Генрих Эдуард Гейне. Теория функций.

Г.И. Синкевич

СПбГАСУ.

Опубликовано: Синкевич Г.И. Генрих Эдуард Гейне. Теория функций //Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера/ СПбГАСУ. – СПб. – 2012. – С. 6 – 26.

Генрих Эдуард Гейне (1821-1881) – немецкий математик, член-корреспондент Берлинской Академии наук, член Геттингенского научного общества. Коллега и во многом соратник Кантора. Представитель школы Вейерштрасса. Основные работы Гейне написаны в области теории потенциала, теории функций и теории дифференциальных уравнений. Иллюстрация 1. Портрет Гейне.

Генрих Эдуард Симон Гейне[1] родился в Берлине 15 марта 1821 в семье торговца и банкира Карла Генриха Гейне и Генриэтты Мартен, был восьмым из девятерых детей. Семья Гейне была в родстве с семьёй Мендельсон-Бартольди [1]. Таким образом, Гейне в 1831 стал родственником Петера Лежёна-Дирихле, женившегося на сестре композитора Феликса Мендельсона, Ребекке. Сам Гейне часто упоминал, что является двоюродным братом поэта Генриха Гейне (1797-1856), но по данным Института Генриха Гейне в Дюссельдорфе, это не так. В 1825 был окрещён в лютеранство. Сначала получал домашнее обучение, затем учился в гимназии Friedrichswerdersche, а потом в гимназии Köllnische в Берлине, где уровень преподавания математики и естественных наук был выше, и которую закончил в 1838 году.

Осенью того же года Гейне поступил в университет Гумбольда в Берлине. После одного семестра в Берлине он в течение трёх

[1] Биографический материал изложен по статье [2].

семестров учился в университете Геттингена, где в течение трёх семестров слушал лекции К.Гаусса (1777-1855) и М.А.Штерна (1807-1894) по теории чисел. Вернувшись в университет Берлина в 1840, Гейне слушал лекции П.Лежён-Дирихле (1805-1859), лекции по геометрии Я.Штейнера (1796-1863) и по астрономии Иоганна Франца Энке (1791-1865), директора обсерватории. Ещё студентом он заинтересовался исследованиями К.Вейерштрасса (1815-1897), Э.Куммера (1810-1893), Л.Кронекера (1823-1891) и К.Борхардта (1817-1880), в течение всей жизни поддерживал контакты с этими математиками, неоднократно приезжая в Берлин. В 1842 закончил университет в Берлине, выполнив научную работу под руководством Лежена-Дирихле. 30 апреля 1842 года Гейне представил свою диссертацию «О некоторых дифференциальных уравнениях» (De aequationibus nonnullis differentialibus). Экспертами были Э.Дирксен (1788-1850) и М.Ом (1792-1872).

Он называл своим учителем Лежена-Дирихле, заинтересовавшим его вопросами анализа. Общение с Леженом-Дирихле и другими математиками Берлина, прежде всего с Вейерштрассом, Куммером и Кроненекером сформировали направление его исследований.

После 1842 он провёл год (два семестра) в Альбертине в Кёнигсберге под руководством К.Якоби (1804-1851) и физика-теоретика Ф.Нойманна (1798-1895), участвуя в работе математического семинара вместе с Г.Кирхгофом (1824-1887), З.Аронхольдом (1819-1884) и Ф.Зейделем (1821-1896). Лекции читались не только на немецком, но и на английском и испанском языках. Иллюстрация 2. Титульная страница конспекта Гейне лекций по дифференциальным уравнениям, связанным с задачами механики. Этот курс был прочитан К.Якоби и Ф.Нойманном в зимнем семестре 1842/1843. В 1843 году в журнале Крелле выходит его первая статья «О некоторых задачах, приводящих к уравнениям в частных производных» [3].

С 20 июля 1844 года Гейне работает приват-доцентом (т.е.внештатным преподавателем, как кандидат) в университете Бонна[2].

В 1845 году выходит его работа «К теории притяжения и тепла» [4]. Теория конического маятника или движения тяжёлой точки на

---

[2] Ни экземпляра его диссертации, ни отзывов и документов, связанных с оформлением доцентуры, в архивах университета Бонна не сохранилось.

сфере приводит к приложениям уравнения Ламе. В этой работе Гейне одновременно с Ж.Лиувиллем (1809-1882), работавшим в Париже, установил связь между ньютоновским потенциалом и эллиптическими интегралами, определил второе независимое решение дифференциального уравнения Ламе, т.е. ввёл функции Ламе второго рода.

Позже Гейне обращался к этой теме, исследования в области уравнений Ламе продолжены Пикаром и Эрмитом.

Начиная с 1846 года под влиянием Дирихле Гейне начинает писать о суммировании рядов, причём статьи носят характер переписки с Дирихле [5].

К влиянию Якоби можно можно отнести интерес Гейне к преобразованию рядов в непрерывные дроби [6].

В 1848 году Гейне стал экстраординарным профессором в Бонне.

В 1850 году Гейне женился на Софи Вольф, дочери берлинского купца. В счастливом браке родились четыре дочери и сын. Младшая дочь, Ансельма (Сельма) Гейне (1855-1930), стала писательницей (псевдоним Feodor Helm) и опубликовала воспоминания об отце (1930). В 1905 она написала роман «Мать», посвящённый эмансипации женщин.

