УДК 51(091)

Г.И. Синкевич (СПбГАСУ)

Историография математического анализа

Статья опубликована в сборнике
«Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»
Вып. 20. СПб.: Издательство СПбГАСУ 2014. – с. 3-22.

Математический анализ ведёт свою историю с XVII века. Как самостоятельная теория он возник в работах Ньютона и Лейбница, был развит в работах И. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, О. Коши, К. Вейерштрасса и многих других математиков XVIII и XIX веков. Историю идей математического анализа писали начиная с XVIII века. Сейчас историография анализа огромна, в статье ставится цель выделить наиболее значимые работы историков России, Франции, Англии, Германии, Италии, Польши, Чехии, Венгрии, США, Канады, Бразилии.

Ключевые слова: математический анализ, история основных понятий, непрерывность.

Литература по истории математического анализа богата и начинается с XVIII века. Здесь мы рассмотрим основные книги и статьи, которые мне удалось прочитать, и которые представляются мне наиболее важными. Разумеется, перечень не претендует на полноту. Главным образом выделены работы, связанные с историей концепции непрерывности.

1758 год. Многие авторы предваряли свои математические сочинения историческим экскурсом, но первое полное сочинение, специально посвящённое истории математики, написал Жан Этьен Монтюкла (1725–1799). Это была «История математики», два тома которой вышли в 1758 году. Первый том был посвящён истории математики от античности до начала XVII века, второй том – достижениям математики XVII и начала XVIII века. В нём много внимания уделено развитию анализа, исследованиям Ферма, Паскаля, Барроу, Ньютона, Лейбница, И. Бернулли [1].

1768 , 1794 годы. Профессор университетов в Лейпциге и Геттингене Авраам Готтфельд Кёстнер (A.G. Kaestner, 1719–1800), в «Основах математики»[2] и во «Введении в анализ бесконечно малых» [3] делает хороший исторический обзор методов анализа. Его курс издавался на русском языке в 1792–1803 годах. В 1796–1800 годах выходила его незаконченная, но хорошо систематизированная четырёхтомная «История математики от возрождения наук до конца восемнадцатого столетия» (Geschichte der Mathematik). Кёстнер даёт широкий историографический обзор большого количества источников. Третий том посвящён истории возникновения анализа в XVII веке.

В 1802 году вышел «Опыт общей истории математики» [4] аббата Ш. Боссю (Charles Bossut, 1730 – 1814). Том I содержит историю математики от античности до XV века, и обзор развития математики и механики в XVI веке. Том II начинается с истории создания анализа бесконечно малых в трудах Ньютона и Лейбница. Подробно рассказано об их работах, а также работах Я.Бернулли, Гюйгенса, Лопиталя. Сам Боссю, математик, механик, внёс большой вклад в теорию корабля и гидродинамику. Поэтому его в его изложении большое внимание уделено прикладным вопросам.   В 1810 году вышла его «Общая история математики»(Histoire générale des mathématiques) в двух томах.

1817 год. Об истории теоремы Ролля писал Бернард Больцано (B. Bolzano, 1781– 1848), в работе 1817 года «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения» [5]. Больцано анализирует доказательства Кёстнера, Клеро, Лакруа, Меттерниха, Реслинга и других математиков. Правда, некоторые из книг он упоминает без близкого знакомства с текстами. Это относится к работам Рёслинга и Клеро. Больцано близко подошёл к анализу основных противоречий в доказательствах и первым признал необходимость арифметизации анализа, его освобождение от механических и геометрических интерпретаций в основных концепциях, прежде всего в концепции непрерывности.

1821 год. Огюстен Луи Коши (A. L.Cauchy, 1789– 1857) сравнивает методы Декарта, Ньютона и Лагранжа в своём «Курсе анализа» 1821 года [6].

В 1834 году профессор университета в Лейпциге М.В. Дробиш (M. W. Drobisch,1802– 1896) выпустил «Лекции по уравнениям высших порядков» [7], где в §107 [7, с. 161] рассказывает о методе каскадов Ролля.

В 1874 году в Лейпциге вышел сборник статей Германа Ганкеля (Hermann Hankel, 1839– 1873) [«История математики в Древности и в Средние века» [8]. Этот курс содержит много глубоких историко-математических идей, но заслуживает некоторых упрёков в строгости изложения, что отмечал Кеджори. Недолгая жизнь не позволила Ганкелю продолжить изложение истории далее, но он написал две интересные статьи по развитию анализа. Первая из них – это его лекция 1869 году «Развитие математики в последние столетия» [9]. Главным предметом этой лекции является именно история анализа. Ганкель кратко рассматривает развитие основных понятий от Евклида и Архимеда, развитие анализа и теории функций, включая кормплексные, касается работ Кеплера и Кавальери, Ньютона, Лейбница, братьев Бернулли, Лопиталя, Лагранжа, Эйлера, Коши, Римана, Понселе, Мёбиуса, Шаля, фон Штауда. Его обзор заканчивается творчеством Гаусса.

Ганкель придаёт большое значение характеру математики, развивавшейся в языковой среде латинизированных языков, и её отличию от немецкоязычной математики. Проводит он и отличия в философских основах различных языковых культур. Обращает особое внимание на геометрический смысл понятий анализа, называя геометрию «царской дорогой» математики. В этой лекции, в частности, он говорит: «Княжество математики теперь бесспорно приходится на Германию; такие математики Франции, как Шаль, Лиувилль и ещё несколько энергичных ветеранов не имеют достаточного количества учеников, которые могли бы успешно конкурировать с немцами, а учиться у немцев французы не любят» [9, с. 29].

В 1871 году Ганкель написал для Энциклопедии интереснейшую статью о понятии границы [10]. Эта статья интересна тем, что в ней дано систематическое изложение основных понятий – функции, предела функции в точке, непрерывности – за год до появления первых работ Кантора по теории множеств.

