КОЛИН МАКЛОРЕН (1698-1746) И МЕТОД СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ЕГО «ТРАКТАТЕ О ФЛЮКСИЯХ» 1742 ГОДА.

Г.И. Синкевич

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,

Санкт-Петербург, Россия

galina.sinkevich@gmail.com

Аннотация. Метод сходящихся последовательностей начал формироваться в работах Архимеда при вычислении длин, площадей и объёмов. Своё продолжение он получил в работах Б. Кавальери, Дж. Грегори; был развит Маклореном. Обоснование метода было продолжено в работах К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коши, Г. Дарбу, и завершено Г. Кантором как метод вложенных отрезков на языке последовательностей Коши-Кантора.

Ключевые слова: метод сходящихся последовательностей, лемма о вложенных отрезках, Архимед, Грегори, Маклорен.

Abstract. The method of convergent sequences began to form in Archimedean' works when he calculated lengths, areas and volumes. The researches were continued by B. Cavalieri, J. Gregory; the method was stated by C. Maclaurin. Justification of the method has been continued in works of K.Gauss, B. Bolzano, A. Cauchy, G. Darboux, and completed by G. Cantor as a method of nested (closed) intervals in terms of Cauchy-Cantor sequences.

Keywords: Archimedes, Gregory, Maclaurin, method of convergent sequences, nested intervals.

Колин Маклорен (МакЛорин) родился в приходе Кильмодан области Хайленд на западе Шотландии, в семье священника. Осиротев в 8 лет, воспитывался в семье дяди, священника соседнего прихода. Мальчик овладел латынью и греческим и в 11 лет поступил в университет Глазго. Его профессором был Роберт Симсон (1687-1768), математик, переводчик и издатель античных математиков. Его любовь к чтению первоисточников передалась Маклорену, увлёкшемуся Евклидом, а затем Архимедом. В 15 лет Маклорен окончил университет и получил диплом магистра, написав диссертацию о силе тяготения.

В 15 лет Маклорен получил первые математические результаты, защитив магистерскую диссертацию о силе тяготения. Последующий год был посвящён подготовке к должности пастора, но господствующий кальвинизм вызывал протест Маклорена. Он посвятил себя занятиям математикой, прожив 4 следующих года у дяди. Его математическая подготовка настолько возросла, что его пригласили занять профессорскую кафедру в Абердине (Marischal College, Aberdeen). Маклорену ещё не исполнилось 19 лет. Он выдержал 10-дневные испытания и стал самым молодым профессором[1]. В 1719 году Маклорен привёз в Лондон свою «Geometria organica, sive Descriptio linearum curvarum universalis» (Органическая геометрия или описание линий кривых, издана в 1720 году). Тогда же он стал членом Лондонского королевского общества за две своих работы, опубликованные в «Philosophical Transactions» в 1718 и 1719 годах, о кривых различных порядков и о построении кривых. Маклорен познакомился с Ньютоном и Галлеем. Дружбу с Ньютоном он считал величайшим счастьем своей жизни.

В 1722 году Маклорен отправился в континентальную Европу в качестве наставника сына лорда Полверса (Lord Polwarth)[2]. Они посетили Францию, где Маклорен познакомился с ведущими математиками Франции, и поселились в Лотарингии. Маклорен написал труд о гравитации, который в 1724 году получил приз Парижской академии наук. В Монпелье его подопечный умер от внезапной лихорадки, и Маклорен вернулся в Абердин. Вместо летних каникул они провели в Европе три года. Длительное отсутствие Маклорена вызвало недовольство Совета колледжа университета Абердина; было назначено рассмотрение его проступка, он был прощён, но вскоре перешёл в Эдинбургский университет, где сначала замещал (deputy) престарелого профессора Джеймса Грегори[3], а после его ухода занял его место.

