История понятия равномерной непрерывности и идея покрытий отрезка.

Новая идея как непредвиденное следствие.

Г.И. Синкевич

Опубликовано: История науки и техники, 2016, 4, с. 3-17.

Аннотация. Мы предполагаем рассмотреть зарождение в середине XIX века метода покрытий как внутреннего инструмента при анализе строения областей, и развитие при его помощи понятия равномерной непрерывности функции.

Abstract. We propose to consider the emergence of a method of overlapping intervals as an auxiliary tool of internal structure of domains and properties of continuous functions, and the development of the concept of uniform continuity.

Ключевые слова: лемма о покрытиях, равномерная непрерывность, Дирихле, Липшиц, Гейне, Борель.

Key words: cover lemma, uniform continuity, Dirichlet, Lipschitz, Heine, Borel.

Современные формулировки. Функция $f: E \to R$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $E \subset R$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in E$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Лемма (Гейне-Борель-Лебег). В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

Зарождение и развитие новых понятий в истории науки – постепенный процесс. Иногда проходят десятилетия и даже века, прежде чем новый объект обретёт форму, получит название и обогатится содержанием. Этот процесс обусловлен общим развитием теории и потребностями практики.

Понятие равномерной сходимости зародилось среди многих других видов сходимости рядов, и формализовалось в работе Гейне. Кратко его история такова. В 1821 году Коши предположил: «Когда различные члены ряда являются функциями одной переменной *x*, непрерывными по отношению к этой переменной в окрестности определенного значения, для которого ряд сходится, то в этой окрестности сумма *s* ряда также будет непрерывной функцией от *x*» [1, с. 120], а в 1823 году предположил, что сходящийся ряд можно интегрировать [2, с. 221-222]. В 1826 году Абель показал, что первое неверно [3]. В 1849 году Ф.Л. Зейдель[1] [4, с.7] и Дж. Г. Стокс[2] [5, с. 149]

---

[1] Несмотря на то, что указанный сборник датирован 1848 годом, он вышел в 1849 г. Зейдель, с. 37: «Теорема. Если имеется сходящийся ряд, который представляет собой разрывную функцию переменной x, отдельные члены которого являются непрерывными функциями, то можно в непосредственной окрестности точки, где функция имеет скачок, указать такие значения x, для которых ряд сходится так медленно, как хотелось бы».

[2] Работа Стокса была представлена в 1847, опубликована в 1849 г. На стр. 565 Стокс вводит понятие бесконечно медленно (infinitely slow) сходящегося ряда: The convergency of the series is here said to become infinitely slow when, if n be the number of terms which must be taken in order to render the sum of the neglected

независимо друг от друга показали, что в окрестности точки разрыва ряд сходится сколь угодно медленно. В 1853 году Коши ввёл условие, при котором сходящийся ряд непрерывных функций сходится к непрерывной функции [6, с. 34-35]. В 1860-е годы Вейерштрасс в своих лекциях заметил, что необходимо наложить некоторое условие, чтобы ряд можно было интегрировать и дифференцировать[3], в 1866 появляется работа об условиях возможности интегрирования ряда W.L. Thomé [7]. В 1870 году Гейне сформулировал понятие равномерной сходимости ряда, дав этому понятию название, и показал, что такой ряд сходится к непрерывной функции и его можно интегрировать [8]. Подробнее см. Ф.А. Медведев [9], а также А.Б. Паплаускас [10].

Столь же постепенно развивалось и понятие равномерной непрерывности функции и сопутствующий ему метод покрытия интервалов. Это понятие возникло независимо у разных математиков в начале 19 века. В 1817 году Больцано для доказательства существования точной верхней границы использует покрытие области интервалами вида $\left(u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\ldots+\frac{D}{2^{m+n+..+r}},\ u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\ldots+\frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}\right)$[11, с. 195.]. У него же встречается понятие «точки с их перифериями», термин *Menge* - *множество* [12]. В рукописях Больцано 1830 года *Теория функций* (*Functionenlehre*) [13], оставшихся неизвестными до 1930 года, сравнивается различный ход функций и различные виды непрерывности. В *Теории функций* Больцано приводит более точное и современное определение непрерывности: «Если равномерная функция Fx одной или нескольких переменных составлена таким образом, что изменение, которое она претерпевает, когда одна из её переменных переходит от определённой величины x к другой величине $x+\Delta x$, уменьшается *ad infinitum* (неограниченно), когда Δx уменьшается *ad infinitum,* – если, при этом, Fx и $F(x+\Delta x)$ (последнее, по крайней мере, для некоторой величины приращения Δx и для всех меньших величин) являются измеримыми[4], и абсолютная величина разности $F(x+\Delta x)-F(x)$ становится и остаётся меньше любой данной дроби $\frac{1}{N}$, если взять Δx достаточно малым (и насколько малой мы бы её ни сделали): тогда я говорю, что *функция Fx непрерывна для величины x*, и это для *положительного приращения* или в *положительном направлении*, когда то, что только что было сказано, происходит для положительной величины Δx; для *отрицательного* приращения или *в отрицательном направлении*, с другой стороны, то, что было сказано, справедливо и для отрицательного значения Δx; если, наконец, названные условия выполняются как для положительных, так и для отрицательных приращений *x*, я просто говорю, что Fx непрерывна при значении *x*» [13, §2]. Далее, в §13 Больцано приводит теорему: «Только из того, что функция Fx непрерывна для всех значений своей переменной *x*, лежащих между *a* и *b*, не следует, что для всех *x* между этими пределами существует фиксированное число *e*, которое достаточно мало, чтобы можно было утверждать, что Δx никогда не должно быть меньше по абсолютной величине, чем *e*, чтобы гарантировать, что разность

---

terms numerically less then a given quantity e which may be as small as we please, n increases beyond all limit as h decreases beyond all limit.

[3] Вейерштрасс высказывал эти идеи и раньше, в статьях 1841 и 1842 года, но опубликованы они были только в 1894.

[4] Конечными, то есть выражаются рациональным числом.