В начале Ганкель приводит определение предела, данное Коши в его курсе 1821 года. Далее он начинает историю понятия предела с апорий Зенона, обсуждаемых Аристотелем; рассматривает X книгу Евклида, посвящённую классификации неизмеримых величин, и анализирует её подробнейшим образом. Потом Ганкель переходит к понятию границы (предела) в методах Архимеда. Рассматривает понимание бесконечности в различных культурах. Ганкель внимателен к работам Михаэля Штифеля, Ферма, Роберваля, Паскаля и Валлиса. Указывает на развитие понятий предела и бесконечности в работах Лейбница, отмечая сопутствующее ему развитие понятия функции. Но самую главную роль в истории понятия предела Ганкель отводит Бернарду Больцано, назвав его работы 1817 и 1851 года. Ганкель цитирует его понятие предела функции в точке, после чего обращается к понятиям интегрируемости по Риману, дифференцируемости, непрерывности (по Вейерштрассу, без упоминания) и разрывности функций. Ганкель рассматривает тригонометрические ряды и понятие предела функции в точке на языке «ε– δ». Рассматривает Ганкель также предел функции комплексного переменного и функции нескольких аргументов; затем понятие функции, непрерывной на отрезке, и далее переходит к своему принципу сгущения особенностей. Излагает он также разложение в степенные ряды, и их сходимость, рассматривает знаменитый пример Абеля, опровергающий ошибочное утверждение Коши о том, что сходящийся всюду ряд непрерывных функций имеет суммой непрерывную же функцию. Приводит основные теоремы о непрерывных функциях. Характеризует работы Дирихле, Якоби и Гаусса в теории рядов. Рассматривает понятие предела и непрерывности для определения определённого интеграла через предел интегральных сумм. Рассматривает сходимость и понятие предела суммы ряда в историческом развитии, начиная с работ Кеплера, Кавальери, Гвидо Гранди, Лейбница, Иоганна и Якоба Бернулли, Ньютона, Мак Лорена, Эйлера, Раабе, Клюгеля, Лагранжа. Особо отмечает работы Прусского аналитического института (Лейпциг) начиная с 1813 года. Ганкель отмечает значение метода Ролля для развития понятия предела в теории рядов и, в частности, в работе Лагранжа «Теория аналитических функций». Ганкель отмечает изложение идей Лагранжа в учебниках Лакруа, «Курс алгебраического анализа» Коши 1821 года. Но Ганкель признаёт приоритет перед ним Бернарда Больцано в теории рядов, указывая на его ранние работы 1816 года.

Началом критического периода теории рядов по отношению к французским результатам Ганкель называет 1826 год, обращение к традициям Гаусса, работу Абеля 1826 года, публикации в журнале Крелле. На этом заканчивается исторический обзор Ганкеля, намеренно не коснувшегося имён современников и соотечественников.

В 1873 году Карл Вейерштрасс в «Речи, произнесённой при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года» [11] говорит о необходимости обращаться к истории математики: «В страницах мало читаемых сборниках научных учреждений, а также в обширной научной переписке учёных прежних времён заключается громадное количество материала, из которого всякий, кто сумеет, может вычитать многое побуждающее к собственной работе, попутно может и научиться многому полезному» [11, с. 1327]. Сам Вейерштрасс следовал этому правилу и обращался к классикам математического анализа, что мы видим в его лекциях 1886 года по основаниям теории функций [12], где он рассматривает историю возникновения понятия функции, сравнивает определения Якоба Бернулли, Лейбница, Эйлера, Лагранжа, даёт сравнительный анализ понятия функции у Лейбница и Иоганна Бернулли, характеризует подходы к понятию функции Карно, Коши, Дирихле.

В 1897 году на смерть Вейерштрасса откликнулся М.А. Тихомандрицкий, произнеся на заседании Харьковского математического общества памятную речь с обзором творчества Вейерштрасса [13].

В 1906 году в Казани в первом выпуске «Начала анализа в элементарном изложении» был опубликован «Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых» А.В. Васильева [14].

В период с 1892 по 1898 годы в «Записках Новороссийского общества естествоиспытателей» выходили «Основания теории аналитических функций» И.Ю. Тимченко – текст его магистерской диссертации. Часть первая «Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории функций» [15] была первым трудом по истории аналитических функций, что признают и зарубежные историки. В первой части содержался обзор и анализ исторических сведений от античности до XVIII века. Вторая часть «Исторических сведений», в которой Тимченко обещал продолжить исследования по теории функций XIX века и рассказать об открытии теории множеств, так и не была написана. В своё время эта работа Тимченко оказала влияние на А.П. Юшкевича.

В 1907 году в «Известиях Томского технологического института» была опубликована магистерская диссертация В.Л. Некрасова «Строение и мера линейных точечных областей» [16]. Защищал диссертацию Некрасов в Московском университете одновременно с И.И. Жегалкиным. Первая глава его диссертации содержит исторический обзор теории точечных областей. Наряду с развитием теории функций он выделяет появление теории аргумента, понятия области начиная с работ Больцано, далее очень тщательно фиксирует появление работ по теории множеств, теории меры, появление понятий внутренней и внешней точки множества в работах математиков конца XIX – начала XX веков.

В 1908 году вышел IV том Лекций по истории математики Морица Кантора [17], посвящённый периоду 1758– 1799 годов.

1910 год. Феликс Клейн (Felix Christian Klein, 1849–1925) преподавал в Эрлангене, Мюнхене, Лейпциге и Геттингене. Основные работы в области геометрии. Ещё в 1893 году Клейн читал лекции по истории математики для участников Математического Конгресса в Чикаго, эти лекции были переведены на польский язык в С. Дикштейном и изданы в Варшаве в 1899 году.

