Дедекинд, Кантор и понятие непрерывности.

Опубликовано: Синкевич Г.И. Понятие непрерывности у Дедекинда и Кантора. // Труды XI Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ – 2013 г. – С. 336–347.

Одним из основателей современного понятия непрерывности является Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд.

Биография Дедекинда.

Он родился 5 октября 1831 года в Брауншвейге, родном городе Гаусса. Его предки были здесь известными людьми. Отец, Юлиус Левин Ульрих Дедекинд, сын врача и фармацевта, был правоведом, профессором права и администратором Collegium Carolinum – колледжа, существовавшего в Брауншвейге и в 1862 году преобразованного в университет. Этот колледж закончил в Гаусс, и в нём же учился Рихард Дедекинд.

Мать Дедекинда, Каролина Генриетта, урождённая Империус (Emperius) была дочерью профессора Carolinum и внучкой императорского почтмейстера (начальника почты). Рихард был младшим из четырёх детей. Его единственный брат, Адольф, стал в Брауншвейге председателем окружного суда, одна из его сестёр, Матильда, умерла в 1860. Другая сестра, Юлия, была писательницей (романисткой), с ней он прожил вторую половину своей жизни.

С 7 до 16 лет Дедекинд учился в гимназии, увлекаясь физикой и химией, но потом его интересы сместились к математике, придающей логическую структуру естественным наукам.

С 1848 по 1850 год он обучался в Коллегиум Каролинум, изучая элементы аналитической геометрии, алгебру, механику и анализ.

В итоге, когда он в 1850 году поступил в Georgia Augusta (Геттингенский университет), Дедекинд был гораздо лучше подготовлен, чем остальные студенты, пришедшие сразу после школы. Семинар по математике был организован для обучения инструкторов учителей гимназий. Дедекинд стал посещать этот семинар, где он подружился с Риманом. Отсюда началась их долгая дружба, продолжавшаяся до самой смерти Римана в 1866 году.

Весной 1850 года Дедекинд, как он вспоминает, прослушал элементы теории чисел в небольшом, но очень интересном курсе Штерна (Stern).

В зимнем семестре 1850/51 года Дедекинд посещал лекции Гаусса по методу наименьших квадратов. Краткий отчёт Гаусса содержит информацию об этом курсе, но Дедекинд дал более полный отчёт о нём, хотя и краткий, но содержащий более интересные детали:

«В начале следующего зимнего семестра я решил, что достаточно подготовлен, чтобы слушать его лекции по методу наименьших квадратов, и вооружившись журналом посещения лекций, не без сердечного трепета, я вступил в его жилище, где увидел его сидящим за письменным столом. Моё сообщение, казалось, мало порадовало его, я слышал также, что он не любил вести курсы; после того, как он написал своё имя в журнале, он сказал после некоторой паузы: «Возможно, вы знаете, что всегда очень неясно, состоятся ли мои лекции; где вы живёте? У парикмахера Фогеля? Хорошо, это удачно, так как он также и мой парикмахер, я уведомлю вас через него несколькими днями позже. Через несколько дней Фогель, личность, известная всему городу, весь преисполненный важностью своей миссии, вошёл в мою комнату сказать мне, что несколько других студентов тоже записались, и тайный советник Гаусс будет читать курс.

Нас было девять студентов, все мы были очень старательны, редко кто-то из нас пропускал, хотя путь в обсерваторию зимой бывал иногда неприятен. Аудитория, выделенная из служебного помещения Гаусса как прихожая, была очень маленькой.

Мы сидели за столом, длинные стороны которого были удобны для троих, но не четверых. Напротив двери у внешнего края сидел гаусс, и когда все мы присутствовали, то те двое из нас, кто приходил позже, должны были плотно придвигаться к нему и класть тетради на колени. Гаусс носил лёгкую чёрную шапочку, очень длинный коричневый кафтан, серые брюки; обычно он сидел в удобной позе, смотрел вниз, немного наклоняясь и положив согнутые руки на колени.

Он говорил без записей, довольно легко, очень понятно, просто и отчётливо; но когда он хотел сделать особое ударение на новом пункте, он использовал особенно характерные слова, затем он внезапно поднимал голову, поворачивался к одному или другому сидящему радом с ним, и пристально смотрел на него своими прекрасными проникновенными голубыми глазами. Это было незабываемо. Если он возвращался к пояснению принципов развития математических формул, то он вставал и в величавой, очень прямой позе, писал на доске возле него своим особым красивым почерком; он всегда экономно и продуманно распределял весьма небольшое пространство доски. Для числовых примеров, тщательному завершению которых он придавал большое значение, он приносил с собой необходимые данные на маленьких листочках бумаги.