В Бонне Гейне пишет работы по исследованию рядов [7], «Очерки теории эллиптических функций»[8], о работе Гаусса 1811, в которой рассматривается сходимость тригонометрических рядов и рядов с дробно-рациональными членами «Суммирование некоторых особых рядов» [9].

В 1851 году выходит его статья «Теория притяжения эллипсоидов»[10]. В 1853 работа о разложении алгебраических функций в ряды Эйзенштейна [11].

В 1854 году Гейне публикует четыре работы: Исследование интегральной функции [12], Дальнейшее исследование интегральной функции[13], О разложении корней алгебраического уравнения в степенной ряд [14], Потенциал круглого диска. Отчёт Королевской Прусской Академии наук в Берлине[15].

В 1855 году выходят дополнения к отчёту о потенциале круглого диска [16], и Прямое доказательство равенства двух определённых интегралов [17].

Таким образом, Гейне уже имел солидную базу по исследованию дифференциальных уравнений в частных производных, теории тепла, суммированию рядов, исследованию непрерывных дробей и эллиптических функций.

6 сентября 1856 года Гейне назначен ординарным профессором университета Галле, в котором он проработал в течение 20 лет как исследователь и педагог. Семья переезжает в Галле. Иллюстрация 3 и 4. Университет в Галле.

Гейне вёл курсы по теории потенциала и её приложениям, по рядам Фурье и тригонометрическим рядам, по механике и теории теплоты. Его студент Вангерин (Wangerin Albert, 1844-1933), поступивший в университет Галле в 1862, писал, что Гейне был очень хорошим преподавателем, его лекции отличала чёткость и результативность. Он всегда указывал студентам, что недостаточно читать учебники и пособия, нужно обращаться к первоисточникам.

В Галле Гейне занимался преимущественно теорией потенциала, теорией функций и дифференциальными уравнениями. Среди опубликованных им работ многие имеют методический характер, это курсы лекций по различным разделам. Все они носят отпечаток школы Вейерштрасса, представителем которой был Гейне. За годы работы в университете Гейне прочитал лекции по следующим курсам: алгебра и теория чисел, аналитическая механика, теория потенциала с приложениями, алгебраический анализ, теория чисел, алгебра и теория чисел, определённые интегралы, ряд Фурье, тригонометрические ряды, теория тепла.

В Галле он пишет «Переход от неопределённого интеграла к определённому»[18], «Сведение эллиптических интегралов к канонической форме»[19], «Письмо в редакцию о непрерывных дробях»[20], «Комментарии к трактату Якоби по вариационному исчислению» [21], «Формула инверсии Лагранжа»[22], «О биномиальном ряде»[23], «Письмо в редакцию о функциях Ламе»[24], «Некоторые свойства функций Ламе»[25], «О числителе и знаменателе приближённых значений непрерывных дробей»[26].

В 1861 в Берлине выходит его книга «Справочник по сферическим гармоникам» [27], расширенное переиздание в 1878, 1881 (количество страниц составило 864 в двух томах), переиздано в 1961 гг. Здесь он предлагает новый термин «цилиндрическая функция». Образцовое изложение и систематизация материала на многие годы сделала справочник основным в этой области.

В 1863 г. Гейне избирают членом-корреспондентом Берлинской академии наук и членом Геттингенского научного общества.

Его работы этих лет: «Функции Ламе различных порядков»[28], «Теоремы Абеля»[29], «О некоторых определённых интегралах»[30], «Специальные функции Ламе первого рода произвольного порядка» [31], «О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка и о существовании и числе функций Ламе первого рода» [32].

В 1864/65 годах (с 12.07.1864 по 12.07.1865) Гейне становится ректором университета в Галле. Его инаугурационная речь посвящена законам Ньютона [33]. Семья покупает собственный дом по адресу Ecke Luisenstraße 1.

Публикуемые им работы имеют как исследовательскую, так и методическую направленность. Его исследования способствовали его преподавательской деятельности, лекции его были интересны и понятны студентам. Понятия предела, непрерывности и сходимости сопровождались неясностями даже для исследователей, а для студентов и вовсе были окружены туманом. Эти понятия доступно объяснял Вейерштрасс на языке «ε - δ», и Гейне на языке подпоследовательностей (фундаментальных последовательностей).

Гейне продолжает работать над проблемами анализа. Он занимался тригонометрическими рядами и чувствовал необходимость более глубокого анализа структуры числовой прямой и понятия непрерывности. Начиная с 1870 года Гейне размышляет о сходимости рядов и об ослаблении степени общности, что привело его к введению понятия равномерной сходимости на компакте. Это отражено и в его последующих работах: «О непрерывных дробях»[34], «Сообщение о непрерывных дробях»[35], «Геометрический смысл сферических гармоник»[36], «Функции Фурье-Бесселя»[37], «О тригонометрических рядах» [38], где ради теоремы о единственности представления функции тригонометрическим рядом исследуется равномерная сходимость рядов Фурье в том виде, как её определил Коши. Как отмечает Медведев, «Одним из интересных аспектов этой статьи Гейне является сознательно выставленный им принцип пренебрежения точечными множествами при рассмотрении различных вопросов анализа. Правда, он пренебрегал только конечными множествами, но сам принцип понимал достаточно широко. Так, вслед за определением равномерной сходимости Гейне ввёл понятие «вообще равномерно сходящегося ряда», т.е. такого ряда, который сходится на [α,β], если из [α,β] выбросить произвольно малые окрестности конечного числа точек (стр. 356); говорил он о «вообще непрерывной функции» (стр.355); три основные свои теоремы он сформулировал и доказал при соблюдении того же принципа; поведение ряда в критических точках его не интересовало, и он прямо указывал на это (стр. 356)»[39, с.83-84].