С 1910 года Клейн работал над историей математики XIX века. Во всех его исследованиях Клейна отличал поиск внутренних связей между различными областями математики. Историю математики он излагает во взаимосвязи её разделов и в тесной связи с запросами техники, физики, астрономии, геодезии. В 1926 году вышла его книга «Лекции о развитии математики в XIX столетии» [18, в русском переводе 19]. Он даёт историю развития математики в немецкой, французской и английской математических школах, уделяя внимание проблемам обоснования анализа. Клейн высоко оценивает обоснование анализа Коши, заметив, что понятие непрерывности функции в точке было до него сформулировано и проанализировано Больцано, которого Коши не цитирует. Говоря о немецкой школе математического анализа, Клейн высоко ставит Гаусса и в то же время признаёт за Дирихле роль тонкого интерпретатора таких основных понятий анализа, используемых Гауссом, как условная сходимость рядов. Клейн выделяет основание в 1826 году журнала Крелле как важный фактор развития математики. Особенно высоко Клейн характеризует достижения и школу Вейерштрасса, в семинаре которого он участвовал, что не мешало ему ярко и часто субъективно критиковать некоторые научные методы Вейерштрасса. Клейн выделяет источники творческих поисков Вейерштрасса: «историческое наследство в виде проблемы абелевых функций, сформулированных Якоби, и систематичность его мышления, заставившая его довести начатое изучение до степени законченного исследования» [19, т. 1, с. 330]. Но Клейн замечает, что в отличие от Римана, Вейерштрасс не черпал проблемы из приложений математики и в отличие от Кронекера не пользовался никаким философским логическим постулатом.

В 1924 году вышел 6 том «Истории элементарной математики» Иоганна Тропфке [20], посвящённый истории математического анализа и аналитической геометрии.

Интересны историко-математические работы Н.Н. Лузина: Доклад 1927 года с дополнениями 1933 года «Современное состояние теории функций действительной переменной» [21], где он подробно анализирует все противореция развития теории функций конца XIX – начала XX веков; а также его статья в Большой Советской Энциклопедии 1935 года «Функция» [22], где он рассматривает историю понятия функции от И. Бернулли (1727 г.) до С.Н. Бернштейна (1925 г.).

В 1928 году вышла очень удобная справочная книга американского историка математики Флориана Кеджори (1859–1930) «История математических обозначений» [23].

В 1935 году вышел перевод на русский язык «Анализа бесконечно малых» Лопиталя под редакцией, со вступительной статьёй и примечаниями А.П. Юшкевича [24]. Укажем также важные работы А.П. Юшкевича по истории понятия предела «Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке» [25], Хрестоматия по истории математики. Математический анализ [26], «Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса» [27]

В 1972 году вышел Второй том «Истории математики» под редакцией А.П. Юшкевича «Математика XVIII столетия» с главой «Дифференциальное и интегральное исчисление», написанной Юшкевичем [28].

В 1951 году вышли «Очерки по истории теории аналитических функций» [29], где выделена роль российских математиков Эйлера, Лобачевского и Чебышёва в развитии теории функций комплексной переменной. Его же переработанная и дополненная «Теория аналитических функций» вышла в 1981 году в книге «Математика XIX века» [30].

В 1958 году на русском языке появилась статья К. Рыхлика «Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано»[31], посвящённая исследовании написанной около 1830 года неопубликованной рукописи Больцано «Учение о величинах».

В 1963 году вышла «История математики» К.А. Рыбникова, в которой он внимательно исследует роли О.Коши, Б.Больцано и К.Вейерштрасса в развитии понятия непрерывности [32].

1965, 1975, 1976, 1982 годы. Ф.А. Медведев**.** Истории теории функций и теории множеств посвящены работы моего учителя, московского историка математики Ф.А. Медведева (1923–1993). Помимо статей в историко-математических изданиях, он написал книги «Развитие теории множеств в XIX веке»[33], «Очерки истории теории функций действительной переменной» [34], «Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX– XX вв.» [35], «Ранняя история аксиомы выбора[36]. В его работах дан подробный разбор математических идей XIX века. Отметим важную для нас статью Ф.А. Медведева «Об определении понятия функции у Лобачевского и Дирихле» [37].

В 1965 году вышла статья С.С. Петровой «Принцип Дирихле в работах Римана»[38].

1966 год. Роли тригонометрических рядов во взаимосвязи с разделами анализа посвящено глубокое исследование А.Б. Паплаускаса «Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега» [39], изданное в 1966 г.

В 1970 году вышла статья английского историка математики Айвара Граттан-Гиннесса «Больцано, Коши и «Новый Анализ» начала XIX века» [40]. Эта статья подробно рассмотрена нами в пятой главе.

В 1971 году вышла статья А.В. Дорофеевой «Формирование понятия непрерывной функции»[41], в которой рассматривается история вопроса от античности до работ Коши.

1973–1978 гг. П. Дюгак. Большой вклад в историографию анализа сделал французский исследователь боснийского происхождения Пьер Дюгак (Pierre Dugac, Dugak 1926–2000). Ему принадлежат находки ценных математических документов, в их числе первые лекции Вейерштрасса, и исследования по истории XIX века. Назовём среди них статьи о Шарле Мере [42], Карле Вейерштрассе[43], Рихарде Дедекинде [44], по истории полных пространств [45], и «Основания анализа» [46], а также его с соавторами большая «История анализа: о концепции предела и сопутствующих понятиях» [47]. На русском языке есть небольшая статья Дюгака «Понятие предела и иррационального числа. Концепции Шарля Мерэ и Карла Вейерштрасса» [48].

1978 год. Истории понятия связности в топологии посвящена наиболее уважаемая топологами статья Уайлдера «Развитие топологического понятия «связаность» [49], хотя он рассматривает развитие понятия, начиная с Фреше и Хаусдорфа.

С 1979 года выходят работы Йозефа Даубена по истории теории множеств. Назовём его книгу «Георг Кантор. Его математика и философия бесконечности» [50].

