УДК 51(091)

Галина Ивановна Синкевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Galina Ivanovna Sinkevich,
PhD in phys&math., Associate Professor
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering)
E-mail: galina.sinkevich@gmail.com

МЕТАФИЗИКА РИХАРДА ДЕДЕКИНДА

RICHARD DEDEKIND's METAPHYSICS

Аннотация. В XIX веке в математике проходит реформа строгости и обоснования, начатая О. Коши и продолженная К. Вейерштрассом. Теория множеств, создаваемая как обобщение арифметики, стала основой математики. Проблемы математического анализа – понимание действительного числа и непрерывности – стимулировали создание четырёх новых концепций, возникших почти одновременно, около 1872 года. Автор одной из концепций, Рихард Дедекинд (1831–1916), утверждал свободу математика создавать математические объекты при условии их непротиворечивости. В работе «Что такое числа и для чего они служат?» Дедекинд формулирует теорему о бесконечности мира представлений.

Ключевые слова: *Дедекинд, концепция действительного числа, непрерывность, метафизика.*

Abstract. In the XIX century in mathematics passes reforms of rigor and ground, begun by Cauchy and extended by Weierstrass. Set theory was created as generalization of arithmetic, but it became the foundation of mathematics. The main problems of mathematical analysis: understanding the real number and continuity, stimulated the creation of four new concepts that appeared almost simultaneously, around 1872. The author of one of concepts, Richard Dedekind (1831–1916), claimed the freedom to create math mathematical objects with the condition of their consistency. In "Was sind und was sollen die Zahlen?" Dedekind formulated a theorem on the infinity of the mental world.

Keywords: *Dedekind, concept of a real number, continuity, metaphysics.*

Опубликовано: Синкевич Г.И. Метафизика Рихарда Дедекинда // Доклады 71-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета. Санкт-Петербург: СПбГАСУ. – 2015. – С. 31-35. ISBN 978-5-9227-0592-9, ISBN 978-5-9227-0593-6.

Математика XIX века создала удивительный феномен: в ней возникли внутренние разделы, не имеющие прикладной направленности, развитие которых было обусловлено только самой внутренней логикой и потребностью математики. Эти исследования были направлены на обоснование математики. Новые области и разделы появились в теории чисел и числовых систем (дзета-функция Римана, системы комплексных чисел, кватернионы и принцип постоянства формальных законов Ганкеля); возникают неевклидова геометрия, теория множеств, новые концепции непрерывности и действительного числа в основаниях математического анализа, новые разделы геометрии («Эрлангенская программа» Ф. Клейна). Оказалось, что математика, не связанная физическими или геометрическими интерпретациями, свободна и может порождать собственные объекты, на основе которых далее строятся новые теории. Многие из этих открытий впоследствии оказались востребованы и в приложениях: например, топология, теория графов, функциональный анализ, теория меры, теория вероятности. Концепции действительного числа появились в одно и то же время в работах Мере, Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса [ ]. В работах Гильберта был поставлен вопрос об их непротиворечивости, а затем в середине XX века Колмогоровым была доказана эквивалентность этих аксиоматических систем [Колмогоров А.Н. К обоснованию теории вещественных чисел//УМН 1946 г. – №1. – С. 217 – 219.].

Первым обратил внимание на необходимость обосновать математику без обращения к физическим и геометрическим понятиям Бернард Больцано. В своей работе 1810 года «К вопросу об обосновании математики»[Bolzano, B. Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Prag: Karl Barth., 1810. – 65 s.] и в работах следующих лет он высказывал мысль о необходимости арифметизации математики, освобождения её от понятий времени, движения и геометрической наглядности. До XIX века доказательства осуществлялись только в геометрии; в арифметике, анализе и алгебре утверждения объяснялись, сопровождались примерами, но строгих доказательств не было. Первое в математическом анализе аналитическое доказательство привёл Больцано в статье 1817 года [Bolzano, B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege/ B. Bolzano. – Prag: Gottlieb Haase, 1817. – 60 s.]. В этой работе Больцано впервые сформулировал идею точной верхней грани, критерий сходимости последовательности, а в работах 1830-х годов сделал попытку осуществить определение числа через сечение. Заметим, что именно в работах Больцано были определены основные направления создания концепций непрерывности: принцип сходящихся последовательностей, принцип верхней грани и принцип сечения [Синкевич Г.И. Распространение и влияние идей Больцано на развитие анализа XIX века / Г.И. Синкевич // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 года. Москва: РУДН. – 2014. – С. 436–438.].