$F(x+\Delta x)-F(x)$ окажется меньше, чем $\frac{1}{N}$ ». Иными словами, непрерывная на открытом интервале функция не обязательно непрерывна на нём [14]. этой же работе Больцано с помощью своего метода дихотомии приводит первое построение непрерывной немонотонной ни в каком, сколь угодно малом промежутке своей области определения, т.е. нигде не дифференцируемой (§75). Но эта работа не была опубликована и осталась неизвестной математикам 19 века, хотя другие работы Больцано были известны [15], популяризировались такими математиками как Г. Ганкель [16], О. Штольц [17], философом Е. Дюрингом [18], который преподавал в Берлинском университете в годы обучения Кантора. По поводу избыточной популярности Больцано Кантор в своём Пятом мемуаре заметил: применённый здесь[5] метод доказательства, который довольно трудно заменить на существенно иной, в своей основе очень давний. В Новое время мы находим его, между прочим, в некоторых теоретико-числовых исследованиях у Лагранжа, Лежандра и Дирихле, в «Курсе анализа» Коши (третье примечание) и в некоторых работах Вейерштрасса и Больцано. Поэтому мне кажется неправильным относить его главным образом или даже исключительно к Больцано, как это стало обычным в последнее время» [19, с.107-108].

В середине 19 века использовалось разбиение отрезка на части, как это делают, например, Дирихле и Риман, для построения определённого интеграла.Устанавливая известное условие интегрируемости, Риман делит интервал (a, b) в котором производится интегрирование, на части δ_i и рассматривает общую длину (Gesammtgrösse, Gesamtgroße) тех интервалов δ_i, где колебание функции превышает некоторое малое число σ; здесь ещё нет этого понятия о мере в тесном смысле, но Риман делает ещё шаг к его установлению; он применяет свой признак к исследованию функции $f(x)=\sum_1^\infty \frac{(nx)}{n^2}$, которая делает разрывы для всех значений переменных, равных $\frac{p}{2n}$, где p и n – числа взаимно простые. Здесь Риман ещё не включает *все* разрывы в некоторые интервалы; преследуя свою цель, он делает это только относительно тех точек $x=\frac{p}{2n}$, в которых разрывы > σ, и говорит, что общая длина таких интервалов может быть произвольно мала [20, с. 236-240]. При этом частичные интервалы не перекрывались. Другой тип разбиения, при котором части перекрываются, впервые появился у Больцано в 1817, и был необходим для характеристики непрерывности функции, а потом и степени её гладкости. Заметим, что понятие окрестности точки как открытого отрезка или открытой области впервые появляется в 1864 году у Липшица [21].

Дирихле, 1854 и 1858 годы

В 1854 году Дирихле читал в Берлинском университете *Лекции по теории простых и кратных определённых интегралов* [22], конспект которых был опубликован в 1904 году Г. Арендтом (1832-1915). Вот его вводная лекция.

---

[5] Речь идёт о методе вложенных отрезков.

«Определение определенного интеграла основано на фундаментальной для анализа всей концепции непрерывности и однозначности функции. $y = f(x)$ есть *непрерывная* и *однозначная* или определённая функция *x*, если каждому значению *x* соответствует только единственное значение *y*, и если постепенное изменение *x* соответствует постепенному изменению *y*, т.е. если для фиксированного *x* разность $f(x+h) - f(x)$ с уменьшением h стремится к нулю. Таким образом равенство $y = f(x)$ графически определяет *x* как абсциссу, *y* как вертикальную ординату, тем самым они определяют кривую, чтобы обеспечить однозначность и непрерывность функции *y*, нужно, чтобы выполнялись два условия: 1) каждой абсциссе соответствует только *одна* ордината; 2) кривая должна быть связной, т.е. переход от одной точки к другой должен осуществляться без скачков, постепенно, и вся траектория образует континуум. Но если уравнение будет **неоднозначным**, когда **одному** *x* соответствует несколько значений *y*, мы тоже можем включить его в рассмотрение, если только выберем одну из различных ветвей. Непрерывность нужна для функции только в определённом интервале, чтобы быть оправданной, например, для всех значений *x*, которые лежат между пределами или экстремальными значениями $x = a$ и $x = b$, в то время как вне этих пределов $f(x)$ с обеих сторон, вполне может иметь произвольную структуру. Для непрерывности функции также будет требовать, чтобы все её значения были бы непременно **конечны**. Следует отметить, что в понятии функции $y = f(x)$ единственным условием является зависимость переменной *y* от переменной *x*, но ни в коем случае не требуется, чтобы выполнение условия непрерывности было математически определено. И это так, потому что во всём интервале мы пользуемся одними и теми же математическими операциями, которые в нём соблюдаются и сохраняются. Иными словами, кривая должна быть нарисована одним движением руки, либо состоять из дуг **одной** или даже нескольких аналитических кривых.

Фундаментальное свойство непрерывных функций. Пусть в **конечном** интервале от a до b дана непрерывная функция $y = f(x)$ от x, а в качестве **частичного интервала (субинтервала)** для двух произвольных значений *x* будем понимать любую часть оси абсцисс между a и b. Тогда всегда можно по любому сколь угодно малому ρ подобрать вторую пропорциональную ей величину σ такую, чтобы в любом частичном интервале (субинтервале) длиной $\leq \sigma$ функция *y* изменялась не больше, чем на значение ρ».

Чтобы доказать эту теорему, мы используем более удобное представление геометрической наглядности. Вы идете от начальных значений a в направлении конца b [стр.5], не выходя за пределы, избегая того, чтобы величина $f(x)$ оставалась неопределённой, первый частичный интервал (субинтервал) определится таким значением c_1, для которого значение функции $f(c_1) - f(a) = \pm\rho$, а для меньших x отличается по абсолютной величине от первоначального $f(a)$ не больше, чем на ρ, где число ρ не произвольно, но зависит от характера, вообще говоря, в остальном произвольной кривой, чьи ординаты могут в ближайший момент вырасти или уменьшиться. Для каждого значения величины *x*, расположенного между a и c_1 должно выполняться $|f(x) - f(a)| < \rho$; ибо в случае, если для таких x разность $= \rho$, то вы должны будете уменьшить первый частичный интервал (субинтервал) для меньших x, эта разность подавно нигде не будет больше, чем ρ, потому что тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ для предыдущего значения x она должна будет быть равна ρ. Точно таким же образом выберем, начиная от