В последующих работах Гейне продолжает попытки подвести прочный фундамент под теорию: «Переписка по вариационному исчислению»[40], «О некоторых условиях при доказательстве принципа Дирихле» [41], и эта же статья с дополнениями [42].

Большой заслугой Гейне было привлечение к работе в Галле Георга Кантора, который в 1867 году закончил Берлинский университет, и под руководством Куммера защитил диссертацию «О неопределённых уравнениях второй степени» («De aequationibus secundi gradus indeterminatis»). Первые интересы Кантора лежали в области теории чисел. Кантор начал преподавать в гимназии Фридриха-Вильгельма для девочек в Берлине. В 1869 году под руководством Гейне Кантор написал работу на право чтения лекций в Галле «О преобразовании тернарных квадратичных форм» - по теории чисел. Вопрос о переезде в небольшой город смущал Кантора, он советовался с сестрой Софией в письме от 7 февраля 1869 года:

«Чем больше я смотрю на свою математику, тем больше я вижу, что она для моего сердца и ума ведёт меня к счастью и удаче. Работа была и будет для меня подлинным смыслом моей жизни и моего желания, наполненным физическим ощущением, и чувством удовлетворения, в ней я чувствую, что свободен в своей деятельности и в отношении приносимой пользы обществу, этой приятной возможности. Полагаю, что эта надежда прежде всего связана с Галле, там меня ожидает настоящее целостное поле деятельности, соответствующее моей работе, возможно, там я получу признание и мои стремления найдут применение»[43].

В 1869 году Кантор получил звание приват-доцента университета Галле и стал преподавателем математического семинара факультета искусств. Кантор проработал в этом университете всю жизнь. С 1872 по 1877 – экстраординарным профессором факультета естественной и общественной истории. С 1877 по 1913 - в должности ординарного профессора.

Гейне заинтересовал Кантора вопросами анализа, в частности, вопросами сходимости. Их совместные беседы, начавшееся знакомство Кантора с Дедекиндом (начало 1870-х гг.), привели каждого из них к необходимости арифметизации континуума, созданию теории действительного числа, и подвели Кантора к созданию теории множеств.

Понятие непрерывности функции требовало формального определения действительного числа.

Кантор в 1870 доказал, что для функции, непрерывной на интервале, единственно её представление тригонометрическим рядом. Этот результат Кантор распространил на функции, имеющие конечное число точек разрыва. Но распределение этих точек на отрезке (континууме) должно быть исследовано более детально. С 1872 Кантор рассматривает соотношение точек на континууме. Он принимает как аксиому, что всякой точке оси соответствует некоторое число, которое он назвал действительным. Иллюстрация 5 Портрет Кантора.

Новые перспективы открылись перед Кантором во многом благодаря Эдуарду Гейне. Под влиянием Эдуарда Гейне, друга и коллеги, как называл его сам Кантор, интересы Кантора сместились в область теории функций действительного переменного. Он написал несколько работ по этой теме. Таким образом, в его арсенале накапливались методы теории чисел, теории тригонометрических рядов, ТФКП и геометрии. И, разумеется, широте его подхода к новой тематике способствовала его гуманитарная культура, знание музыки и философии.

Летом Георг Кантор ездил отдыхать в Альпы. Он бывал там 17-18 летним и став взрослым, охотно ездил туда на летний отдых, в Интерлакен и Гарц (Ханенклее). В начале 1870-х Кантор познакомился в Интерлакене с Дедекиндом. Их переписка о непрерывности и иррациональных числах началась в апреле 1872. К этому времени Дедекинд уже размышлял над определением понятия числа с помощью теоретико-множественных воззрений. В 1871 году Дедекинд вводит в алгебру новые понятия: кольца, идеалы и модули. Это было сделано в предисловии к работе Дирихле. Сотрудничая с Кронекером, Дедекинд создаёт общую теорию делимости. Илл. 6 Портрет Дедекинда.

Кантор продолжает размышлять о структуре числовой величины. Он ещё не сформировал свою терминологию «множество», «счётность», «мощность», но рассматривает взаимно-однозначное соответствие между числовыми последовательностями как основное понятие. В 1873 он пишет Дедекинду о своей попытке установить такое соответствие между целыми положительными и действительными числами [44, с.327-328], хотя отмечает, что этот вопрос не имеет практического интереса.

Рассуждения и переписка с Кантора с Дедекиндом оформились в построение, которое высоко оценил Вейерштрасс, навестивший в Берлине Кантора 23 декабря 1873 года, и рекомендовавшего опубликовать его [44, с.331].

