », XI (1869), Parte II, p. 5-43.
20. Sopra alcune formule di geometria sferoidica. Ivi, p. 79-91.
21. Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un' altra. « Ann. Di Mat. » [2], III (1869-70), p. 269-293.
22. Ricerche sopra la teoria delle superficie. « Mem. d. Soc. Ital. Scienze ». Ser. Ili, II (1869-70), p. 1-71.
23. Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche. Ivi, p. 135-151.
24. Sopra le funzioni di una variabile complessa. «Ann. di Matem. [2] IV (1870-71),
P. 159-174-
25. Sopra alcune formule generali della teoria delle superficie e loro applicazioni. Ivi, p. 175-206.
26. Sull' integrazione dell'equazione $\Delta^2 u = 0$. Ivi, V (1871-73), p. 305-345.
27. Sopra le funzioni sferiche. Ivi, VI, (1873-75). P. 112-140, 208-215.
28. Sulla unicità degli sviluppi delle funzioni di una variabile in serie di funzioni X. Appendice alla Memoria precedente. Ivi, p. 216- 225.
29. Sopra la serie di Fourier. « Ann. d. Univ. Toscane », XIV (1874), Parte II, p. 161- 176.
30. Sulle funzioni potenziali dell'ellisse e dell'ellissoide. «Atti Acc. Lincei» (2), II (1875), p. 689-707.
31. Sopra una funzione analoga a quella di Green. Id., Ili (1876), p. 129-137.
32. Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata. « Ann. Di Mat. [2] Vili (1877), p. 121-137.
33. Sulla rappresentazione di una superficie su di un'altra. Ivi, p. 161 -186.
34. Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali. Pisa, tip. Nistri, 1878. Un voi. -8°, p. VIII+407. Электронный ресурс
http://archive.org/stream/fondamentiperla00dinigoog#page/n7/mode/2up

35. Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in certi intervalli. « Ann. d. Univ. Toscane », XVII (1880), Parte II, p. 3-231.
36. Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale. Pisa, tip. Nistri, 1880. Un voi. In -8% p. IV + 328.
37. Intorno agli sviluppi delle funzioni di una variabile reale per serie di funzioni Jacobiane. « Ann. di Mat. » [2] X (1880), p. 145-153.
38. Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa. «Collectanea mathematica in mem. D. Chelini». Mediolani, 1881. p. 258-276.
39. Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen relleen Grösse. Mit. Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp, Un voi. in-8°, p. XVIII-554 Leipzig, 1892.
40. Necrologia del Prof. Enrico Betti. Annuario della R. Universita di Pisa 1892-23.
4l. Sulle equazioni alle derivate parziali di second' ordine. «Atti. Acc. Lincei [2], V (1896)
P- 381-392, 421-433 e VI (1897) p.5-16, 45-48.
42. Una applicazioiie notevole della teoria dei residui nelle funzioni di variabile complessa. «Atti. Lincei» [5], II (1897), p. 495-545.
43. Un'applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa. « Ann. di Mat.» [3], I (1893), p. 39-76.
44. Un teorema sui limiti superiori ed inferiori dei moduli delle radici di un' equazione

algebrica. Ivi, p. 77-82.
45. Studi sulle equazioni differenziali lineari. Id., II (1898), p. 297-324.
46. Studi sulle equazioni differenziali lineari. Id., Ili (1899), p. 125-184.
47. Sulle equazioni alle derivate parziali di second' ordine. « Mem. Lincei » [5] III p. 33-104.
48. Eugenio Beltrami. « Ann. di Mat. » [3] IV (1900) p. 151-160.
49. Commemorazione del socio straniero Carlo Hermite. « Rend. Acc. Lincei » [5] X (1901) p. 84-88.
50. Sopra una classe di equazioni a derivate parziali del second' ordine con un numero qualunque di variabili. « Mem. Acc. Lincei » [5] IV (1901), p. 121-178.
5l. Sopra una classe di equazioni a derivale parziali del second' ordine. Ivi, p. 431-467.
52. Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivees parlielles du second ordre. « Acta mathematica», XXV (1901), p. 185-230.
53. Sugli integrali multipli in generale e su quelli che valgono per la rappresentazione analitica delle funzioni di pili variabili. « Rend. Circolo Mat. Palermo » XVIII (1904) p. 318-359,
54. Studi sull`equazioni differenziali lineari. «Ami. di Mat.» [3], XI (1904), p. 285-335.
55. Studi sulle equazione differenziali lineari (loro integrali normali), id. XII (1905) p. 179- 262.
56. Lezioni di analisi infinitesimale, due voi. -8°, p. CI +720+483. Pisa, Succ. Nistri, 1907-1915.
57. Studi sulle equazioni differenziali lineari in relazione ai loro integrali normali pel caso di alcune equazioni di second' ordine. Polinomi integrali. Id. XVIII (1911) p. 135-183.
58. Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale data arbitrariamente in un certo intervallo. Lezioni date nella R. Universita di Pisa (in vari anni scolastici). Un voi. p. 480 (autografate). Pisa, Succ. Nistri, 1911.
59. Lezioni sulla teoria delle funzioni sferiche e delle funzioni di Bessel. Un voi. (autografato). Pisa, Cesari, 1912.
60. Il problema di Dirichlet in una area anulare e nello spazio compreso fra due sfere concentriche. «Rend. Circolo Mat. Palermo», XXXVI (1913) p. 1-28.
61. Sugli sviluppi in serie $\frac{1}{2}a_0+\sum_1^{\infty}(a_n \cos\lambda_n z+b_n \sin\lambda_n z)$ dove le λ_n sono le radici dell'equazione trascendente $F(z)\cos\pi z+F_1(z)\sin\pi z=0$ « Ann.di Mat.» [3] XXVI (1917) P. 261-284.
62. [Memoria postuma]. Sul calcolo d'approssimazione degli integrali definiti. Id. XXVIII (1919) p. 61-94.

Литература к статье

63. Дедекинд, Р. Непрерывность и иррациональные числа / Р. Дедекинд. Пер. с нем. С.О. Шатуновского. Одесса, – 1923, – 4 изд. – 44 с.

64. Кантор, Г. Труды по теории множеств / Г. Кантор. – М.: 1985. –485 с.

65. Полищук, Е. М. Вито Вольтерра (1860-1940) / Е.М. Полищук. Л.: Наука. – 1977. – 114 с.

66. Bianchi L. Commemorazione del socio Ulisse Dini / L. Bianchi //*Atti della Reale Accademia dei Lincei*. – 1919. – 28 – P.154–163.

67. Ford, W. D. A Brief Account of the Life and Work of the Late Professor Ulisse Dini / W. B. Ford // Bull. Amar. Math. Soc. Vol. XXVI. – 1920. – P. 178–177.

68. Heine, E. Die Elemente der Functionenlehre / E. Heine // J. reine angew. Math. 74 (1872) 172-188.

69. Loria, G. Uliss Dini / G. Loria // Gli scienziati italliani dall`inizio del Midio evo ai nostril giorni. – Repertorio bibliographical diretto da Aldo Mieli. Roma. – 1921. – v. I. – parte 1. – 488 p. – p. 137-150.
http://archive.org/stream/gliscienziatiita01mieluoft#page/136/mode/2up