24 января 1851 года Гаусс закончил изложение первой части своего курса, в котором он познакомил нас с основами своего метода наименьших квадратов. Далее последовало исключительно ясное развитие основных понятий и важных теорем анализа и вероятностей, иллюстрируемых оригинальными примерами, которые служили введением во вторую и третью методику установленного метода, в который я должен был углубляться. Могу только сказать, что мы следили за ним с неослабевающим интересом в этих искусных лекциях, где уже были рассмотрены

несколько примеров из теории определённых интегралов. Но нам, как и самому Гауссу, который сначала неохотно согласился читать этот курс, казалось, что он стал испытывать некоторое удовольствие, обучая нас. Конец наступил 13 марта, Гаусс встал, все мы были вокруг него, и он отпустил нас с дружескими прощальными словами: «Мне остаётся только поблагодарить вас за большое старание и внимание, с которым вы слушали мои лекции, возможно, изложенные слишком сухо». Полвека прошло с тех пор, но эти так называемые сухие лекции навечно остались в моей памяти как самые лучшие из всех, что я когда-либо слушал[1]».

В следующем семестре Дедекинд снова слушал лекции Гаусса по углублённой (расширенной) геодезии. В 1852 году, всего лишь после четырёх семестров, он завершил свою докторскую работу под руководством Гаусса, став последним из его студентов, написав диссертацию по теории интегралов Эйлера. Гаусс свидетельствовал, что Дедекинд очень много знал и был самостоятелен, вдобавок имел «благоприятные многообещающие виды на будущее».

Однако Дедекинд не выполнил достаточных требований для получения права на работу после окончания Georgia Augusta, и поэтому он провёл ещё два года, заполняя пробелы, и стал готов квалифицироваться как приват-доцент через несколько недель после Римана. После того, как в 1855 году в Геттинген приехал Дирихле (1805-1859), чтобы после смерти Гаусса занять его место профессора высшей математики, Дедекинд посещал его лекции по теории чисел, теории потенциала, неопределённым интегралам и уравнениям в частных производных. Влияние Дирихле на Гаусса было огромно, Дедекинд признавался, что общение с Дирихле сделало его новым человеком. Вскоре между ними завязались тесные дружеские отношения, и он вошёл в круг знакомств Дирихле.

[1] James I. From Euler to von Neumann. – Cambridge University Press. – 2002. – P. 195-198.

Интересы Дедекинда постепенно сместились от эллиптических и абелевых функций к теории Галуа, он первым начал преподавание его теории в Геттингенском университете. В 1858 году Дедекинд был приглашён преподавать в Техническом университете Цюриха. В 1859 году он вместе с Риманом совершил поездку в Берлин, где встречался с Вейерштрассом и Куммером.

В 1862 году в его родном Брауншвейге Collegium Carolinum был преобразован в Технический институт (сейчас Технический университет Брауншвейга), Дедекинд вернулся туда и преподавал в нём до 1894 года. Он никогда не был женат и прожил остаток своей жизни со своей незамужней сестрой Юлией. Дедекинд избирался членом Берлинской (1880), Римской и Французской (1900) Академий наук. Он получил докторские степени в университетах Осло, Цюриха и Брауншвейга. Известно, что скромность и научная молчаливость Дедекинда привела к тому, что в 1904 году «Математический календарь» опубликовал сообщение о смерти Дедекинда, якобы случившейся 4 сентября 1899 года. В письме редактору Дедекинд написал: «По моим собственным наблюдениям я в тот день был вполне здоров и вёл оживлённый разговор о теории множеств с моим гостем и уважаемым другом Георгом Кантором (из Галле), который в связи с этим нанёс мне смертельный удар, но не мне самому, а сделанной мне ошибке»[2].

В 1871 году Дедекинд, обобщив теорию многочленов и алгебраических чисел, вводит в математику абстрактные алгебраические структуры: кольца, идеалы и модули. Совместно с Кронекером он создаёт общую теорию делимости. Исследования Дедекинда были изданы в виде приложения к «Теории чисел» Дирихле 1863 года[3]. Биограф Дедекинда Эдвардс (H. M.Edwards) полагает, что эта книга, изданная после смерти Дирихле, в действительности написана Дедекиндом[4]. Сам Дедекинд в письме

---

[2] Landau E. Richard Dedekind. Nachrichten von der K. Gesellsch. Der Wiss. Zu Gottingen. Gesch. Mitt. Aus dem Jahre 1917. S. 50-70.
[3] Lejeune Dirichlet P. Vorlesungen über Zachlentheorie. Heraugegeben von R. Dedekind. – Braunschweig. -1863, 1871, 1879, 1894. – 414 s.
[4] Edwards, H. M. «Dedekind’s invention of ideals» Bull. London Math. Soc. 15, 1983, pp. 8-17.