Оценка Кантором значимости своих работ постепенно повышается. Он пишет Дедекинду: «Мы в одинаковой мере заботимся о развитии науки ко всеобщему благу [44, с.331]». Здесь же он отмечает, что ограниченный характер последней статьи продиктован условиями, сложившимися в математическом сообществе. (Ограниченность состоит в том, что Кантор рассматривал в качестве иррациональных только алгебраические числа).

Эта работа Кантора вышла в 1874 году «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел»(«Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen»)[44, с.18-21, пер. Ф.А.Медведева]. В ней Кантор рассматривает совокупность корней алгебраических уравнений и взаимно-однозначное соответствие между ними и целыми положительными числами. Понятие взаимно-однозначного соответствия (а потом и непрерывного соответствия), Кантор сделал основным в дальнейшем определении числа.

Рихард Дедекинд с 1858 года также размышлял над определением действительного числа, но ничего не публиковал до 1872 года, когда появились работы Кантора и Гейне.

В 1872 году вышла работа Гейне «Лекции по теории функций» (Основания обучения функции) [45], в которой он вводит понятие равномерной сходимости. Эту статью мы публикуем впервые на русском языке в приложении к данной статье. Она была первой, содержащей систематическое изложение анализа с позиции действительного числа. Об этой работе мы скажем ниже.

В 1873 году Гейне пишет «Потенциал однородных групп»[46].

В 1875 году «О постоянном электрическом токе в плоских пластинках», повторно опубликовано в ежемесячном отчёте Королевской Прусской академии [47]. Это был год, когда Гейне хотел перейти в университет Геттингена, но профессора отвергли его.

В 1876 году «Письмо в редакцию журнала Лиувилля» [48].

В 1877 году в связи с празднованием столетия Гаусса, Гейне был награждён медалью Гаусса.

В 1880 году «Некоторые приложения расчётов Коши»[49].

В 1881 году «О сферической функции $P_n(\cos y)$ при бесконечном *n»* [50].

Все годы своей работы в университете Гейне был популярен среди студентов, стимулируя своих слушателей к продолжению научной работы. Он был непременным и добросовестным членом высшей экзаменационной комиссии, проявляя к кандидатам симпатию и дружелюбие. Гейне руководил докторскими Генриха Цуге (Züge) 1875 «О притяжении однородного эллипсоида», Карла Баера (Baer, Karl) «Равновесие и движение тепла в однородном параболоиде вращения». Он делал первоначальные доклады на защите (абилитации) в 1858 (Карл Нойман), 1863 (Густав Роха), 1867 (Герман Шварц), 1867 (Иоганн Томе), 1869 (Георг Кантор и Энно Юргенс, преподавал в Галле до 1883), 1881 (Вильтайс (Wiltheiss)).

Гейне умер в Галле после тяжёлой болезни 21 октября 1881 года.

Развитие понятия непрерывности и теории функций в XIX веке.

Ощущение нового понимания действительного числа, континуума и непрерывности витало в математической атмосфере XIX века. Начиная с 1822 года в работах Фурье возникла проблема сходимости тригонометрического ряда и единственности разложения функции в ряд. В 1829 году Лежен-Дирихле сформулировал условия сходимости тригонометрических рядов. Но прикладные задачи требовали расширения класса функций, разложимых в ряд Фурье, а следовательно, анализа числового интервала, развития понятия числа и непрерывности.

По Больцано, 1817, функция $f(x)$ изменяется по закону непрерывности, для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, разность $f(x+\omega)-f(x)$ может быть сделана меньше чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим.

По Коши, 1821 г., функция непрерывна, если для каждого значения x разность $f(x+\alpha)-f(x)$ неограниченно уменьшается вместе с уменьшением числового значения α. Иными словами, функция остаётся непрерывной относительно x между данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции.

В 1823 году Коши издаёт «Конспект лекций по исчислению бесконечно малых» (Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal, Oeuvres ser.2, IV, p. 17 – 20), где даёт следующее определение непрерывной функции: «Для функции $f(x)$, принимающей единственным образом конечные значения для всех x, содержащихся между двумя данными пределами, разность $f(x+i)-f(x)$ будет всегда между этими пределами бесконечно малой, т.е. $f(x)$ есть непрерывная функция в тех пределах, в которых она изменяется. Ещё говорят, что в окрестности какого-либо частного значения переменной x функция $f(x)$ всегда является непрерывной функцией этой переменной, если она непрерывна между двумя, даже весьма близкими, пределами, содержащими эту данную точку».

С 1858 Дедекинд размышляет об определении действительного числа как сечения, но ничего не публикует. Вейерштрасс читает лекции в Берлинском университете, используя понятие равномерной сходимости (конвергенции почти всюду), но тоже долго ничего не публикует.

По Вейерштрассу, 1861, если $f(x)$ есть функция x и x – определённое значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$; разность $f(x+h)-f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x+h$. Если возможно определить для h такую границу δ, что для *всех* значений h, по абсолютному значению ещё меньших, чем δ, $f(x+h)-f(x)$ становится меньше, чем какая-либо сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции. Ибо говорят, что некоторая величина может стать бесконечно малой, если её абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она – непрерывная функция аргумента или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом.

Теорему о том, что всякая непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём, доказал Дирихле в своих лекциях 1862 года, но они были опубликованы лишь в 1904 году. При этом Дирихле неявно использовал тот факт, что если отрезок покрыт бесконечным числом интервалов, то среди них можно выбрать конечное число, также покрывающее данный отрезок. Гейне, ученик Дирихле, несомненно, знал это.