c_1, следующее значение c_2, чтобы впервые $f(c_2) - f(c_1) = \pm\rho$, а для всех значений *x*, лежащих между c_1 и c_2 выполнялось $|f(x) - f(c_1)| < \rho$, и так далее. Таким образом получается ряд значений $a, c_1, c_2, c_3, \ldots$, последовательность, и следующих в том же направлении к *b* от *a*, то есть возрастающих или убывающих в зависимости от того, как будет *b*>*a*, *b*<*a*. Но проблема в том, будет ли весь интервал от *a* до *b* заполнен **конечным** количеством значений, достигнем ли мы наконец **последнего** значения c_u, которое либо совпадёт с *b*, либо будет настолько близко к нему, что функция $f(x)$ между ним и *b* отличается от $f(c_u)$ менее чем на ρ. Допустим, что это не так, тогда бесконечный ряд промежуточных значений *c*, устойчивых [монотоннно] расположенных всегда между *a* и *b*, или совпадающих с *b*, сходится к некоторому числу *C*, причём более удалённые члены последовательности будут располагаться всё ближе и ближе к этому пределу. Поэтому для двух любых членов c_μ и $c_{\mu+1}$ [стр. 6] бесконечной последовательности, хотя и должно выполняться условие (1) $f(c_{\mu+1}) - f(c_\mu) = \pm\rho$ независимо от μ, но с другой стороны, в силу непрерывности функции $f(x)$ при сколь угодно большом μ обе разности $f(C) - f(c_\mu)$ и $f(C) - f(c_{\mu+1})$ должны уменьшаться, сколь угодно мало отличаясь от нуля, в любом случае оказываясь меньше, чем ρ или даже чем $\frac{\rho}{2}$. Но тогда это противоречило бы условию (1) в зависимости от отдалённости, отличие между этими двумя разностями будет $|f(c_{\mu+1}) - f(c_\mu)| < 2\rho$ или $<\rho$. Поэтому интервал $b - a$ содержит лишь конечное число требуемых частичных интервалов (субинтервалов). Предположим, что самый малый из этих интервалов принимает абсолютное значение $= \sigma$. Рассмотрим внутри интервала между *a* и *b* два совершенно произвольно выбранных значения функции $f(x)$ и $f(x')$, так, что расстояние $|x' - x|$ должно равняться $= \sigma$, соответствующие значения их абсцисс *x* и x' попадают в либо в один и тот же, либо в два последовательно расположенных интервала.

Fig. 1.

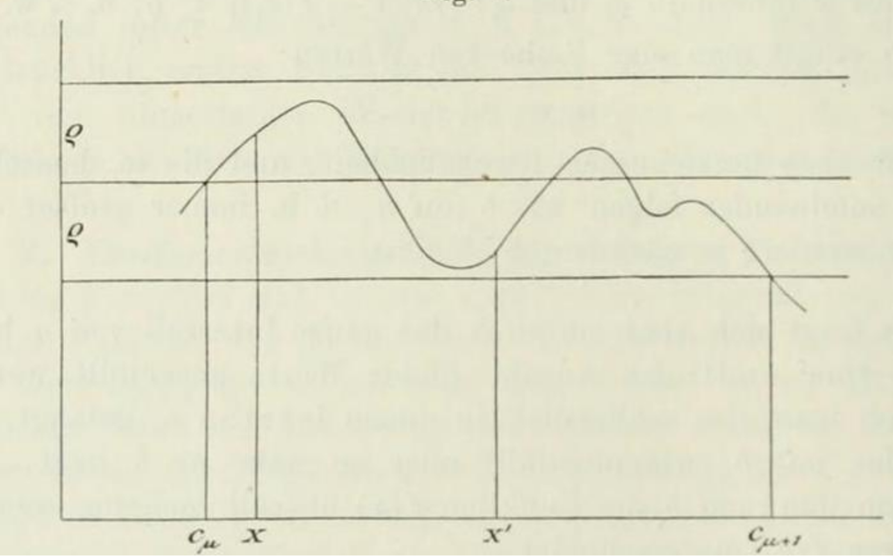
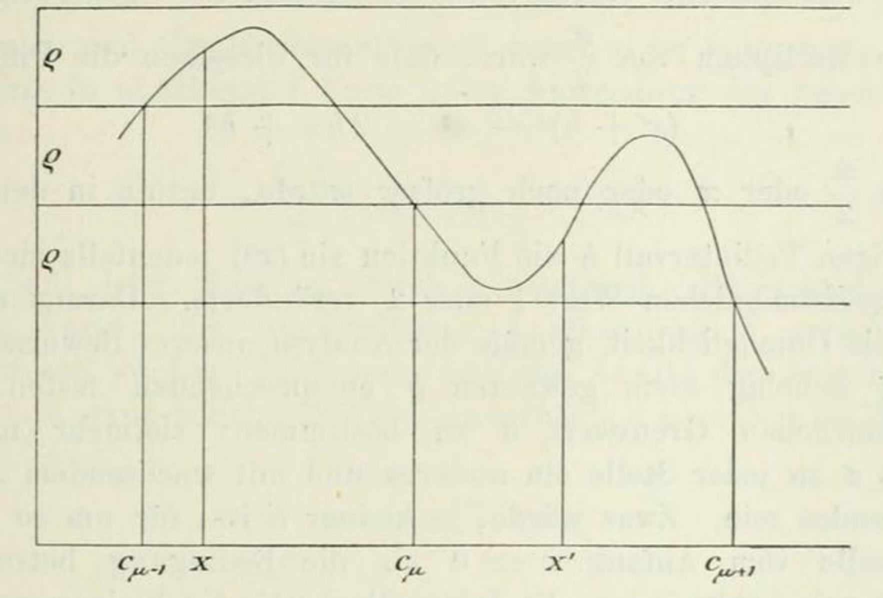


Fig. 2.



Посмотрев на рисунки 1 и 2, вы немедленно убедитесь, что функция $f(x)$ сама даже в своём наибольшем изменении, как это видно на кривой, может измениться не более чем на 2ρ на первом рисунке, и не более, чем на 3ρ на втором рисунке. Таким образом наше утверждение полностью строго доказано. После, заменив эту новую выбранную произвольно малую ρ на $\frac{1}{3}\rho$, приняв её треть за новое ρ, мы ведь можем, естественно, выбрать новое произвольно малое и получить с тем же успехом ту же конструкцию для величины σ того же характера (происхождения), то есть что если *x*, находящийся между *a* и *b*, изменяется не более, чем на σ, то связанные с этим изменения функции $f(x)$ не превосходят ρ. Конечно, σ будет тем меньше, чем меньшее мы выбираем ρ, но она [т.е. величина σ] всегда является фиксированной при заданных значениях ρ и соответствует конкретному значению ρ.

Примечание. – Это свойство непрерывных функций на первый взгляд кажется настолько несомненным и не нуждающимся в доказательстве; но хотя оно оправдано с одной стороны тем, что по большей части это свойство (признак) присуще определённому интегралу, без чёткого понимания не может быть достигнуто обоснование теории; с другой стороны, это утверждение может выполняться только при установленных ограничениях, которые не всегда верны для бесконечного промежутка, даже если функция везде будет конечна и непрерывна.