В 1981 году вышла статья Э. Ноеншвандера по истории теории функций комплексной переменной и связях французской математической школы с Риманом и Вейерштрассом, о трёх направлениях обоснования теории функций комплексной переменной, исходящих от Коши, Римана и Вейерштрасса [51].

В 1981 году вышла книга американской исследовательницы Юдит Грабинер «Происхождение строгого исчисления Коши» [52], её статья «Смена концепции изменения: производная от Ферма до Вейерштрасса» [53], а также очень полемичная статья «Кто дал вам Эпсилон? Коши и происхождение строгого исчисления» [54].

В 1985 году появилась очень хорошая статья датской исследовательницы истории математики Кирсти Андерсен «Метод неделимых Кавальери» [55].

В 1985 году вышла книга П.Я. Кочиной «Карл Вейерштрасс»[56]. В книге содержится анализ развития концепций числа и функции в лекциях Вейерштрасса [56, с. 92–101], а в приложении приводится её перевод статьи А.Пуанкаре «Математическое творчество Вейерштрасса» [56, с. 246–253].

В 1986 году вышла книга итальянского историка математики Умберто Боттаццини «Высшее исчисление: История действительного и комплексного анализа от Эйлера до Вейерштрасса» [57], в которой подробно рассматривается процесс арифметизации анализа (с. 257–294), спорам по поводу строгости доказательств и определений. Много внимания уделено Больцано [57, с. 91–97], Коши, определению функции Дирихле и её интерпретации Ганкелем (там же, с. 197–201), чью строгость высоко оценил Улисс Дини. Автор обогащает картину развития анализа XIX века материалами итальянской математики – результатами и комментариями Казорати, Бетти, Дини и других.

В 1990 году появилась интересная статья С.С. Демидова о законе непрерывности у Лейбница и о понятии непрерывной функции у Эйлера [58].

В 1993 году вышли две статьи польского историка математики Витольда Венслава «Немецкие аналитики на рубеже XIX и XX века»[59], посвящённая творчеству Римана, Вейерштрасса, Неймана, Клебша, Ганкеля, Рунге, Бирмана, Гурвица, Кёбе и Бибербаха; а также «Развитие теории алгебраических и абелевых функций»[60].

Математикам Петербурга Буняковскому, Остроградскому, Сомову, Чебышёву, Коркину, Золотарёву, Сохоцкому, Поссе, А. Маркову, Сонину, Ляпунову, Стеклову, работавшим в области аналитических функций, посвящена статья Н.С. Ермолаевой «Петербургские математики и теория аналитичеких функций» [61].

В 1995 году вышла статья Э. Жиспе по истории теории множеств во Франции до 1905 года о Бэре, Бореле, Лебеге и других [62].

В 1996 году вышла книга польского тополога и исследователя истории и философии математики, профессора польского университета в Катовице Ежи Медушевского «Непрерывность» [63]. Он рассматривает историю понятия непрерывности от античности до начала XX века, уделяя особое внимание топологическому аспекту этого понятия, рассмотрев концепции основных творцов математического анализа и внутреннюю связь различных исторических тенденций.

В 1997 году вышел историко-математический курс видного историка математики, преподавателя Вроцлавского университета В.Венслава «Математика и её история» [64], содержащий подробный экскурс в историю анализа.

В 1998 году выходит большая статья «История теории континуума» Я. Харатоника [65]. Он рассматривает топологическую линию истории от Кантора и Жордана до работ польских математиков первой половины XX века.

В 1999 году вышла книга Д. Анаполитаноса «Лейбниц: представление, непрерывность и феномен пространства – времени» [66], содержащая анализ принципа непрерывности Лейбница.

В 1999 году голландский историк и философ математики и логики Теон Кетсиер в соавторстве с Яном ван Миллом написал работу «По плодам их узнаете их». Он рассматривает историю концепции непрерывности от Больцано и Коши до Вейерштрасса, Дирихле, Гейне, Кантора до работ Бореля, Арцела и Асколи, Фреше, Хаусдорфа, Брауэра с позиции истории топологии. Далее он описывает «золотой век топологии» с 1920 по 1960, и последующее развитие функционального анализа [67].

В 2002 году вышла статья об истории теоремы о симметрической производной Шварца польского исследователя Леха Грушецкого «История теоремы Шварца о равенстве смешанных производных» [68].

В 2003 году вышла «История математического анализа» от античности до первой трети XX века, написанная блестящим коллективом авторов под редакцией Г.Н. Янке [69].

В 2003 году в датском Технологическом университете города Лилеа, где работает польский математик и историк математики Лех Малигранда, под его руководством была защищена магистерская диссертация Иоганна Тима по истории математики «Непрерывные нигде недифференцируемые функции» [70], содержащая исторический обзор темы с 1830 по 2002 год.

В 2006 году вышла книга Герта Шубринга «Конфликты между обобщением, строгостью и интуицией: концепции числа, лежащие в основании математического анализа 17 – 19 веков: Франция и Германия» [71].

В 2007 году вышла книга Хосе Феррейроса «Лабиринты мысли: история теории множеств и её роль в современной математике» [72]. В ней обсуждается зарождение и роль теоретико-множественного подхода в математике 1850 – 1940 годов, различие во взглядах Кантора и Дедекинда, формирование аксиоматической теории и роль Гёделя.

В 2008 году в Индианском университете была представлена докторская диссертация Лизы Киэл «Теории непрерывности и бесконечно малых: четыре философа девятнадцатого века» [73]. Автор рассматривает историю понятия непрерывности от античности, и даёт сравнительный анализ концепций Кантора, Дедекинда, Дюбуа-Реймона и Пирса. Заметим, что исследования Пирса мало изучены в русскоязычной литературе, хотя у зарубежных историков математики заметен возрастающий интерес к его концепции, например, статья Даубена «Система взглядов Пирса на конечные множества: исследование интересов Пирса о бесконечном в связи с зарождением американской математики времён Кантора и Дедекинда» [74], а также работа бразильской исследовательницы Бачо Марии де Лурдес «Пирс и Кантор: о континууме и бесконечно малых» [75].