Начиная с Шарля Мере, 1869, иррациональные числа понимались как пределы последовательностей рациональных чисел, причём Мере вводил их как некое фиктивное понятие[3]. Иллюстрация 7 Портрет Шарля Мере. В 1872 году выходит книга Шарля Мере, содержащая результаты его исследований предыдущих лет «Новый точный анализ бесконечно малых»[51]. Он пишет: «1.Мы будем называть вариантами различные числа (натуральные или дробные, положительные или отрицательные) $v_{m,n,\ldots}$, значение которых зависит от натуральных чисел $m,n,\ldots$, принимающие все положительные комбинации значений, которые мы будем называть её показателем. 2. Если существует число V, такое, что можно выбрать $m,n,\ldots$ достаточно большим, чтобы разность V-$v_{m,n,\ldots}$ была бы по абсолютной величине меньше произвольного числа для некоторых значений индексов и для всех бóльших величин, тогда мы скажем, что вариант $v_{m,n,\ldots}$ стремится или сходится к пределу V. Если V=0, вариант $v_{m,n,\ldots}$ называется бесконечно малой величиной, как например, разница между вариантом и его пределом»[51, с.1-2].

Остановимся подробнее на статье Гейне «Лекции по теории функций»[44], в которой содержатся два его знаменитых результата: теорема о равномерной непрерывности, носящая имя Кантора-Гейне, и теорема о покрытиях, носящая имя леммы Гейне-Бореля (Борель строго доказал её в 1895 году). Статья представляет изложение основ теории функций в традициях Вейерштрасса, но с введением нового

[3] Заметим, что в эти же годы Кронекер, отвергал в анализе любые попытки создания новых объектов с помощью предельных построений.

понятия действительного числа, иррационального числа и непрерывности. Это конспект лекций, которые Гейне читал своим студентам.

По Гейне, 1872, функция $f(x)$, определённая на интервале (a,b), непрерывна в точке x_0 этого интервала, если для каждой последовательности x_n чисел интервала (a,b), формула $lim\ x_n= x_0$ при n, устремлённом к бесконечности, влечёт за собой формулу $lim\ f(x_n)=f(x_0)$.

Иррациональные числа Гейне тоже определяет через последовательности: «Я называю числовой последовательностью числа $\grave{a}_1,\grave{a}_2,...,\grave{a}_n,..$, если для любого данного числа η, отличного от нуля и достаточно малого, существует значение n такое, что $a_n - a_{n+v}$ для любого положительного натурального v будет меньше, чем η. Слово «число» без дополнительных оговорок уже употребляется для рациональных чисел. Ноль будет рассматриваться как рациональное число. Любую числовую последовательность, в которой a_n с возрастанием индекса n будут меньше, чем данная величина, я буду называть элементарным рядом»[45].

Понятие непрерывности функции требовало арифметизации континуума, определения действительного числа.

Кантор в 1870 доказал, что для функции, непрерывной на интервале, единственно её представление тригонометрическим рядом. Этот результат Кантор распространил на функции, имеющие конечное число точек разрыва. Но распределение этих точек на отрезке (континууме) должно быть исследовано более детально. С 1872 Кантор рассматривает соотношение точек на континууме. Он принимает как аксиому, что всякой точке оси соответствует некоторое число, которое он назвал действительным.

Статья Гейне «Лекции по теории функций»[45] вышла с результатами, очень близкими к результатам Кантора в статье того же года. Как пишет Ф.А.Медведев [44, с.412-413], «Гейне во введении к ней писал, что та часть его работы, в которой излагается теория действительных чисел, завершена уже давно и что её содержание подсказано соображениями других математиков, особенно Вейерштрасса, ставшими известными Гейне главным образом из устных сообщений. И лишь после этого он продолжил: «Особой благодарностью я обязан г-ну Кантору из Галле за его устные сообщения, которые оказали значительное влияние на форму моей работы тем, что я заимствовал у него соображения о способе введения произвольных чисел при помощи тех особенно удобных последовательностей, которые здесь названы числовыми последовательностями». С другой стороны, уже после смерти Гейне, в 1886 году, Кантор в письме к Виванти писал: «В теории иррациональных числовых величин я воспользовался особыми актуально бесконечными множествами рациональных чисел, которые я называю фундаментальными последовательностями. Г-н Э.Гейне следовал в этом за мной (Crelles J., BD 74,s 172). Его изложение отличается от моего лишь в способе выражения, по существу же оно совпадает с моим». [44, с.297]. Эта статья содержит теорему, называемую ныне теоремой Гейне-Кантора. Обе работы – и Гейне и Кантора – вышли в 1872 году.