Ньютон принял горячее участие в судьбе Маклорена, рекомендовав его в Эдинбургский университет и даже выразив желание платить ему жалование, буде в университете не найдётся денег. Сохранилось письмо Ньютона к Маклорену: «Я очень рад узнать, что у вас есть перспектива совместной работы профессором математики в Эдинбурге с господином Джеймсом Грегори, не только потому, что вы мой друг, но и в силу ваших способностей и осведомлённости в последних достижениях математики, равно как и в полном знании её состояния. Сердечно желаю вам прочного успеха и буду рад услышать о вашем избрании. Искренне ваш верный друг и покорный слуга И. Ньютон[4]» [1]. Второе письмо было адресовано Лорду Ректору Эдинбурга, без ведома Маклорена: «Я с радостью понимаю, что мастерство господина Маклорена в математике имеет по праву заслуженную хорошую репутацию в своей среде; чтобы заверить вас, что я не обольщаюсь по его поводу, а также способствовать его вхождению в должность заместителя господина Грегори, я готов (если вы позволите)

---

[1] Лагранж в 19 лет тоже стал преподавателем, но не был профессором.

[2] По другим источникам, он был наставником и компаньоном Джорджа Юма, сына 2-го графа Марчмонта.

[3] Джеймс Грегори (1666-1742), профессор математики и племянник известного математика Джеймса Грегори (1738-1675), брат астронома и математика Давида Грегори (1659-1708).

[4] "I am very glad to hear, that you have a prospect of being joined to Mr James Gregory in the Professorship of the mathematics at Edinburgh, not only because you are my friend, but principally because of your abilities, you being acquainted as well with the new improvements of mathematics, as with the former state of those sciences. I heartily wish you good success, and shall be very glad of hearing of your being elected; I am, with all sincerity, your faithful friend and most humble servant, I Newton".

ежегодно вносить двадцать фунтов в его обеспечение, пока не освободится место господина Грегори и пока я жив, я буду выплачивать это на его счёт в Лондоне[5]» [1].

Маклорен был принят в университет Эдинбурга, ему было назначено жалование от университета. В Абердине об этом узнали из газетных новостей. Маклорен серьёзно отнёсся к своим новым обязанностям, заявив, что «он вынужден распределить более сотни молодых джентльменов, ежегодно посещающих его лекции, и имеющих различную подготовку и навыки, на четыре или пять классов, с каждым из которых он будет работать целый час ежедневно с первого ноября по первое июня[6]»[1,2].

Обычно занятия начинались в семь часов утра. В первый год изучалась общая и десятичная арифметика, Евклид, плоская тригонометрия, логарифмы с приложениями к геодезии и фортификации, элементы алгебры; раз в две недели были лекции по географии.

На второй год он читал лекции по алгебре, измерению тел, сферической тригонометрии и учение о сфере и кониках, с применением к артиллерии, астрономии и оптики. На третий год он читал курс, включающий перспективу, астрономию и оптику, Начала (Евклида), прямой и обратный метод флюксий. Кроме того, с декабря по апрель трижды в неделю он давал демонстрации прикладной философии и, время от времени, практической астрономии, а также теории вероятности.

Он был блестящим лектором, и современники ценили его приятный голос и яркое воображение. «Все лекции господина Маклорена отличались такой ясностью метода и изложения, что его доказательства редко нуждались в повторении; он так заботился о ясности изложения для своих учеников, что, если в какой-то момент ему казалось, что они неполно усвоили смысл, или при тщательной проверке он обнаруживал, что они не могли легко доказать обоснованные им теоремы, он более склонялся к тому, что сам использовал неясные выражения, нежели к тому, чтобы требовать от них ума или внимания; и поэтому он повторял доказательство другим способом или пытался изложить вопрос в ином освещении для того, чтобы они получили о нём лучшее представление»[2].

В 1727 году умер Ньютон, их восьмилетняя дружба принесла свои плоды в творчестве Маклорена, в зрелом и систематическом изложении трудов Ньютона.