В 2008 году вышла книга Хейре и Уаннера «Математический анализ сквозь его историю» – популярная история математического анализа от античности до начала XX века. Книга содержит много фотографий историко-математических документов [76].

В 2008 году в журнале «История математики» вышла статья Грегори Мура «Появление открытых множеств, замкнутых множеств и предельных точек в математическом анализе и топологии» [77].

В 2009 году вышла очень подробная статья Марии Терезы Боргато о развитии понятия непрерывности у итальянских математиков от Бриоши до Пеано, и об их связях с немецкими математиками, о влиянии школы Вейерштрасса [78].

В 2009 году появилась статья Паоло Манкосу «Математический стиль», в которой он определяет различия национальных стилей в математике, в частности, характеризует стиль Вейерштрасса и его влияние [79].

В 2009 году вышла книга Давида Перкинса «Исчисление и его происхождение» [80].

В 2009 году вышла работа Джун Барроу-Грин «От каскадов к исчислению: Теорема Ролля» [81].

Отметим интересную статью Джереми Грея «Берлин 19 века» о Вейерштрассе, Римане и Кронекере [82].

Упомянем популярную иллюстрированную брошюру Американской математической ассоциации из серии «Кто дал вам эпсилон и другие сказки из истории математики» авторов Катрин Кац и Дэвида Толла «Кто дал вам сказку Коши – Вейерштрасса?»[83].

В 2010 году вышла историко-математическая статья Атанаса Атанасова «Топология и непрерывность» [84].

В 2010 вышла статья К. Чесельского и М. Мослийяна по истории функционального анализа, посвящённая истории некоторых теорем Банаха и его школы [85].

В октябре 2011 года канадская исследовательница Лаура Турнер защитила докторскую диссертацию о роли Гёсты Миттаг-Леффлёра в развитии математики и международных связей в Швеции и за её пределами в 1880 – 1920 гг.» [86]. Турнер подробнейшим образом исследовала все документы, связанные с деятельностью Миттаг-Леффлёра, уделив значительное внимание его учителю Вейерштрассу и его другу и коллеге Кантору. Миттаг-Леффлёр оценивал различное понимание континуума Вейерштрассом и Кантором, придавая большое значение связи между их определениями в трёхмерном пространстве, что позволило Миттаг-Леффлёру в 1883 – 1885 годах поставить задачи своему ученику Фрагмену. Она же обращает внимание на преемственность проблематики Кантора в тех задачах об изолированных множествах, которые Миттаг-Леффлёр ставил перед другим своим учеником, Бендиксоном, и важность результатов последнего для теории функций [86, с. 114–117].

В 2012 году вышла интересная статья Петра Блащика, Михаила Каца и Давида Шерри «Десять недоразумений из истории анализа и их разоблачение» [87]. Они критически рассматривают гипотезу об устранении бесконечно малых в работах Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса, а также о реформах строгости анализа в работах Коши. Каждый из этих авторов имеет немало работ в области истории основ анализа.

В 2012 появилось краткое наглядное пособие для преподавателей Адама Бешенеи «Краткая история теоремы о среднем значении» [88].

Итальянский исследователь Умберто Боттаццини, профессор университета в Милане, с 1981 по 2013 годы написал многое по истории математического анализа, и особенно комплексного анализа [89 – 95].

Английский исследователь Джереми Грей, профессор Open University в Великобритании, с 1986 года пишет по истории математики XIX века [96–99].

В 2013 году вышла совместная книга Боттаццини и Грея «Скрытая гармония: геометрические фантазии» [100], посвящённая истории теории функций комплексного переменного в XIX веке. Подробнейшим образом рассмотрены работы Коши, Римана и Вейерштрасса, генезис их идей в историческом, социальном и национальном контексте. На примере семидесяти учебников на девяти языках показано, как складывалась традиция обучения. Описано развитие понятия непрерывности у Коши, Римана, Вейерштрасса, Миттаг-Леффлёра, Кантора, Гарнака, Вольтерра, Арцела, Асколи, Клейна, Пуанкаре, Брауэра, Кёбе, Шварца, Бореля, Гурса, Томе, Адамара. В отношении школы Вейерштрасса дана не только историко-математическая, но и глубокая историко-социальная характеристика, причины меняющихся требований к строгости и допустимому уровню абстракции. К сожалению, не проявлен генезис понятий непрерывности и связности, хотя уделено внимание работам Фреше и формированию функционального анализа.

В 2013 году в американском издании для учителей «Convergence» вышла работа преподавателей Виттенбергского университета (Огайо) Н. Андре, С. Энгдай, А. Паркера «Анализ первых доказательств теоремы Гейне-Бореля» [101].

Литература по исследованию истории основных понятий анализа продолжает появляться, многие работы радуют глубиной и тонкостью анализа, проявлением новых внутренних связей математики, глубиной и тонкостью анализа.