Это можно видеть на примере функции $f(x)=\sin(x^2)$, всюду непрерывной и конечной от $x=-\infty$ до $x=\infty$, периодически колеблющейся[6] между -1 и 1, и для каждой пары точек дуги x^2, отстоящих друг от друга на $\frac{\pi}{2}$, если эти точки совпадают с крайними

[6] periodisch zwischen 1 und -1 hin und her geht.

точками квадранта, значения функции отличаются на ± 1. Так как h по-прежнему малая, но фиксированная величина, всегда бесконечное увеличение (расширение) от 0 до ∞, то для удалённых значений *x*, для которых x^2 будет кратным $\frac{\pi}{2}$, получится, что разность $(x+h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$ станет равна $\frac{\pi}{2}$ или π или ещё больше, следовательно, в соответствующем частичном интервале *h* функция $\sin(x^2)$ изменится на максимальную величину1 или 2. Отсюда, согласно анализу нашего доказательства, следует невозможность определить сколь угодно малое фиксированное ρ, соответствующее неизменному предельному значению σ; вместо этого σ в каждом месте иная и уменьшается с ростом *x*. Хотя в начальных интервалах от $x = 0$ требуются меньшие *h* для того, чтобы условия определения ρ были выполнены, но даже уменьшая далее длины интервалов, мы не сможем прийти к такому наименьшему σ, что и завершает данное доказательство» [22, с. 4-7].

Второй раз Дирихле обращается к этому свойству непрерывных функций в своих лекциях 1858 г., которые он читал в Геттингене. Дирихле отмечает, что непрерывные функции обладают важным свойством: «Если разность двух последовательных значений переменной не превышает некоторого произвольно малого δ, то разность соответствующих значений функции должна быть меньше, чем β, где β соответствует выбранной произвольно малой δ» [23, с. 3]. Строго говоря, Дирихле не обосновывает свои теоремы полностью, ибо в то время ещё не была доказана теорема о пределе ограниченной монотонной функции, не было обосновано понятие точной верхней грани, которые сформулировал в своих лекциях Вейерштрасс в 1870-е; не была разработана концепция действительного числа, появившаяся в 1870-е годы в работах Кантора и Гейне. Понятие иррационального числа и вычисление функции от такого числа в 1850-е годы ещё было неясным. Не было известно, как много иррациональных чисел на отрезке, как их упорядочить. Не было понятия плотности расположения чисел. Всё это ввёл Кантор в 1872-74 годах. Отличие между открытым и замкнутым интервалом было подвергнуто анализу Дю Буа Реймоном в 1882 году в *Allgemeine Functionentheorie* (он же ввёл там термин *пантахичный* – плотный).

1864 Липшиц

Рудольф Липшиц (1832-1903), ученик Дирихле, продолжил исследования своего учителя относительно расширения условий сходимости рядов Фурье для случая бесконечного числа разрывов и экстремумов. [21, 24]. Опираясь на работы Дирихле, Липшиц отдельно рассматривает три случая невыполнения условий Дирихле: если функции становятся бесконечными в интервале (этот случай рассмотрел сам Дирихле); если функции имеют бесконечно много точек разрыва; если функции имеют бесконечно много экстремумов. Рассматривая второй случай, Липшиц формулирует следующее ограничение: «когда функция $\varphi(x)$ имеет в конечном промежутке $(-\pi, \pi)$ бесчисленное множество точек разрыва, необходимо, чтобы, если мы обозначим через *a* и *b* два числа, находящиеся между –π и π, возможно было найти между *a* и *b* такие другие два числа *r* и *s*, что функция $\varphi(x)$ остаётся конечной и непрерывной в промежутке (r, s). Отсюда после некоторых рассуждений вытекает, что и в этом случае можно разделить промежуток $(-\pi, \pi)$ на конечное число частных промежутков, эти промежутки, как и в первом случае, будут также двух родов»

[Липшиц, с. 298]. Липшиц доказывает, что в точках непрерывности ряд Фурье сходится к самой функции, а в точках разрыва, которые Липшиц видит нигде не плотным, к среднему арифметическому. Третий случай, когда функция имеет бесконечно много экстремумов, Дирихле не рассматривал. Липшиц рассматривает три возможных случая распределения бесконечного множества точек максимума или минимума. «Первый: в произвольном конечном промежутке $(a,b) \in (-\pi,\pi)$ можно вставить два таких числа $r-\delta$ и $r+\delta$, что в $(r+\delta,b)$ и в $(a,r-\delta)$ будет конечное число максимумов и минимумов, а между $r-\delta$ и $r+\delta$ – бесконечное, как бы мало ни было расстояние 2δ между этими числами; второй: каковы бы ни были числа r и s, расположенные в (a,b) на конечном расстоянии одно от другого, число максимумов и минимумов в промежутке (r,s) никогда не будет конечным; третий: промежуток (r,s) состоит из конечного числа отличных от нуля промежутков, в которых имеет место первое или второе обстоятельство. В первом случае Липшиц говорит, что функция имеет колебание при $x=r$, во втором, – что она имеет колебание во всём промежутке (a,b), и в последнем, – что функция имеет колебание и в отдельных точках, и в промежутках конечной длины. П. Монтель отметил в примечаниях к этому сочинению, что у Липшица выступают три возможных случая: или производное множество от множества точек, в которых наблюдается максимум или минимум, имеет конечное число предельных точек, или оно всюду плотно, или данный промежуток состоит из конечного числа частных промежутков обоих родов.

Для доказательства основной теоремы Дирихле Липшиц разбивает промежуток $(-\pi,\pi)$ на конечное число промежутков, концы которых расположены в порядке возрастания и являются 1) значениями переменной x, для которой функция $\varphi(x)$ непрерывна; 2) значениями x, для которых эта функция имеет изолированные максимумы или минимумы; 3) значениями, в которых она имеет колебания; 4) концами отрезков, на которых функция имеет колебания; 5) отдельными значениями x, для которых разность $\varphi(x+\delta)-\varphi(x)<L\delta^k$. Здесь δ – любое из (a,b), L – некоторая постоянная, $0<k\le 1$. При таком разделении интеграл Дирихле $\int\limits_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}d\beta$ разбивается на сумму интегралов, которые либо по первой теореме Дирихле, либо по второй теореме Липшица стремятся к определённым пределам, и отсюда получаются соответствующие выводы о сходимости ряда Фурье. Липшиц один из первых обратил внимание на различие между множествами, которые потом будут названы нигде не плотными, всюду плотными и приводимыми. Более слабое условие Липшица сформулировал У. Дини [25].