---

[5] "I am glad to understand that Mr Maclaurin is in good repute amongst you for his skill in mathematics, for I think he deserves it very well; and to satisfy you that I do not flatter him, and also to encourage him to accept the place of assisting Mr Gregory, in order to succeed him, I am ready (if you please to give me leave) to contribute twenty pounds per annum towards a provision for him, till Mr Gregory's place become void, if I live so long, and I will pay it to his order in London".

[6] "upwards of a hundred young gentlemen attending his lectures every year, who being of different standing and proficiency he was obliged to divide them into four or five classes, in each of which he employed a full hour every day, from the first of November to the first of June".

К 1733 году Маклорен «жил холостяком, но созрев как для общества, так и для размышлений, и, желая объединить более изысканные и тонкие наслаждения с философией, женился на Анне, дочери Вальтера Стюарта, заместителя генерального прокурора при последнем короле Шотландии. У них родилось семеро детей»[2].

Маклорен многое сделал для развития интеллектуальной жизни Эдинбурга. В 1739 году он предложил Медицинскому обществу Эдинбурга расширить тематику публикаций, добавив физику и историю античности, что позже, уже после его смерти, привело к созданию Королевского общества Эдинбурга. Маклорен участвовал в проектах, среди которых были организация исследований опасных участков шотландского побережья, подготовка таблиц смертности фонда вдов и сирот из семей священников и профессоров университетов, создание физической лаборатории и обсерватории в университете[7]; планы строительства университета, от которых пришлось отказаться из-за неустойчивости политической ситуации. В 1740 году Парижская академия наук присудила ему премию за работу о приливах и отливах («De causa physica fluxiis et refluxiis maris»). Премия была разделена между ним, Даниилом Бернулли и Леонардом Эйлером.

Известна роль Маклорена в обороне Эдинбурга. В конце августа 1745 началось Второе восстание якобитов, войска Стюартов двинулись к Эдинбургу. Маклорен, как приверженец вигов, одним из первых осознал эту опасность и в течение двух недель обороны Эдинбурга принял на себя заботы об охране городских стен, организации и вооружения добровольцев, укреплении порта и шлюзов. Работа под руководством Маклорена велась днём и ночью. Но он сталкивался со скрытым противодействием сторонников тори в руководстве города. В эти дни Маклорен вёл дневник, который сохранился и опубликован. Город был сдан 16 сентября. У Маклорена не было иного выбора, кроме как бежать из города. Ночью он отправился верхом в Англию, к архиепископу Йоркскому, который с радостью предоставил ему убежище. Как с горечью писал об этом Маклорен, «он жил там настолько счастливо, насколько может человек в неизвестности о судьбе своей семьи, который видит разорение своей страны»[2]. В декабре он счёл безопасным вернуться в Эдинбург. Зима была холодная и снежная, путешествие было трудным, к тому же Маклорен упал с лошади. В Эдинбурге он вновь начал работать, хотя обстановка была неспокойной. Как он писал 14 декабря капеллану архиепископа, «сегодня открылся колледж, но перспективы сомнительны. В умах брожение, за эти несколько дней якобитов всё больше в общественных местах города»[1]. Его жена тоже получила свою долю неприятностей. «Не менее восьми мужчин квартировали в моём доме, что

[7] Маклорен предложил финансировать обсерваторию из сборов, полученных за его лекции по практической физике.

намного превосходит его вместительность; повод очевиден. Моя жена, несмотря на недомогание, вынуждена их кормить, чтобы избежать грабежа»[1].

К этому времени сам Маклорен был болен, его болезнь, водянка, прогрессировала, несмотря на лечение. Он по-прежнему продолжал писать заключительные главы своего изложения философии Ньютона: «трудно сказать, насколько нужно и полезно сразу постигать знание; следует овладевать знаниями постепенно, чтобы, сравнивая новые объекты или новые открытия с уже нам известными, получить полное и систематическое представление; мудрый человек должен пройти через некое младенчество знаний, далёкое от нужд практики[8]»[2].