Работа Кантора называлась «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов»(«Über die Ausdehnung einer Satzes aus Theorie der trigonometrischen Reinen [44, с.9-17, пер. Ф.А.Медведева], и была его первой работой, посвящённой тригонометрическим рядам, но в ней был анализ понятия числовой величины как предела фундаментальных последовательностей, введено понятие предельной точки (точки сгущения). В связи с проблемой сходимости рядов Кантор оценивает бесконечное множество точек и вводит арифметическую теорию иррациональных чисел через последовательности рациональных чисел $\grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots, \grave{a}_n, ..$ подчинённую тому условию, что для любого положительного ε все её элементы за исключением не более чем конечного количества чисел отличаются друг от друга не более чем на ε, т.е. существует натуральное n_1 такое, что при всех $n > n_1$ и для любого m будет выполняться $|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon$ (Кантор называет его фундаментальным условием, оно называется условие Коши). Кантор начинает с усиления утверждения, что если последовательность удовлетворяет этому условию, тогда «имеется определённый предел *a*», или число *a* ассоциировано с последовательностью, т.е. иррациональные числа идентифицированы фундаментальными последовательностями. Две таких последовательности a_n и b_n определяют одно и то же иррациональное число, если $|a_n - b_n| \to 0$.

Если для любого данного иррационального числа и для достаточно большого *n* члены последовательности будут меньше по абсолютной величине любого данного числа, тогда $a=0$. Если все они больше, чем некоторое определённое положительное рациональное число, тогда *a*>0. Если все они меньше, чем некоторое определённое отрицательное число, тогда *a*<0. Основные операции распространяются на новую систему, подчиняясь тому, что если $a = a_n$ и $b = b_n$ - две фундаментальные последовательности, тогда $a_n + b_n$ и $a_n \cdot b_n$ определяют *a+b* и *ab*.

Если b_n - фундаментальная последовательность иррациональных чисел, тогда существует только одно иррациональное число *a*, определяемое последовательностью рациональных a_n, таких, что $b_n \to a$. Фундаментальная последовательность позволяет избежать введения новых типов чисел, т.е. иррациональные числа образуют полную систему. «Рациональные числа образуют основу для определения более общего понятия числовой величины. Когда я говорю о числовой величине в обобщённом смысле, то это происходит прежде всего в том случае, когда предложена бесконечная последовательность рациональных чисел $\grave{a}_1, \grave{a}_2, ..., \grave{a}_n, ..$(1), заданная при помощи некоторого закона и обладающая тем свойством, что разность $a_{n+m} - a_n$ становится бесконечно малой при возрастании *n*, каково бы ни было целое положительное *m*, или, другими словами, что для произвольно выбранного (положительного рационального) ε существует такое целое число n_1, что $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ при $n \geq n_1$ и *m* – любое положительное целое число.

Это свойство последовательности (1) я выражаю словами: «последовательность (1) имеет определённый предел *b*»… Различным таким последовательностям должны соответствовать и разные знаки *b,b',b''*,…

Если задана другая последовательность $a_1', a_2', a_3', ...$(1'), имеющая определённый предел b', то оказывается, что обе последовательности, (1) и (1') всегда находятся в одном из следующих соотногшений, исключающих друг друга: 1) $a_n - a_n'$ становится бесконечно малой при возрастании *n*, 2) $a_n - a_n'$ начиная с определённого *n* всегда остаётся больше некоторой положительной (рациональной) величины ε, 3) $a_n - a_n'$ начиная с определённого *n* всегда остаётся меньше некоторой отрицательной (рациональной) величины –ε.

Если имеет место первое отношение, то я полагаю *b* = *b'*, если второе , то *b* > *b'*, если третье, то *b* < *b'*»[44, с. 9-10].

Об одновременности появления трёх работ – Гейне, Кантора и Дедекинда, содержащих новое понятие числа и непрерывности, написал Дедекинд в 1872 г. Он размышлял над определением вещественного числа и понятия числовой непрерывности с 1958 года, но не считал нужным публиковать свои рассуждения: «Я излагал эти мысли о научном обосновании арифметики то одному, то другому из моих учеников, читал также об этом предмете доклад в учёном обществе профессоров здесь, в Брауншвейге, но я не мог окончательно решиться на действительное опубликование, потому, во-первых, что изложение представлялось мне не лёгким, и потому ещё, что сам предмет мало плодовит. Несколько дней назад, 14 марта, в то время, как я наполовину уже стал подумывать о том, чтобы избрать эту тему предметом настоящего юбилейного сочинения[4], ко мне в руки попала, благодаря любезности её автора, статья E.Heine (Crelle`s Journal Bd.74), которая и подкрепила меня в моём решении. По существу, я вполне согласен с содержанием этого сочинения, но должен откровенно сознаться, что моё изложение кажется мне более простым по форме и более точно выдвигающим настоящее ядро вопроса. В то время как я писал это предисловие (20 марта 1872 г.), я получил интересную статью «Ueber die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reichen» G.Cantor`a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann, Bd.5), за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Как мне кажется при быстром чтении, аксиома в §2 вполне согласуется, независимо от внешней формы изложения, с тем, что я отмечаю ниже в §3, как сущность непрерывности. Какую же пользу представит выделение, хотя бы только в понятии, вещественных чисел ещё более высокого порядка, я, согласно с моим пониманием системы вещественных чисел, как совершенной в самой себе, ещё признать не в состоянии»[52, с. 10-11]

В этой же работе Дедекинд формулирует сущность непрерывности: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, - это рассечение прямой на два фрагмента. Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса,

[4] Автор выпустил это сочинение к юбилею своего отца – примечание переводчика (С.О.Шатуновского).

то существует одно и только одно число, производящее это разложение [52, с 17-18]».