1870 Ганкель

В 1870г. вышла работа Г. Ганкеля «Исследование бесконечно колеблющихся и разрывных функций» [26]. Ганкель рассматривал конечные и бесконечные, всюду плотные (überall dicht) и нигде не плотные (nirgends dicht) множества точек. Он пытался доказать утверждение, что общая длина s интервалов, включающих точки последнего типа, может быть сделана произвольно малой. В 1875г. Г.Дж. Смит показал неправильность утверждения Ганкеля в том отношении, что существуют нигде не плотные несчётные области, для которых построение Ганкеля невозможно [27]. По Ганкелю, если область состоит из конечного числа точек, s составляется из интервалов, которые лежат около каждой из них; каждый их этих интервалов может быть сделан произвольно малым, следовательно, будет произвольно мала и s. Если число точек бесконечно, между ними, по определению нигде не плотной области, лежат ещё свободные интервалы; Ганкель делит весь отрезок на интервалы так, чтобы каждый из них охватывал одну из точек области, и чтобы они, вместе взятые, *заполняли весь интервал* (a, b). Если затем каждый из интервалов будет сведён до $\frac{1}{n}$ его части, при соблюдении первого условия, то остальная $\frac{n-1}{n}$ его часть (a, b) будет свободна от точек области. Таким образом s может быть сделана произвольно малой. Следовательно, полагал Ганкель, функция интегрируема по Риману, если она поточечно разрывна. Ганкель предполагал, что число точек области счётно (только в 1874 г. появляется работа Кантора, где вводится понятие счётности), и что около каждой точки области можно построить интервалы так, чтобы они не перекрывались, что возможно для неплотного расположения. Если покрывать интервалами предельные точки, то интервалы будут перекрываться. Конструкция Ганкеля построения интервалов около каждой точки области была продолжена впоследствии Борелем. В качестве примера Ганкель построил функцию, имеющую особенность в каждой рациональной точке [26, с.19].

Вейерштрасс

Вейерштрасс начал читать лекции в Берлинском университете с 1856 года. Он создал стройное систематическое строго обоснованное изложение математического анализа. Ему принадлежит введение понятия непрерывности функции на языке эпсилон-дельта (1861), понятие ε-окрестности, требующееся для равномерной непрерывности, разработка концепции предельной точки в 1870-х годах, обоснование понятия точной верхней грани, теоремы о непрерывных функциях, разработка понятия равномерной сходимости рядов как условия интегрирования (Вейерштрасс использовал термин «сходимость в равной степени», *in gleichem Grade*). Благодаря Вейерштрассу, Куммеру и Кронекеру в золотое десятилетие 1870-1880-е годы в Берлине возникла дружеская атмосфера совместного творчества математиков, поощрения исследований математической молодёжи. Был определён широкий круг проблем в русле математического анализа, обсуждались все новые идеи. Большую роль в этом сыграл журнал Крелле. Неформальное общение было столь значительным, что во многих статьях авторы признаются, что идеи возникали в устных беседах, дополняя друг друга, и порой трудно определить, кто был первым. Но при этом научная порядочность и щепетильность авторов не подвергалась сомнению: во всех случаях, когда было возможно, приводились ссылки на предшествующие исследования других авторов. В 1870-е годы одновременно появляются концепции действительного числа и непрерывности числовой области Мере, Вейерштрасса, Гейне, Кантора и Дедекинда. Отсюда берёт начало теория множеств Кантора. Если работу француза Шарля Мере его соотечественники не поняли и оценили лишь столетие спустя, то немецкие математики работали хотя и самостоятельно – их концепции существенно различны – но в тесном взаимодействии друг с другом, в собеседованиях и переписке.

Гейне писал: «Развитие теории функций происходит в основном за счёт элементарных фундаментальных теорем, хотя некоторые результаты проницательные исследователи ставят под сомнение, ибо результаты исследований не всегда обоснованы. Я объясняю это тем, что, хотя принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию. Его утверждения основываются на неполном определении иррациональных чисел, в котором геометрическая интерпретация, а именно понимание линии как движения, часто приводит к заблуждению. Теоремы должны быть обоснованы с помощью нового понимания действительных иррациональных чисел, которые законно обоснованы и существуют, как бы мало они не отличались от рациональных чисел, и функция однозначно определена для каждого значения переменного, независимо от того, рационально оно или иррационально… Я не решался публиковать результаты, получившиеся в результате устного обмена мнениями, и содержащие прежние идеи других людей, прежде всего господина Вейерштрасса, на что мне остаётся всего лишь реализовать эти результаты, что крайне важно, дабы не оставлять неясных моментов в изложении. Отдельную благодарность я приношу г-ну Кантору из Галле за беседы, которые оказали значительное влияние на содержание моей работы, так как я позаимствовал у него идею общих чисел, посредством которых образуется ряд (A, § 1, определение 1). Мне кажется, в частности, это может быть применено в теории функций (B, § 2, лекция 1), благодаря первоначальному виду, по которому все числа (величины) определённо содержатся в бесконечном количестве названного становления. Основание, на котором мы закономерно вводим наши числовые величины, найдены здесь г-ном Кантором, позволяет также ввести отношение «больше», «меньше» и «равно» [28, с. 172-173; 29].

Гейне был студентом Дирихле в 1838 году, когда последний был увлечён рядами Фурье и условиями их сходимости. Дома у Дирихле с 1834 г. был неформальный математический семинар, который Гейне, будучи к тому же родственником Дирихле, возможно посещал. По другим источникам, Гейне познакомился с Дирихле в 1840, вернувшись из Геттингена. Позже Дирихле стал его руководителем его докторской работы «О некоторых дифференциальных уравнениях» 1842. Мы не знаем, использовал ли Дирихле в годы обучения Гейне построение 1854 года, приведённое нами выше. Гейне, вводя понятие равномерной сходимости в 1870 году (журнал датирован 1869 годом, но в статье стоит ремарка 1870), пишет, что на возникновение идеи повлияла посмертно опубликованная Лиувиллем работа Дирихле [30].