Зрение Маклорена слабело. 14 июня 1746 года в возрасте 48 лет Маклорен умер. Похоронен в Эдинбурге [3].

Другие его сочинения: «De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus», «Трактат алгебры», «Трактат флюксий» (Эдинбург, 1742), «Изложение философских открытий Ньютона» (Лондон, 1748). В «Трактате о флюксиях» Маклорен использовал ряды Тейлора[9] для характеристик экстремумов и точек перегибов. Разложения функций в окрестности нуля имели более раннюю историю, ещё до Грегори и Ньютона, прежде чем они получили имя Маклорена. Некоторые разложения, например, для арктангенса, были известны ещё в Индии XIV века. Но именно изложение Маклорена как наиболее удобное в применении и педагогически понятное, сделало их популярными не только в Англии и России, но и в Европе XVIII и XIX веков, где он и Тейлор были самыми цитируемыми английскими математиками, даже у Коши, который почти никого не цитировал. В России работы Маклорена высоко ценил Эйлер, продолживший его работы, в частности, в области техники интегрирования эллиптических функций. Независимо от Маклорена и одновременно с ним Эйлер получил формулу Эйлера-Маклорена.

Маклорен занимался задачами небесной механики, в том числе проблемой притяжения эллипсоидов и равновесием сплюснутых сфероидов.

После смерти Маклорена, в 1748 г., был опубликован его «Трактат об алгебре» (Treatise of Algebra), где приведены правила решения

[8] We know not how far it is proper or necessary that we should not be let into knowledge at once, but should advance gradually, that, by comparing new objects, or new discoveries, with what was known to us before, our improvements might be more complete and regular; or how far it may be necessary or advantageous, that intelligent beings should pass through a kind of infancy of knowledge.

[9] 1715 г.

линейных и квадратичных систем для 2 и 3 неизвестных, рассмотрен случай 4-х неизвестных. Эта публикация предшествовала более общей работе Крамера, появившейся 2 года спустя. В качестве приложения к этому посмертному изданию Маклорена был «Tractatus de Linearum Geometricarum Proprietatibus generalibus» как продолжение его «Геометрии органика».

Здесь мы рассмотрим один из аспектов, изложенный в его «Трактате флюксий», содержащем систематизированное и понятное изложение метода Ньютона. Трактат был написан с целью защитить позицию Ньютона от критики Дж. Беркли (в сочинении «Аналист», 1734).

Маклорен стремился показать близость метода Ньютона и античного метода исчерпываний. Созданный Евдоксом и изложенный в «Началах» Евклида, метод исчерпываний был гениально использован Архимедом в «Досифеевском цикле» - пяти работах, посвящённых вычислению длин, площадей и объёмов. Архимед приближал искомую величину последовательностями величин с избытком и недостатком, и показывал, что искомое значение не может быть соответственно не больше и не меньше этих величин; либо показывал, что отношение приближающих величин приближается к единице.

В XVII веке этот метод продолжил итальянский математик, ученик Галилея, Б. Кавальери (1598-1647). Его традицию перенял шотландский математик Джеймс Грегори, который во время пребывания в Италии в 1664-1667 годах учился у Стефано дельи Анджели (Stefano degli Angeli), ученика Кавальери. В Пизе в 1668 году вышли две книги Грегори «Истинная площадь круга и гиперболы» и «Общие разделы геометрии»[5, 6], где, как он сам пишет, применяется метод Архимеда для вычисления криволинейных площадей, но, в сочетании с более удобным и кратким методом неделимых, принадлежащим Кавальери.

Грегори, выражая все соотношения в пропорциях вписанных и описанных фигур, строил последовательности, приближающиеся к истинному значению площади гиперболического сегмента с избытком и недостатком. Таким образом, традиция Архимеда получила новое развитие на базе метода неделимых, что позволило упростить работу с пропорциональными величинами (длинами, площадями и объёмами). Грегори впервые применил термин «сходимость».