В том же 1872 году вышли лекции Вейерштрасса по теории действительного числа, изложенные его учеником Е.Коссаком, определяющее иррациональные числа с помощью понятия агрегатов (конечных числовых множеств) и десятичных приближений [53].

Лемма Гейне-Бореля в современной форме была доказана Борелем в 1895 году для счётного числа покрытий, и Лебегом для произвольных бесконечных покрытий.

Понятие действительного числа ещё формировалось. Предпосылками к его появлению служили предел фундаментальных последовательностей Коши, введённый как свойство, определение фиктивного предела последовательности рациональных чисел Шарля Мере, работы Вейерштрасса, определявшего число как класс эквивалентности агрегатов, и Гейне через фундаментальные последовательности; логически безупречно определил число Рихард Дедекинд через сечения. Правда, это определение носило скорее юридический характер, оно не позволяло оценить объём понятия действительного числа. Далее всех пошёл Кантор в работах последующих лет по теории множеств. Он оценивает объём алгебраических иррациональных чисел[5] как счётное множество, оценивает объём всех иррациональных чисел как несчётное множество, и приходит к понятию сравнения объёма множеств через мощность, что позволило ему создать целостную теорию множеств. И во многом он был обязан поддержке своего друга и коллеги Эдварда Гейне.

Теория действительного числа и понятие непрерывности числового континуума получили дальнейшее развитие в работах французской школы теории функций (Бэр, Борель, Лебег и другие), московской школы теории функций (Егоров, Лузин и его ученики), польской школы теории множеств и теории меры (Серпинский и его ученики), и других математиков XX века.

Работы, в которых было впервые введено понятие числовой непрерывности – это работы 1872 года Кантора, Дедекинда, изложение Коссаком теории Вейерштрасса – опубликованы на русском языке. Только работа Гейне «Лекции по теории функций» осталась неизвестной русскому читателю. Предлагаем Вашему вниманию её перевод с немецкого.

---

[5] Одновременно с Дедекиндом, который, правда, не придавал значения этому факту.

Цитируемые труды

1. http://www.deutsche-biographie.de/sfz28898.html – автор Николай Стулов, дополнительно его же Stuloff, Nikolai, „Heine, Heinrich Eduard Simon“, in: Neue Deutsche Biographie 8 (1969), S. 292 f. [Onlinefassung]; URL: http://www.deutsche-biographie.de/pnd116659122.html
2. M. Goebel, K. Richter, H. Schlosser Heinrich Eduard Heine (1821 – 1881) Virtuelles Museum des Instituts fur Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
zur Geschichte der Mathematik in Wittenberg und Halle http://www.mathematik.uni-halle.de/history/heine/index.html], [Leopoldina 17, 1881, S. 210; Chronik d. Univ. Halle-Wittenberg f. d. J. 1881, S. 6 f.]; [A. Wangerin, in: Mitteldt. Lb. III, 1928, S. 429-36 *(P)*; Pogg. I, III. – *Zu T Anselma:* E. Heilborn, in: Frankfurter Ztg., 1930, Nr. 849; A. Jacker, in: Der Schriftsteller 17, 1930, H. 11; Kosch, Lit.-Lex. *(W)*; Lex. D. Frau *(W)*.
3. Heine E.//Über einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen.//J. reine angew. Math. 26 (1843) 185-216.
4. Heine E.//Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme.//J. reine angew. Math. 29 (1845) 185-208).
5. Heine E.//Summation der Reihe (1). siehe unten// J. reine angew. Math. 31 (1846) 133-135., Über die Reihe (2). - siehe unten (Aus einem Schreiben des Herrn Dr. Heine an Herrn Prof. Lejeune Dirichlet) J. reine angew. Math. 32 (1846) 210-212.
6. Heine E.//Verwandlung von Reihen in Kettenbrüchen (Auszug eines Schreibens des Dr. E.Heine, Privatdozenten in Bonn, an den Prof. C.G.J. Jacobi in Berlin)// J. reine angew. Math. 32 (1846) 205-209.
7. Heine E.//Untersuchungen über die Reihe (2). - J. reine angew. Math. 34 (1847) 285-328.
8. Heine E.//Abriss einer Theorie der elliptischen Functionen. // J. reine angew. Math. 39 (1850) 122-137.

9. Heine E.//Über die in der Gausschen "Summatio quarumdam serierum singularium" vorkommenden Reihen.// J. reine angew. Math. 39 (1850) 288-289.
10. Heine E.//Theorie der Anziehung eines Ellipsoids.//J. reine angew. Math. 42 (1851) 70-82.
11. Heine E.//Der Eisensteinsche Satz über Reihen-Entwickelung algebraischer Functionen.// J. reine angew. Math. 45 (1853) 285-302.
12. Heine E.//Untersuchungen über ganze Functionen.//J. reine angew. Math. 48 (1854) 237-242.
13. Heine E.//Fernere Untersuchungen über ganze Functionen.//J. reine angew. Math. 48 (1854) 243-266.
14. Heine E.//Ueber die Entwickelung von Wurzeln algebraischer Gleichungen in Potenzreihen. //J. reine angew. Math. 48 (1854) 267-275.
15. Heine E.//Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen d. Königl. Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, (1854) 564-572.
16. Heine E.//Nachtrag zu Potentiale einer Kreisscheibe.Bericht über die ... d. Königl. Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, (1855) 306-308.
17. Heine E.//Directer Beweis der Gleichheit zweier bestimmter Integrale.//J. reine angew. Math. 50 (1855) 323-324.
18. Heine E.//Der Übergang von den unbestimmten zu bestimmtem Integralen.//J. reine angew. Math. 51 (1856) 383-401.
19. Heine E.//Die Reduction der elliptischen Integrale in ihre kanonische Form.//J. reine angew. Math. 53 (1857) 199-230.
20. Heine E.//Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche von Herrn E. Heine an den Herausgeber.//J. reine angew. Math. 53 (1857) 284-285.
21. Heine E.//Bemerkungen zu Jacobi's Abhandlung über Variationsrechnung.//J. reine angew. Math. 54 (1857) 68-71.
22. Heine E.//Lagrange's Umkehrungsformel.//J. reine angew. Math. 54 (1857) 388.