С 1821 года теоремы анализа в Париже начал доказывать Огюстен Коши. Реформу строгости в обосновании анализа, начатую им, продолжил в Берлине в своих лекциях Карл Вейерштрасс в 1856–1889 годах.

Ответом на потребность математики в обосновании понятия действительного числа и концепции непрерывности привела к появлению концепций Ш. Мере (1869 г.)[], Г. Кантора и Э. Гейне (1872 г.) [] и Вейерштрасса (в работах 1870–1880, его теоретическая арифметика, в изложении Э. Коссака, ученика Вейерштрасса, вышла в 1872 году []), []. Концепция француза Мере, основанная на последовательностях Коши, не была принята соотечественниками, её оценили лишь столетие спустя, сейчас французы называют её концепцией Мере–Кантора. Концепция Вейерштрасса была основана на понятии агрегата, приближении числа десятичными дробями и понятии точной верхней грани. Концепция Кантора, изложенная также его коллегой Гейне, была основана на фундаментальных последовательностях и сходящихся подпоследовательностях, в эквивалентной терминологии – на принципе вложенных отрезков. Концепция Дедекинда была основана на понятии сечения. В 1889 году Дж. Пеано логически обобщил концепцию Дедекинда, сформулировав первую аксиоматическую систему арифметики [Peano, G. Arithmetices principia, nova methodo exposita. Bocca, Torino, 1889. – 49 p.].

Немецкие авторы спорили о достоинствах каждой концепции, ставили вопрос о возможности установления взаимно-однозначного соответствия между геометрической прямой и числовой прямой. Структура строения этих объектов различна; прямая как континуум имела долгую историю изучения, а числовой континуум только начал рассматриваться математиками[1] XIX века. Вейерштрасс высказывал сомнения в том, что каждой точке прямой может быть поставлено в соответствие действительное число; Кантор утверждал, что это недоказуемо и постулировал это соответствие. Дедекинд на основании понятия сечения доказал непрерывность числовой прямой, непрерывность числового множества, после чего ввёл взаимно-однозначное соответствие как аксиому (1872 год, Дедекинд, Р. Непрерывность и иррациональные числа).

Рассмотрим отношение Дедекинда к свободе математического творчества, выраженное в двух его основных работах 1872 и 1888 года. Дедекинд утверждал необходимость самостоятельности арифметики, её независимости от других областей,

[1] Теоретико-множественные представления в эпоху Возрождения и в Новое время, разумеется, были, например у М. Штифеля, Г. Галилея [1. Синкевич Г.И. Михаэль Штифель (1487-1567) и теоретико-множественные представления XVI века / Г.И. Синкевич // История науки и техники. – 2013. - № 10. – С. 11-16.], но они не имели общего характера. Даже гениальные предвидения Больцано не были обоснованы теоретически, так как не был разработан логический аппарат.

«чтобы арифметика развивалась сама из себя» ([Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа / Перевод с немецкого О.С. Шатуновского. Одесса: Матезис. – 1923 г. – С. 9-31]: Стр. 16). При этом, если геометрическая прямая имеет материальную природу, то числа – это порождения человеческого ума, и математик свободен создавать их так, как считает необходимым: «Нужно создать числа таким образом, чтобы область чисел приобрела ту же полноту, или, скажем прямо, ту же непрерывность, как и прямая линия (там же). Как отрицательные и дробные рациональные числа введены путём свободного творчества, и как вычисления с этими числами должны были и могли быть сведены к законам вычислений с целыми числами, точно так же должно стремиться к тому, чтобы иррациональные числа были вполне определены через посредство рациональных чисел» (Стр. 16–17).