Маклорен видел трудности для начинающих понимания метода на языке пропорций[10], и недостаточную обоснованность метода неделимых[11]. Он допускал использование бесконечно малых в геометрии, как это делал Ньютон: «Были и такие, кто допускал большее использование бесконечно больших и бесконечно малых в геометрии. Из их числа сэр Исаак Ньютон… Он рассматривал величины, образуемые потоком или движением, и показал, что скорости образуемых движений должны быть сравнимы друг с другом. В этой доктрине всё естественно и согласно античной геометрии. Но то, что он изложил этот предмет очень кратко, его лаконичность, создало повод для упрёков его методам» [7, с. 2].

«Когда уверенность в любой части геометрии поставлена под сомнение, наиболее действенным способом, чтобы пролить на истину полный свет, и предотвратить споры, будет вывести её из аксиом или первичных принципов с помощью безупречного доказательства, по обычаю античных геометров. Это составляет наше намерение в этом трактате, в котором мы намерены не переделывать понятие флюксии сэра Исаака Ньютона, а объяснить и обосновать его метод путём умозаключений (дедукции) из нескольких очевидных истин, в таком строгом порядке, и интерпретируя его, абстрагироваться от всех принципов и постулатов, которые могут потребовать воображения каких-то величин, но так, чтобы легко можно было представить себе их реально существующими. Мы не будем рассматривать какую-либо часть пространства или времени как неделимую или бесконечно малую; но нам придётся рассматривать точку как предел (as a term or a limit) линии, а момент как предел (as a term or a limit) времени: и не будем разлагать кривую линию или криволинейную поверхность на прямолинейные элементы любого рода. В ходе реализации принципов этого метода мы будем лучше воспринимать это, избегая таких предположений: но после того будут продемонстрированы короткие и лаконичные способы выражения, хотя они и менее точны, но допустимы, если нет опасности появления в науке неопределённости или неясности из-за их применения, или от их употребления в диспутах. Метод обоснования, который был изобретён автором флюксий, точен и элегантен; но мы полагаем начать несколько иным способом, менее удалённым от методов древних, что позволит облегчить переход к его методу для начинающих (для кого,

[10] И в отсутствии понятия функции, возникшего впервые у Лейбница.

[11] Так как это учение не согласуется с принципами строгой геометрии, то вскоре оказалось, что в нём содержится опасность получения ложных выводов – Метод флюксий, с.1.

главным образом, и предназначен этот трактат), и устранить некоторые возражения, направленные против него»[ibid., с. 2-3].

«У них был фундаментальный принцип, что разность двух любых неравных величин, из которых большая превышает меньшую, может быть сложена сама с собой столько раз, что она превысит любую предложенную конечную величину того же рода; и так или иначе они основывали свои пропорции в отношении криволинейных фигур на этом принципе, что очевидно из доказательств и из чётко выраженных высказываний Архимеда, который признаёт, что это основа, на которой он установил свои открытия, и ссылается на это как на принятое античными авторами в доказательстве всех такого рода пропорций. Но этот принцип кажется несовместимым с допущением бесконечно малых величин или разностей, которые, будучи многократно сложены сами с собой, никогда не станут равными никакой конечной величине» [ibid, с. 4].

«Для того, чтобы эти общие рассуждения, с помощью которых они доказывали все свои теоремы такого рода, можно было бы раскрыть более лёгким способом, мы будем представлять круги и многоугольники с помощью прямых линий, таким же образом, как выражаются все величины в пятой книге Элементов» [ibid., с. 5].

Пусть отрезки прямых *AB* и *AD* представляют две круговые области, которые мы сравниваем; и пусть *AP*, *AQ* представляют два любых многоугольника, вписанных в эти окружности. Если две переменные величины *AP* и *AQ*, находятся в неизменном отношении друг к другу, приближаясь в то же время к двум определённым величинам *AB* и *AD*, так что они могут отличаться менее, чем на любую назначенную величину, то отношение этих пределов *AB* и *AD*, должно быть таким же, как неизменное отношение величин *AP* и *AQ*: и это можно рассматривать как наиболее простую и фундаментальную пропорцию этой доктрины, с помощью которой мы получаем возможность сравнивать криволинейные пространства в некоторых более простых случаях[12]» [7, с. 6].