В журнале Крелле 1869 г. выходит работа Э. Гейне «О тригонометрических рядах»[7] [8]. В ней Гейне формулирует определение равномерной сходимости ряда in gleichen Grade convergent (существовавшее с 1849 года в работах упомянутых математиков (Зайделя, Стокса) в слабо-формализованном виде) и вводит понятие равномерной непрерывности функции *gleichmäßig Continuität*. «До недавнего времени считалось, что неотъемлемым свойством сходящегося ряда, члены которого остаются конечными между пределами интегрирования, его равенство сумме интегралов отдельных членов, и только

[7] Заметим, что, хотя журнал датирован 1869 годом, статья заканчивается словами «Галле, февраль 1870»).

господин Вейерштрасс отметил, что это утверждение[8] требует доказательства, а именно то, что ряд в пределах интегрирования должен не только сходиться, но сходиться в той же степени, (in gleichem grade convergire[9]). Вот это утверждение:

Конечная функция $f(x)$ между $x=-\pi$ и $x=\pi$ может быть разложена единственным образом в тригонометрический ряд в виде (α.) $f(x)=\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots$.

Эта формулировка теперь устарела, и в работах Дирихле, Липшица и Римана установлено, что функция от *x* во многих случаях имеет слишком общий характер в ряде вида (α.), эти коэффициенты допускают известное разложение, но только не относительно того, сколькими способами они могут быть найдены». Моё рассуждение продолжает исследование господина Кантора из Галле, я предлагаю расширить его на тот случай, когда совпадение в точках разрыва больше не требуется. [8, с. 353].

Ряд, состоящий из членов $g_1, g_2, \ldots, g_m$ является сходящимся, если для любой заданной величины *n* для всех последующих значений *n*, сумма $g_n+g_{n+1}+g_{n+2}+\ldots g_{n+m}$ произвольно приближается к нулю, не превышая заданного ε, какое бы положительное значение *m* ни задать. Последовательные члены ряда *g* изменяются в зависимости от *x*, значения которого должны пройти от α до β (включая α, β), так что ряд в этих пределах *сходится равномерно, если выполнен критерий сходимости для любого заданного ε, для всех промежуточных значений x;* выполняется для одного и того же *n*, если задавать другие значения ε. *В общем,* это означает, что за исключением окрестности некоторых точек, *сходящимся в равной степени* от α до β назовём ряд, для которого выполняется критерий равномерной сходимости на всей линии от α до β, после того, как исключены произвольно мелкие части, которые окружают упомянутые точки [8].

В этой же работе впервые появляется термин равномерная непрерывность для функции двух переменных: «Дирихле, следуя Абелю в своей работе о биномиальном ряде установил теорему, в которой строго доказал, что предел степенного ряда для данной функции $c_0+c_1r+c_2r^2+\ldots.$ $(r<1)$ при $r=1$ будет равен $c_0+c_1+c_2+\ldots$, если последний ряд сходится, очевидно, что функция

(β) $f(x)=\frac{1}{2}a_0+r(a_1\cos x+b_1\sin x)+r^2(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots$ при фиксированном *r* вместе с *x*, при фиксированном *x* вместе с *r* до $r=1$ (вкл.) будет непрерывной. Но похоже, что он не заметил, что эти свойства, эта *непрерывность в каждой точке в двух направлениях,* совсем иная, нежели таковая же для функций с аналогичным выводом вроде тех, которые применяют к функциям одной переменной, и которые могут быть названы *равномерно непрерывными*, потому что они простираются равномерно по всем точкам во всех направлениях. *Функция двух переменных x, y равномерно непрерывна в области, если для сколь угодно малого заданного ε существуют величины* h_1 *и* k_1*, ни одна из которых не равна нулю, такие, что разность* $f(x+h, y+k)-f(x,y)$ *будет меньше,*

[8] Имеется в виду единственность разложения функции в ряд Фурье.
[9] Термин принадлежит Гудерману, учителю Вейерштрасса.

чем ε, пока h и k не превышают соответственно h_1 *и* k_1*, и хотя это выполняется для данного ε и фиксированных* h_1 *и* k_1 *для любых точек* (x,y) *и* $(x+h,y+k)$*, они заключены внутри указанной области* [8, с. 361].

Гейне, 1872

Гейне развивает эту идею в работе 1872 года «Лекции по теории функций» [28, 29]. Он вводит понятие подпоследовательности (*числовая последовательность* у Гейне, понятием которой, как он сообщает, обязан Кантору. Кантор использовал термин *фундаментальная последовательность*). На основе этого понятия Гейне строит теорию иррационального числа, непрерывности числовой области и непрерывности функции. «Функция *f*(*x*), определённая на интервале (*a,b*), непрерывна в точке x_0 этого интервала, если для каждой последовательности x_n чисел интервала (*a,b*), формула $\lim x_n = x_0$ при *n*, устремлённом к бесконечности, влечёт за собой формулу $\lim f(x_n) = f(x_0)$ ».

На стр. 184 даётся определение равномерной непрерывности функции одной переменной: «**§ 3. Свойства непрерывных функций.** *Определение* 1. Функция *f(x)* называется *непрерывной* от *x=a* до *x=b*, если она непрерывна для каждого значения аргумента, заключённого между *a* и *b* с включением значений *a* и *b* ; она называется *равномерно непрерывной (gleichmässig continuirlich)* от *x=a* до *x=b,* если для любого сколь угодно малого ε найдётся такое значение η_0, что для любого положительного числа η, меньшего η_0, $f(x\pm\eta)-f(x)$ не превосходит ε. Какую бы мы ни взяли величину x, только при условии, что *x* и $x\pm\eta$ принадлежат области между *a* и *b*, будет *обязательно* выполняться *то же самое* требование».

В самом конце статьи, на основе построенной им теории, Гейне приводит теорему о равномерной непрерывности функции:

Теорема 6. Если для всех отдельных промежуточных значений от $x=a$ до $x=b$ функция $f(x)$ одной переменной непрерывна, то она равномерно непрерывна.

Доказательство. Выберем произвольную величину 3ε, так что найдётся такое число, что начиная от $x=a$ будет выполняться $f(x)-f(a)$ абсолютно $\le 3\varepsilon$. Значение, при котором достигается равенство, есть наибольшее, и при этом $f(x)-f(a)-3\varepsilon=0$. Обозначим его x_1. Аналогично можно найти x_2 в качестве наибольшего для того, чтобы от $x=x_1$ до $x=x_2$ всегда было $f(x)-f(x_1)\le 3\varepsilon$. Так можно продолжить: придадим какому-то конечному числу *n* такое значение, чтобы $x_n=b$, или найдём, чтобы $f(x)-f(x_{n-1})$ от $x=x_{n-1}$ до $x=b$ не превышала *3ε.* Итак, утверждение доказано.