Литература

1. *Montucla,* J.-E. Histoire des mathématiques. – Paris. – 1763. – T. II – 724 p.
2. *Kaestner,* A.G. Der mathematischen Anfangsgründe. 1768–1769 .
3. *Kaestner A.G.* Anfangsgründe der Analysis endlicher grössen. – Göttingen, 1794. – 590 s. – S. 198.
4. *Bossut,* Ch. Essai sur l'histoire générale des mathématiques / Ch. Bossut. – Paris. – 1802. – T. I.
5. *Больцано, Б.* Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения. Перевод Э. Кольмана // В кн. Кольман Э. Бернард Больцано. М. – 1955. – С. 170–204.
6. *Cauchy,* A. Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique / A. Cauchy // Œeuvres complètes. Série 2, tome 3. – Paris. – 1882–1974. – 471 s.
7. *Drobisch,* M.W. Grundzüge der Lehre von den höheren Gleichungen / M.W. Drobisch. – Leipzig. – 1834. – 386 S.
8. *Hankel,* H. Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter / H. Hankel. – Leipzig. – 1875.
9. *Hankel,* H. Die entwickelung der mathematik in den letzten jahrhunderten: Ein vortrag beim eintritt in den akademischen senat der universität Tübingen ein 29. April 1869. – H. Hankel. – 36 p.
10. *Hanke,* H. Grenze (Mathematik) / H. Hankel // Allgemeine Encyclopädie der Wissenschaften und Künste. Johann Samuel Ersch; Johann Gottfried Gruber; 1868–1871. – P. 185–211.
11. *Вейерштрасс,* К. Речь, произнесённая при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года / К. Вейерштрасс, пер. А.Н. Крылова // Успехи физических наук 1999 г. – Т. 169. – № 12. – С. 1325–1328.
12. *Weierstrass,* K. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner–Archiv zur mathematic. Band 9. – 272 s. Reprint 1989.
13. *Тихомандрицкий,* М.А. Карл Вейерштрасс. Речь, произнесённая на заседании математического общества 28 февраля 1897 года / Сообщения Харьковского математического общества. – Харьков 1899. – Вторая серия, том VI. – С. 35–56.

14. *Васильев,* А.В. Исторический очерк развития идеи анализа бесконечно малых / А.В. Васильев // Papilier G. Начала анализа бесконечно малых в элементарном изложении. Казанью – 1906 г. – С. 1–70.
15. *Тимченко,* И.Ю. Основания теории аналитических функций. Ч.1.: исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций. – Одесса: типография А. Шульце. – 1899 г. – XV+655 с.
16. *Некрасов,* В.Л. Строение и мера линейных точечных областей // Известия Томского технологического института. – 1907. – Т.5. – №2. – С. 1–102; Т.6 – №3. – С. 104–254.
17. *Cantor,* M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Viertel Band. Von 1759–1799. Leipzig: Teubner. – 1908. – 1113 p.
18. *Klein,* F. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Julius Springer Verlag, die 1926 und 1927.
19. *Клейн,* Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – Т.1 – М. 1937 г. – 432 с. Т. 2. – М. – Ижевск. – 2003 г. – 239 с.
20. *Tropfke,* J. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung, mit bes. Berücks. d. Fachwörter / Bd. 6. Analysis. – 1924. 2., verb. u. sehr. verm. Aufl. – 169 p.
21. *Лузин,* Н.Н. Собрание сочинений. – Т. 2. – Москва: Наука. – 1958 г. – С. 494–536.
22. *Лузин,* Н.Н. Собрание сочинений. – Т. 3. – Москва: Наука. – 1959 г. – С.319–341.
23. *Cajory,* F. A History of Mathematical Notations. London 1928. – V. I. – 451 p., Vol. 2. – 392 p.
24. *Лопиталь,* Г.Ф. Анализ бесконечно малых / Г.Ф. Лопиталь // Пер. с французского Леви под ред. А.П. Юшкевича. – ГТТИ. – 1935. – 376 с. А.П. Юшкевич. Первый печатный курс дифференциального исчисления. – С. 9–46. А.П. Юшкевич. Примечания редактора. – С. 368–376.
25. *Юшкевич А.П.* Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке / А.П. Юшкевич // Л. Карно Размышления о метафизике исчисления бесконечно-малых. М.: 1936 г.
26. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ / под ред. А.П. Юшкевича. – Москва: Просвещение. – 1977 г. – 224 с.
27. *Юшкевич,* А.П. Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – 1986. – XXX – С. 1–81.
28. *Юшкевич,* А.П. Дифференциальное и интегральное исчисление / А.П. Юшкевич // История математики. – Т. 2. – Математика XVIII столетия. – М.: Наука. – 1972. – С. 241–369.
29. *Маркушевич,* А.И. Очерки по истории теории аналитических функций. – М. –Л. – 1951 г. – 128 с.
30. *Маркушевич,* А.И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич //Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. М.: Наука. – 1981 г. – 270 с. – С. 115–255.
31. *Рыхлик,* К. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано / К. Рыхлик // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1958 г. – XI. – С. 515–532.
32. *Рыбников,* К.А. История математики. Т.2. – М.: МГУ. – 1963. – С.188–200.
33. *Медведев,* Ф.А. Развитие теории множеств в XIX веке / Ф.А. Медведев. – М.: Наука. – 1965 г. – 232 с.
34. *Медведев,* Ф.А. Очерки истории теории функций действительного переменного / Ф.А. Медведев. – М.: Наука. – 1975 г. – 248 с.
35. *Медведев Ф.А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX – XX вв. – М.: Наука. – 1976 г. – 232 с.
36. *Медведев,* Ф.А. Ранняя история аксиомы выбора / Ф.А. Медведев.. – М.: Наука. – 1982 г. – 304 с.
37. *Медведев,* Ф.А. Об определении понятия функции у Лобачевского и Дирихле. – Историко-математические исследования. – 1975. – 20. – С. 232–245.