Маклорен усиливает это классическое положение следующим построением: «В общем, пусть любая определённая величина *AB* будет всегда пределом между двумя переменными величинами *AP*, *AQ*, которые по предположению приближаются к этому пределу и друг к другу, так что

[12] Ссылка на изображение: https://ia601404.us.archive.org/BookReader/BookReaderImages.php?zip=/24/items/atreatisefluxio00conggoog/atreatisefluxio00conggoog_tif.zip&file=atreatisefluxio00conggoog_tif/atreatisefluxio00conggoog_0020.tif&scale=2&rotate=0

разность между ними может стать меньше любой назначенной величины, или так, что отношение *AP* к *AQ* может стать меньше, чем любое заданное отношение большей величины к меньшей. Предположим также, что любая другая определённая величина *ab* является пределом между переменными *ap* и *aq*, и *aq* будет всегда равна *AQ*, либо меньше её, и пусть *ap* будет или равна *AP* или больше её» [7, с. 10]. Маклорен показывает, что пределы *AB* и *ab* будут равны друг другу[13]. При этом все величины у него расположены на отрезке, то есть наглядны. Иными словами, если $AP < AB < AQ$, $\frac{AP}{AQ}$ ограничено отношением большей величины к меньшей, и если $AP \leq ap < ab < aq \leq AQ$, то $ab = AB$.

В XIX веке, когда в математику придёт понятие функции, это построение приведёт к возникновению критерия сходящихся последовательностей Больцано (1817) и Коши (1821), к формулировке теоремы о двух последовательностях, возникшей как поризм (вспомогательный приём, впоследствии получивший статус фундаментального результата) в работах Коши 1821 и 1823 годов. Далее этот принцип будет воплощён в лемму о вложенных отрезках Кантора, войдя вместе с аксиомой Архимеда в аксиоматику действительного числа.

Литература

1. Schlapp R. Colin Maclaurin: A Biographical Note / Edinburgh Mathematical Notes, 1946. - No 37, p.1-6.
2. Turnbull H.W. A lecture in Aberdeen on 4 February 1947 to celebrate the bi-centenary of the death of Colin Maclaurin / Электронный ресурс: Часть I http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Turnbull_Maclaurin_1.html Часть II http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Turnbull_Maclaurin_2.html
3. Официальный сайт истории Эдинбургского университета http://ourhistory.is.ed.ac.uk/index.php/Main_Page
4. Гайденко П.П. Становление новоевропейского естествознания: преодоление парадоксов актуально бесконечного / Метафизика, 2011, No1, с. 65-87.

[13] Ссылка на изображение: https://ia601404.us.archive.org/BookReader/BookReaderImages.php?zip=/24/items/atreatisefluxio00conggoog/atreatisefluxio00conggoog_tif.zip&file=atreatisefluxio00conggoog_tif/atreatisefluxio00conggoog_0021.tif&scale=2&rotate=0

5. Gregorie J. The Universal Part of Geometry devoted to the transmutation and measurement of curved quantities. Translated by Andrew Leahy Электронный ресурс: http://math.knox.edu/aleahy/gregory/WORKING/gpu.htm
6. Gregorio, J. Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura// Geometria pars universalis. Padoua. – 1668. – P. 2–82.
7. MacLaurin C. A Treatise of Fluxions in two books by Colin MacLaurin, A.M., Professor of Mathematics in the Univesity of Edinburg and Fellow of the Royal Society. Edinburg: Printed by T.W. and T. Ruddmans. MDCCXLII. – 479 p.
8. Коренцова М.М. Кинематико-геометрическая модель анализа в «Трактате о флюксиях» К. Маклорена. ИМИ 22, 1977, с. 9-33.