По-прежнему остаётся справедливым, что не существует такого *n*, при котором величины $x_1, x_2, \ldots$ образуют бесконечную последовательность, не превосходящую *b*. Это была бы числовая последовательность с пределом *X*; её характерным свойством то, что для каждого *n* выполняется равенство $f(x_{n+1})-f(x_n)=3\varepsilon$. Подберём теперь η_0, такое, чтобы $f(X)$ отличалось от $f(X-\eta)$ меньше, чем на ε, как только $\eta<\eta_0$. Между числами $X-\eta_0$ и *X* можно расположить указанную числовую последовательность $x_n, x_{n+1}, \ldots$ так что $f(x_{n+1})-f(x_n)$ будет меньше, чем 2ε, и с другой стороны, в то же время должно быть 3ε. Следовательно, основное предположение невозможно, и функция равномерно непрерывна. Галле, октябрь 1872 года» [28, с 188].

Здесь мы видим, что при доказательстве этой теоремы, носящей теперь имя Гейне-Кантора, используется покрытие конечным числом интервалов, каждый из которых содержит хотя бы одну точку интервала. Этот вспомогательный приём и превратится потом в лемму о покрытиях. Первоначальную её схему мы видели в лекции Дирихле 1854 года. Но Дирихле обращался к геометрическому представлению, фактически к Эйлеровскому пониманию непрерывности. Для построения определённого интеграла в лекциях для физиков Дирихле было достаточно иметь кусочно-непрерывную функцию. Гейне заметил: «Но в самом деле недостаточная строгость определения иррациональных чисел заключается в геометрическом представлении, а именно в понимании линии как результата движения, часто неясного». Этим неясным вопросом, тревожившим математиков в предыдущие годы, был вопрос о поведении функции на отрезке между двумя близкими числами, хотя бы один из концов которого является иррациональным числом. Последняя теорема сформулирована как раз для того, чтобы рассеять эту неясность. В этой же работе Гейне [28] первым высказал мысль, что некоторым множеством точек разрыва можно пренебрегать, но способов оценки величины или меры такого множества ещё не было. Теория Гейне (и равноправные ей теории Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса, созданные в те же годы) позволили строго обосновать свойства непрерывной функции. Более того, Гейне предназначал своё изложение новой теории для преподавания, для студентов, и мы до сих пор пользуется его подпоследовательностями, чтобы объяснить студентам понятие предела и основные положения математического анализа.

Подробная статья П. Дюгака «О переписке Бореля и о теореме

Дирихле-Гейне-Вейерштрасса-Бореля-Шёнфлиса-Лебега» [31], как это следует из названия, даёт позднюю историю названной теоремы, богатой именами. Рамки нашей статьи ограничены ранней историей этой теоремы. Отметим только, что упрёки Дюгака в адрес Гейне в том, что последний использовал построение Дирихле 1854 года, вызывают огорчение. Дюгак ошибочно датирует лекции 1852 годом [31, с. 91], пересказывает доказательство современным языком. Он относится к методу покрытий как к моментально сформированному в лекциях Дирихле, не учитывая того, что пока не появилась концепция числа и непрерывности, Дирихле вместо строгих обоснований ограничивался апелляцией к наглядности. Как сказал Риман в 1854, «Те функции, на которые не распространяется исследование Дирихле, в природе не встретятся» [20. с. 234].

Метод покрытия стал востребован как для анализа точечных областей, так и для зарождающейся теории меры. В 1878 г. У. Дини дал новое доказательство теоремы о равномерной функции [32, с. 47-48]. Дини утверждал, что это доказательство принадлежит Кантору, и известно ему из письма Шварца. В 1880 метод покрытий использует Вейерштрасс в «Zur Functionenlehre». В 1880 г. метод покрытий для определения равномерной непрерывности использовал И. Томе [33, с.29-31]. В 1882 году С. Пинкерле использует метод покрытий [34, с. 67-68]. В 1895 году Борель в своей диссертации впервые сформулировал теорему о покрытиях для счётного случая[10]: «Если на конечном отрезке имеется счётный ряд интервалов такого рода, что каждая точка отрезка есть внутренняя точка по крайней мере одного из интервалов, то уже некоторое конечное число этих интервалов покрывает отрезок целиком, то есть так, что все его точки будут внутренними точками этого конечного ряда интервалов» [35, с. 280-282]. В 1903 году Борель отметил существенную разницу двух приёмов построения интервалов, одного – когда делится основной интервал на частные интервалы, причём закон деления не обусловлен той точечной областью, которая имеется в виду, и другого – когда исходным пунктом берутся данные точки и строятся интервалы около этих точек. До какой степени различны оба эти приёма, видно из следующего примера: если отрезок (0,

[10] Борель впоследствии неоднократно обращался к этой теореме в 1898 и в 1903, формулируя различные её варианты.

1) делить на части, то, каковы бы они ни были, на них будут лежать рациональные точки, и сумма частных интервалов с такими точками равна единице; если же строить отрезки около каждой рациональной точки $\frac{p_i}{q_i}$, то получится счётный ряд интервалов, на которых только и расположены такие точки; при этом сумма этих интервалов может быть сделана произвольно малой. Борель называет интервал $\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2\sqrt{5}},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^2\sqrt{5}}\right)$ каноническим интервалом для дроби $\frac{p}{q}$. Теорему Гурвица (1891) можно перефразировать так: «всякое иррациональное число заключается внутри бесконечного множества канонических интервалов».

Отсюда следует, что каждое число интервала (0,1) будет внутренним для по крайней мере одного канонического интервала, число которых бесконечно. А в таком случае, по теореме Бореля, можно бесконечным числом способов выбрать *конечное число* таких канонических интервалов, что каждая точка (0,1) будет лежать по крайней мере одного из них. В 1895 г. вариант этой теоремы для плоской области дал П. Кузен[11] [36, с. 22].

В 1900 году теорему о покрытиях сформулировал для бесконечного случая Шёнфлис [37, 51-52]. В 1902 году опубликован вариант этой теоремы В.Г. Юнга [38, с. 387], благодаря которому появился термин *покрытие*, *overlapping*. В 1903 появилась формулировка теоремы для шаров Э. Л. Линделёфа [39, 297]. В 1902/3 году Анри Лебег в курсе лекций по интегрированию сформулировал теорему для несчётного случая (опубл. в 1904 [40, с. 97]. В 1904 появился вариант Веблена ([41, с. 436-437].