38. *Петрова*, С.С. Принцип Дирихле в работах Римана / С.С. Петрова // Историко-математические исследования. – М. : Наука. – 1965 г. – XVI. –С. 295–310.
39. *Паплаускас*, А.Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега / А.Б. Паплаускас. М.: Наука. – 1966 г. – 278 с.
40. *Grattan-Guinness*, I. Bolzano, Cauchy and the “New Analysis” of the Early Nineteenth Century. – Archive for History of Exact Sciences. – Berlin: Springer. – 1970. – V. 6. – No. 3–5. – P. 372–400.
41. *Дорофеева,* А.В. Формирование понятия непрерывной функции. – История и методология естественных наук.– Вып. XI – Математика и механика. – М.: МГУ. – 1971 г. – С. 37–50.
42. *Dugac*, P. Charles Méray (1835–1911) et la notion de limite. – Revue d`histoire des sciences et de leur applications. – 1970. – T. 23. – No 4. – P. 333–350.
43. *Dugac P.* Éléments d’analyse de Karl Weierstrass // Archive for History of Exact Sciences. – 1973. – Vol. 10. – P. 41–176.
44. *Dugac P.* Richard Dedekind et les fondements de la mathématique. –Travaux de l’Académie internationale d’histoire des sciences. – 1976. – No 24. – 334 p.
45. *Dugac*, P. Histoire des espaces complets. –Revue d`histoire des sciences. – 1984. – T. 37. – No. 1. – P. 3–28.
46. *Dugac*, P. Fondements de l’analyse. Dans Jean Dieudonné, Abrégé d’histoire des mathématiques (1700–1900), vol. 1, Paris, Hermann, 1978, p. 335–392.
47. *Dugac*, P. Histoire de l`Analyse: Autour de la notion de limite et de ses voisinage. Paris: Ed. Vuibert. – 2003. – 419 p.
48. *Дюгак*, П. Понятие предела и иррационального числа. Концепции Шарля Мерэ и Карла Вейерштрасса. – Историко-математические исследования. – 1973 г. – 28. – С. 176–180.
49. *Wilder*, R. L. Evolution of the topological concept of "connected" / Amer. Math. Monthly 85 (1978), 720 – 726.
50. *Dauben*, J.W. Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite / J.W. Dauben. Princeton. – 1979. – 406 p.
51. *Neuenschwander*, E. Studies in the History of Complex Function Theory II: Interactions among the French school, Riemann and Weierstrass / E. Neuenschwander // Bulletin (New series) of the American Mathematical Society. – 1981. – Vol. 5. – No. 2. – September. – P. 87–107.
52. *Grabiner*, J.V. The Origin of Cauchy`s Rigorous Calculus / J.V. Grabiner Cambrige: MIT Press. – 1981. – 252 p.
53. *Grabiner*, J.V. The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass / J.V. Grabiner // Mathematical Magazine. – 1983. – Vol. 56. – 4. – PP. 195–206.
54. *Grabiner*, J.V. Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origin of Rigorous Calculus / J.V. Grabiner // American Mathematical Mounthly. – March 1983. – V. 90. – No 3. – P.185–194.
55. *Andersen*, K. Cavalieri`s Method of Indivisibles / K. Andersen // Archive for Histiry of Exact Sciences. – 31(4). – 1985. – P. 291 – 367.
56. *Кочина*, П.Я. Карл Вейерштрасс. – Москва: Наука. – 1985 г. – 272 с.
57. *Bottazzini*, U. The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. New York: Springer. – 1986. – 332 P.
58. *Демидов С.С.* «Закон непрерывности» Г.-В. Лейбница и понятие непрерывности функции у Эйлера // Историко-математические исследования. – 1990 г. – XXXII–XXXIII. – М.: Наука. – С. 34–39.
59. *Więsław*, W. Analitycy niemieccy przełomu XIX I XX wieku / W.Więsław // Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-hutniczej im. S. Staszica. – Kraków. – 1993. – Nr. 1522. – P.75 – 90.
60. *Więsław*, W. Rozwój teorii funkcji algebraicznych i abelowych / W.Więsław // Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-hutniczej im. S. Staszica. – Kraków. – 1993. – Nr. 1522. – P. 91 – 107.

61. *Ермолаева*, Н.С. Петербургские математики и теория аналитических функций / Н.С. Ермолаева // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1994 г. – XXXV. – С. 23–55.
62. *Gispert*, H. La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue… et tous les autres. Revue d`histoire des mathématiques. – 1995. – I – P. 39–81.
63. *Miodusczewski*, E. Ciągłość / E. Miodusczewski. Warszawa 1996. – 182 c.
64. *Więsław*, W. Matematzka i jej historia / W. Więsław. Opole. – 1997. – 416 p.
65. *Charatonik*, J. History of Continuum Theory / J. Charatonik // Handbook of the History of General topology, Vol. 2. – Netherland: Kluwer Academic Publishers. – 1998. – PP. 703–786.
66. *Anapolitanos*, D.A. Leibniz: Representation, Continuity and the Spatiotemporal / D.A. Anapolitanos. Springer. – 1999. – 195 P.
67. *Ketsier*, T. By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics / Teun Ketsier T. and Jan van Mill. – 43 p. Электронный ресурс: http://www.math.vu.nl/~vanmill/papers/papers1999/teun.pdf
68. *Gruszecki*, L. Historia twerdzenia Schwarza o równości pochonzch mieszanych / L. Gruszecki // Matematyka czasów Weierstrassa. Materialy XV Ogólnopolskiej Szkoly Historii Matematyki. Kołobrzeg, 28 maja – 2 czerwca 2001. – pod redakcją Stanisława Fudalego. – Szczecin 2002. – P.155–161.
69. A History of Analysis. H. N. Jahnke – ed. – AMS, USA. – 2003. – 422 p., авторский перевод с немецкого издания 1999 года.
70. *Thim*, J. Continuous Nowhere differentiable Functions / J. Thim – Lulea. – 2003. – 98 p.
71. *Schubring*, G. Conflicts Between Generalization, Rigor and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-th – 19-th Century: France and Germany / G. SChubring. Springer. – 2006. – 692 p.
72. *Ferreirós*, J. Labirynth of Thought: a History of Set Theory and its Role in *Modern* Mathematics / J. Ferreirós – Springer. – 2007. – 466 p.
73. *Keele*, L. Theories of continuity and infinitesimals: four philosophers of the nineteenth century. Submitted to the faculty of the University Graduate School in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor of Philosophy in the Department of Philosophy, Indiana University / L. Keele – May 2008. – 350 p.
74. *Dauben*. J.W. C. S. Peirce's Philosophy of Infinite Sets: a study of Peirce's interest in the infinite related to the birth of American mathematics and contemporary work of Cantor and Dedekind // Mathematics Magazine. – 1977. – 50. – No. 3. – P. 123–135.
75. *Lourdes*, Bacha Maria de. Pierce and Cantor: about the Continuum and infinitesimals / Bacha Maria de Lourdes // 24-th International Congress of History of Sciense, Technology and Medicine. – Manchester 2013. – P. 337.
76. *Hairer*, E. Analysis by Its History / E. Hairer, G. Wanner. – Springer. – 2008. – 377 p.
77. *Moore*, H.G. The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology. – Historia Mathematica. – 2008. – 35. – P. 220–241.
78. *Borgato*, M.T. Continuity and discontinuity in Italian mathematics after the inification: from Brioschi to Peano / M.T. Borgato // Organon. – 2009. – 4. – P. 219–231.
79. *Mancosu*, P. Mathematical Style / P. Mancosu. 2009. – Электронный ресурс: http://plato.stanford.edu/entries/mathematical-style/
80. *Perkins*, D. Calculus and its origin / D. Perkins. // USA: MAA. – 2012. – 180 p.
81. *Barrow-Green*, J. From cascades to calculus: Rolle`s Theorem / J. Barrow-Green // The Oxford handbook of the History of mathematics. – Oxford. – 2009. – P.737–754.
82. *Gray*, J. Berlin in the 19-th Century / J. Gray // Newsletters of the European Mathematical Society. – 2009. – 72. – P.29–33.