Стр. 18: «Принятие свойства прямой линии быть непрерывной [через сечение] есть ни что иное, как аксиома, посредством которой мы только и признаём за прямой её непрерывность, мысленно вкладываем (hineindenken) непрерывность в прямую. Если вообще пространство имеет реальное бытие, то ему *нет необходимости* быть непрерывным. Бесчисленные его свойства оставались бы теми же, если бы оно было разрывным. И если бы мы знали наверное, что пространство не обладает непрерывностью, то, при желании, нам всё-таки ничто не могло бы сделать это непрерывным через мысленное заполнение его пробелов. Это заполнение должно было бы состоять в созидании новых точек и осуществлялось бы сообразно упомянутому принципу».

Работа Рихарда Дедекинда «Что такое числа и для чего они служат?» (1888 год) была переведена на русский язык в 1905 году и сейчас малодоступна []. Поэтому мы позволим себе привести довольно большую цитату из неё. Дедекинд утверждает существование внутреннего мира S – мира наших мыслей, независимого от внешнего мира.

Вот что пишет Дедекинд: «Числа суть свободные создания человеческого духа, и они служат средством, дающим нам легче и яснее постигать различие вещей. Строя науку о числах чисто логически и создавая в ней непрерывную числовую область, мы в состоянии точно исследовать наши представления о пространстве и времени, приводя последние в связь с созданной в нашем духе числовой областью.

Если мы точно проследим за тем, что мы делаем при счёте множества или численности вещей, то мы придём к рассмотрению особой способности нашего духа – относить одну вещь к другой, создавать соответствие между двумя какими-либо вещами или же отображать одну вещь с помощью другой; без этой способности, вообще говоря, никакая мысль невозможна…

Условимся на будущее понимать под *вещью* всякий объект нашего сознания.

Очень часто случается, что какие-либо различные вещи a, b, c,… из каких либо соображений рассматриваемые с некоторой общей точки зрения сразу бывают мыслимы в нашем сознании, мы же скажем в этом случае, что вещи a, b, c,… образуют *систему* S, и каждую из них будем называть *элементом* – они все содержатся в S, и обратно, S состоит из них…

Система S называется бесконечной, если она подобна какой-либо правильной своей части[2], в противном случае S называется конечной системой…

Теорема. Существуют бесконечные системы. *Доказательство*. Наш мир представлений, то есть совокупность S всех тех вещей, которые могут быть объектами нашей мысли, - бесконечен. Дело в том, что если s есть элемент системы S, то мысль s' об s, как о предмете нашего сознания, сама является элементом системы S. Если теперь мы будем рассматривать s' как изображение $\varphi(s)$ элемента s, то тогда мы получим в φ некоторое определённое отображение системы S, обладающее тем свойством, что изображение S'

[2] Является частью системы, не совпадая с ней.

является частью S, и притом S' очевидно – правильная часть S, так как в S существуют такие элементы (например, наше собственное «я»), которые отличны от всякой такой мысли s', и, следовательно, не содержатся в S'. Наконец, очевидно, что, если a и b – различные элементы в S, то их изображения a' и b' - также различны, то есть отображение φ – однозначно (подобно). Таким образом, S – бесконечна» [Дедекинд, Р. Что такое числа и для чего они служат? / Перевод с немецкого Н. Парфентьева. Казань, 1905 г. – 80 с. – с. 30].

Кантор, который горячо обсуждал с Дедекиндом создаваемую им теорию множеств, с восторгом относился к идеям Дедекинда. В письме к Дедекинду от 15 апреля 1882 года Кантор, обсуждая понятие связности континуума, писал [стр. 356]: «Для создания понятия пространства нет никакой внутренней необходимости представлять последнее всюду непрерывным. Вы явно обратили внимание на этот момент в Вашем мемуаре о непрерывности. Тогда казалось бы естественным вывести непрерывность пространства из внешних обстоятельств, а именно из возможности непрерывного перемещения, т.е. движения, и таким было моё мнение довольно долго.