23. Heine E.//Über die binomische Reihe.//J. reine angew. Math. 55 (1858) 279-280.
24. Heine E.//Auszug eines Schreibens über die Lame'schen Functionen an den Herausgeber.//J. reine angew. Math. 56 (1859) 79-86.
25. Heine E.//Einige Eigenschaften der Lame'schen Functionen.//J. reine angew. Math. 56 (1859) 87-99.
26. Heine E.//Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen.//J. reine angew. Math. 57 (1860) 231-247.
27. Heine E.//Handbuch der Kugelfunctionen, Berlin 1861, 382 c.
28. Heine E.//Die Lame'schen Functionen verschiedener Ordnungen.// J. reine angew. Math. 60 (1863) 252-303.
29. Heine E.//Der Abelsche Satz. //J. reine angew. Math. 61 (1863) 276-282.
30. Heine E.//Über einige bestimmte Integrale. //J. reine angew. Math. 61 (1863) 356-366.
31. Heine E. Die speciellen Lame'schen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung.//J. reine angew. Math. 62 (1863) 110-141.
32. Heine E.//Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, sowie über die Existenz und Anzahl der Lame'schen Function erster Art. Monatsbericht d. Königl.-Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, (1864) 13-22.
33. Heine E.//Das Newton'sche Gesetz. Rektorratsrede vom 12.Juli 1864.Halle : Verl.d. Buchhandlung Waisenhaus, 1864.
34. Heine E.//Über Kettenbrüche.Monatsbericht d. Königl.-Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, (1866) 436-451.
35. Heine E.//Mittheilung über Kettenbrüche (Auszug aus den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin)//J. reine angew. Math. 67 (1867) 315-326.

36. Heine E.//Geometrische Bedeutung der Kugelfunctionen//
J. reine angew. Math. 68 (1868) 386-389.
37. Heine E.//Die Fourier-Besselsche Function//J. reine angew. Math. 69 (1869) 128-141.
38. Heine E.//Ueber trigonometrische Reihen//J. reine angew. Math. 71 (1870) 353-365].
39. Медведев Ф.А.//К истории понятия равномерной сходимости рядов.//Историко-математические исследования 19, Москва,1974 г., с.75-93.
40. Heine E.//Aus brieflichen Mittheilungen. Zur Variationsrechnung.
//Clebsch Ann. 2 (1870) 187-191.
41. Heine E.//Über einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichelt'schen Principes.Nachrichten von d. Königlichen Gesellschaft d. Wissenschaften und d. G. a. Universität zu Göttingen , vom 16. August, Nr. 16 (1871) 375-383.
42. Heine E.//Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Principes.//Clebsch Ann. 4 (1871) 626-632.
Fußnote: Aus den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vom 16. August 1871, mit Zusätzen des Verfassers.
43. Kertész A.//Georg Cantor. Schöpfer der Mengenlehre// Debrecen,mitglied der Akademie. Bearbeitet von Manfred Stern – Acta Historica Leopoldina. Halle/Saale 1983, c.19.
44. Георг Кантор.//Труды по теории множеств// Москва, 1985, 485 с.
45. Heine E.//Die Elemente der Functionenlehre//J. reine angew. Math. 74 (1872) 172-188.
46. Heine E.//Das Potential eines homogenen Kreises//J. reine angew. Math. 76 (1873) 271-272.
47. Heine E.//Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten//J. reine angew. Math. 79 (1875) 1-16. (Identisch mit: Monatsbericht d. Königl.Preuss. Akademie d. Wissenschaften (1874) 186-187).

48. Heine E.//Lettre a M. Re'sal//Liouville J., (3) II. (1876) 155-158.

49. Heine E.//Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy //J. reine angew. Math. 89 (1880) 19-39.

50. Heine E.// Ueber die Kugelfunction $P_n(\cos y)$ für ein unendliches *n*//J. reine angew. Math. 90 (1881) 329-331.

51. Meray Ch.//Nouveau précis d'analyse infinitésimale/Publication F.Savy (Paris) 1872, I vol.(XXIII-310p.)

52. Дедекинд Р.//Непрерывность и иррациональные числа//Пер. с нем. С.О.Шатуновского. Одесса 1923 г., 4 изд., 44 с.

53. Kossak E// Die Elemente der Arithmetik, Programm Fried.//Werder. Gymn., Berlin, 1872.