83. *Katz*, K. Who gave you the Cauchy–Weierstrass tale? // Who gave you the Epsilon & other Tales of Mathematical History / K. Katz, D. Tall. – 20 p. Электронный ресурс: https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:2a9XpvZTK8QJ:www.math.biu.ac.il/~katzmik/berkeleytalk.pdf+&hl=ru&gl=ru&pid=bl&srcid=ADGEEShybYemeyzNG8ES33fwaHh9Jbcnchn9PEK-FhwZXNJCxMmExbjJ0JC3ShoctSRy6KtpsWEweDUuNUVTNP49g1F2hetrAMIbXQZc2OKGHUgNarjOMhHeAvSPcpPE6st1fwWUOtD0&sig=AHIEtbRUU4_FOnwfgq6-2Mpn0m3Qv4TsqA

84. *Atanasov*, A. Topology and Continuity / A. Atanasov // Columbia Science Review. 2010 – 6(2). – p.33–35.

85. *Ciesielski*, K. Some remarks on the history of Functional Analysis / K. Ciesielski, M.S. Moslehian // Annals of Functional Analysis. – 2010. – 1. – P.1–12.

86. *Turner*, L. Cultivating Mathematics in an International Space: Roles of Gösta Mittag-Leffler in the Development and Internationalization of Mathematics in Sweden and Beyond,1880 – 1920 / L. Turner. Электронный ресурс: http://css.au.dk/fileadmin/www.ivs.au.dk/css.au.dk/Turner_PhD_Thesis_2012.pdf

87. *Błaszczyk*, P. Ten misconceptions from the history of Analysis and their debunking / P. Błaszczyk, M.G. Katz, D. Sherry // ArXiv: 1202.4153. – V. I. – 19 February 2012. – P. 1– 46.

88. *Besenyei*, A. A brief History of the Mean Value Theorem / A. Besenyei. – Sarospatak, Hungary. – 2012.

89. *Bottazzini*, U. Mathematics in a Unified Italy. Pages 165–178 of: Mehrtens, H., Bos, H., & Schneider, I. (eds), Social History of Nineteenth Century Mathematics. Basel: Birkhäuser. – 1981.

90. *Bottazzini*, U. The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass / U. Bottazzini. New York: Springer. – 1986.

91. *Bottazzini*, U. The Influence of Weierstrass's Analytical Methods in Italy / U/ Bottazzini. Pages 67–90 of: Demidov, S.S., Folkerts, M., Rowe, D.E., & Scriba, C.J. (eds), Amphora: Festschrift führ Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag. – Basel: Birkhäuser. – 1992.

92. *Bottazzini*, U. Va Pensiero: Immagini della matematica nell Italia dell ottocento / U. Bottazzini. Bologna:Il Mulino. – 1994.

93. *Bottazzini*, U. Writing the History of Mathematics: Its Historical Development Chap. 3. – P. 61–95 / U. Bottazzini // Dauben, J.W., & Scriba, C.J. (eds),. Basel: Birkhäuser. – 2002.

94. *Bottazzini*, U. Complex Function Theory, 1780–1900 / U. Bottazzini // Jahnke, H. N.(ed), A History of Analysis. Providence, R. I.: American Mathematical Society. – 2003. – P. 213–259

95. *Bottazzini*, U. (eds). Changing Images in Mathematics: From the French Revolution to the New Millennium / Bottazzini U., & Dahan Dalmedico, A. New York: Routeledge. – 2001. – 320 p.

96. *Gray*, J. Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré / J. Gray. Basel: Birkhäuser. – 1986.

97. *Gray*, J. Languages for Mathematics and the Language of Mathematics in a World of Nations / J. Gray // Parshall, K. H., & Rice, A. (eds), Mathematics Unbound: the Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800–1945. – Providence R.I.: American Mathematical Society. – 2002. – 201–228 pp.

98. *Gray*, J. Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics / J. Gray. Princeton: Princeton University Press. – 2008. – 528 p.

99. *Gray*, J. Henri Poincaré: a scientific biography / J. Gray. – Princeton. – 2012. – 608 p.

100. *Bottazzini*, U. Hidden Harmony – Geometric Fantasies / U. Bottazzini, Gray J. – NY: Springer. – 2013. – 848 p.

101. *Andre*, N.R. An Analysis of the First Proofs of the Heine–Borel Theorem / N.R. Andre, S.M. Engdahl, A.E. Parker. – USA: MAA. – Loci Convergense. – 2013. – August. – Электронный ресурс: http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/an-analysis-of-the-first-proofs-of-the-heine-borel-theorem-conclusion .