Но теперь последнее нельзя защищать, поскольку и в столь всюду разрывном пространстве, каким является пространство, обозначенное в моём письме через A, возможно непрерывное перемещение от любой одной точки к любой другой. И можно было бы, следовательно, вообразить модифицированную механику, справедливую для пространства А?».

Период творчества Кантора и Дедекинда приходился на значительные перемены в картине мира, в физике механистическая картина сменялась релятивистской, зарождалась квантовая механика. Процессы, изучаемые физикой, требовали большей свободы интерпретации и нового математического аппарата, создание которого являлось не отражением наблюдаемых явлений, а чистым творчеством.

Дедекинд вводит математическое творчество и его объекты в ранг математических понятий. Определяемый им мир S – мир мыслей – становится частью математики. Математика из науки, открывающей истины подобно астроному, преобразуется в науку, создающую истины подобно художнику или писателю.

Литература:

1. Sinkevich G. Concepts of a Numbers of C. Méray, E.Heine, G. Cantor, R. Dedekind and K. Weierstrass // Technical Transactions. Kraków. 2014. 1-NP. p. 211-223. [статья в журнале, 1 автор]
2. Колмогоров А.Н. К обоснованию теории вещественных чисел //УМН. 1946. – №1. – С. 217 – 219. [статья в журнале, 1 автор]
3. Bolzano B. Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik / B. Bolzano. Prag: Karl Barth., 1810. – 152 s. [иностранный источник, 1 автор]
4. Bolzano, B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege/ B. Bolzano. – Prag: Gottlieb Haase, 1817. 60 s. [иностранный источник, 1 автор]
5. Синкевич Г.И. Распространение и влияние идей Больцано на развитие анализа XIX века // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 года. Москва: РУДН. 2014. С. 436–438. [статья в сборнике, 1 автор].
6. Méray Ch. Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données / Ch. Méray // Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat. 1869, (2) 4. P. 280–289. [иностранный источник, 1 автор]
7. Синкевич Г.И. Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере // Труды X Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль: Издательство ЯГПУ. 2012. С. 180–185. [статья в сборнике, 1 автор].
8. Синкевич Г.И. Генрих Эдуард Гейне. Теория функций //Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск

18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера. СПбГАСУ. СПб. 2012. С. 6 – 26. [статья в сборнике, 1 автор]

9. Гейне Э. Лекции по теории функций /Перевод и примечания Г.И.Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. СПб. 2012. С. 26 – 46. [статья в сборнике, 1 автор].
10. Синкевич Г.И. Понятие непрерывности у Дедекинда и Кантора // Труды XI Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль: Издательство ЯГПУ. 2013 г. С. 336–347. [статья в сборнике, 1 автор].
11. Кантор Г. Труды по теории множеств. Москва: Наука. 1985. 485 с. [книга, 1 автор]
12. Kossak E. Die Elemente der Arithmetik, Programm Fried. / E. Kossak //Werder. Gymn., Berlin, 1872. [иностранный источник, 1 автор].
13. Синкевич Г.И. Формирование топологических понятий в лекциях Вейерштрасса 1886 года // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 19. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. СПб. 2013. С. 4 – 23. [статья в сборнике, 1 автор].
14. Peano G. Arithmetices principia, nova methodo exposita/ G. Peano. Bocca, Torino, 1889. 49 p. [книга, 1 автор].
15. Синкевич Г.И. Михаэль Штифель (1487–1567) и теоретико-множественные представления XVI века // История науки и техники. 2013. 10. С. 11–16.[статья в журнале, 1 автор].
16. Dedekind R. Stetigkeit und irrationale Zahlen/ R. Dedekind. Braunschweig, Vieweg 1872. 35 s. [книга, 1 автор].
17. Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа / Перевод с немецкого О.С. Шатуновского. Одесса: Матезис. 1923 г. С. 9-31. [книга, 1 автор]
18. Dedekind R. Was sind und was sollen die Zahlen? / R. Dedekind.1. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1888. – 79 s. [книга, 1 автор]
19. Дедекиндъ, Р. Что такое числа и для чего они служат? / Перевод с немецкого Н. Парфентьева. Казань, 1905 г. – 80 с. [книга, 1 автор]