Огромная подготовительная работа была проделана такими математиками середины 19 века, как Больцано, Коши, Дирихле, Риман, Липшиц, а окончательно сформулировали понятие равномерно непрерывной функции и её свойства Кантор и Гейне. К этому времени была создана теория множеств, зарождалась теория меры. Использование понятия производного множества стимулировало её развитие. Борель выделял те области, к которым применимо мероопределение. Лебег ввёл внутреннюю меру области. Появилась классификация точек на внешние и внутренние, классификация предельных точек. Развивалось исследование числовых областей и позже построение областей по заданным свойствам. Это привело к появлению конструктивной и дескриптивной ветвей теории функций. Метод покрытий, будучи сначала вспомогательным инструментом деления отрезка на части и суммирования тех из них, где функция имеет ограниченное колебание, превратился за сотню лет в важный инструмент анализа свойств функции. Этот феномен постепенного преобразования вспомогательного средства в самостоятельный результат широкого значения был известен ещё в Античности под названием поризм. Постепенное обогащение смыслами сопутствовало методу покрытий в истории анализа.

[11] Кузен обращался к этой теореме и ранее, в 1893 г.

Список литературы

1. Cauchy, A.-L. Course d’Analyse de l’Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique // Oeuvres. Ser. 2, t. 3. 1–471.
2. Коши, О. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении (1823). Перевод Буняковского. СПб, 1831. 254 с.
3. Abel, N. Untersuchungen über die Reihe // Journ. Rei. Ang. Math. 1826. No. 1. P. 311–329.
4. Seidel Ph.L.Note über eine Eigenschaft der Reihen welche discontinuirliche Functionen darstellen//Abhandl. Math. Phys. Kl. D. Münchener Akad., 1848, 382, Ostwald’s Klassiker der exacten Wissenschaften, №116. Leipzig 1900. S. 35-45.
5. Stockes G.G. (presented: 1847 ; published: 1849) On the critical values of the sums of periodic series, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1849, 8, p. 533–583.
6. Cauchy A. Note sur les series convergentes don’t les divers membres sont des fonctions continues d’une variable réelle ou imagnaire, entre des limites données. 1853. Oeuvres (I), 12, Paris, 1900, с. 30-36.
7. Thomé W.L. Ueber die Kettenbruchentwicklung der Gaußschen Function F (α, 1, γ, *x*) // J. reine und angew. Math., 1866, 322-336.
8. Heine E. Über trigonometriche Reihen //J. reine und angew. Math. 1869. 70. 353-365.
9. Медведев Ф.А. К истории понятия равномерной сходимости рядов// Историко-математические исследования 19, Москва,1974 г., с.75-93.
10. Паплаускас А.Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. Москва: Наука, 1966.
11. Больцано, Б. Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения / Перевод Э. Кольмана // В кн. Кольман Э. Бернард Больцано. М. 1955. С. 170–204.
12. Больцано, Б. Парадоксы бесконечного / Перевод под ред. И.В. Слешинского. Одесса: Mathesis, 1911. – 140 с.
13. Bolzano, B., 1930. Functionenlehre, edited by K. Rychlik. Royal Bohemian Academy of Sciences, Prague.
14. Rusnock, P., Kerr-Lawson, A. Bolzano and uniform continuity. Historia Mathematica 32 (2005) 303–311.
15. Синкевич Г.И. Распространение и влияние идей Больцано на развитие анализа XIX века // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 года. Москва: РУДН, 2014. С. 436–438.
16. Hankel H. Grenze //Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste. Leipzig, 1870/71. Vol. 90. s. 185–211.
17. Stolz O. B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung//Mathematische Annalen. Band 18, 1881.
18. Dühring E. Natürliche Dialektik: Neue logische Grundlegungen der Wissenschaft und Philosophie. Berlin: Witter, 1865.
19. Кантор Г. Труды по теории множеств. М.:Наука, 1985.
20. Риман Б. Сочинения / Пер. В.Л. Гончарова. М.-Л. ОГИЗ ГТТИ, 1948.
21. R. Lipschitz, "De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infintum disquisitio" J. Reine Angew. Math. , 63 (1864) pp. 296–308.
22. Lejeune-Dirichlet, P.G. Vorlesungen ueber die lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Braunschweig: Friedrich Vieweg, 1904.

23. Meyer, G.F.: Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen mit vorzüglicher Berücksichtigung der von P. Gustav Lejeune-Dirichlet im Sommer 1858 gehaltenen Vortrüge über bestimmte Integrale. Leipzig: Teubner, 1871.
24. Разложение функций в тригонометрические ряды (Дирихле, Риман, Липшиц) / Пер. Г.А. Грузинцева и С.Н. Бернштейна. Харьков, 1914.
25. Dini, U. Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale / U. Dini // Pisa: tip. Nistri. 1880.
26. Hankel H. Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Functionen. Tübingen 1870.
27. Smith, H. J. S. On the integration of discontinuous functions// Proceedings of the London Mathematical Society. 1875. S.1, V. 6. 140–153.
28. Heine E. Die Elemente der Functionenlehre //Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1872, 74, 172-188.
29. Гейне Э. Г. Лекции по теории функций / Перевод и примечания Г.И.Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. СПб: СПбГАСУ, 2012, 18, 26-46.
30. Lejeune-Dirichlet. Démonstration d'un théorème d'Abel. Liouville, Journal de Mathématiques, II Série, 1856, T. VII, p. 253-255.
31. Dugac P. "Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet–Heine–Weierstrass–Borel–Schoenflies–Lebesgue". Archive. International Histoire Sciences. 1989, 39, 69–110.
32. Dini U. Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabiliti reali, 1878.
33. Thomae, J. Elementare Theorie der analytischen Functionen einer Veränderlichen. Halle : L. Nebert, 1880 ; 2. Auflage, 1898.
34. Pincherle, S. Opere scelte, volume I. Roma : Edizioni Cremonese, 1954.
35. Borel, É. Oeuvres, t. I Paris : Edition du Centre National de la Recherche Scientifique, 1972.
36. Cousin, P. Sur les fonctions de n variables complexes. Acta mathematica, 19 (1895), 1-61.
37. Schoenflies, A. Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltifkeiten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900, 8, zweiten Heft.
38. Young, W.H. Overlapping Intervals. Proceedings of the London Mathematical Society. 1902, 35, 384-388.
39. Lindelöf, E. Sur quelques points de la thèorie des ensembles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1903, 137, 697-700.
40. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. М.-Л.:ГТТИ, 1934.
41. Veblen, O. The Heine-Borel theorem. Bulletin of the American Mathematical Society, 10 (1904), 436-439.