Кантору 19 января 1879 года писал: «Я полностью занят переработкой теории чисел Дирихле[5]». Можно лишь сожалеть, что русский перевод лекций Дирихле по теории чисел не содержит знаменитого XI Дополнения, написанного Дедекиндом, в котором находится теория идеалов.

Дальнейшее развитие оснований высшей алгебры во многом обязано открытиям Дедекинда.

В течение всей его жизни его отличала большая научная порядочность и деликатность. Он принимал участие в изданиях Гаусса, Римана (1868 год, «О представлении функций при помощи тригонометрических рядов» и «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии», а в 1876 году вместе с Вебером издал сочинения Римана, написав большой биографический очерк), Дирихле, и считал этот труд более важным, нежели публикацию собственных результатов.

В начале 1870-х годов Дедекинд знакомится с Георгом Кантором. Знакомство перешло в долголетнюю дружбу и сотрудничество; их отношения сопровождал горячий интерес, увлечённость теорией множеств, иногда раздражение, отчуждение и прекращение переписки. Оба они любили проводить лето в горах Германии и Швейцарии, где и познакомились. Бурное желание двадцатисемилетнего Кантора найти понимающего собеседника и советчика развеяло сомнения Дедекинда в важности его собственных размышлений о построении теории числа средствами теории множеств. Наряду с Кантором Дедекинд считается основателем теории множеств. Многие его работы стали наглядным примером применения новых методов. Дедекинд применил аксиоматический метод построения системы натуральных чисел в 1888 году в работе «Что такое числа и для чего они служат?»[6].

---

[5] Имеется в виду работа Дедекинда над третьим изданием лекций Дирихле.

[6] Dedekind R. Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig. - 1888, в русском переводе Казань 1905.

Он вводит основные операции над множествами (включение, пересечение, сумма) в том объёме, которые нужны ему для операций над множеством алгебраических чисел, обобщает понятие отображения, вводит понятие цепи. Система аксиом арифметики, сформулированная здесь Дедекиндом для натуральных чисел, год спустя была развита и упрощена Дж. Пеано[7] (1858-1932), чьё имя за ней и закрепилось, но ещё до него Дедекинд показал, как основные теоремы арифметики получаются из его аксиом.

В начале XX века аксиоматический метод был окончательно принят школой Гильберта как основополагающий в математике.

Определение числа, данное Дедекиндом, включено в курсы современного математического анализа.

Непрерывность и число у Дедекинда.

В период работы профессором в Политехнической школе Цюриха Дедекинд читал курс математического анализа, и, как он сам замечает, ощутил недостаток в научном обосновании арифметики. Геометрическая интерпретация приближения переменной величины к пределу не могла быть строго научной, хотя и удобна в преподавании. Дедекинд поставил себе целью дать чисто арифметическое определение непрерывности, которое будет достаточным основанием анализа бесконечно малых. Как пишет сам Дедекинд: «Это мне удалось 24 ноября 1858 года, и несколько дней спустя я сообщил результаты своих размышлений моему дорогому другу Durège`у, что повело к продолжительной и оживлённой беседе[8]. Впоследствии я излагал эти мысли о научном обосновании арифметики то одному, то другому из моих учеников, читал об этом предмете доклад в учёном обществе профессоров здесь, в Брауншвейге, но я не мог окончательно решиться на действительное опубликование, потому, во-первых, что изложение

[7] G. Peano. Arithmetices principia, nova method exposita. – Romae. – 1889. – XVI+20 p.
[8] Дюрег Генрих (1821-1893), немецкий математик, работал вместе с Дедекиндом в Цюрихе. Автор работ по теории функций комплексной переменной и эллиптическим функциям.

представляется нелёгким, и потому ещё, что самый предмет так мало плодовит. Несколько дней назад, 14 марта [1872 года], в то время как я наполовину стал уже подумывать, чтобы избрать эту тему предметом настоящего юбилейного сочинения[9], ко мне в руки попала, благодаря любезности её автора, статья E. Heine (Crelle Journal, Bd. 74)[10], которая и подкрепила меня в моём решении. По существу, я вполне согласен с содержанием этого сочинения, но должен откровенно сознаться, что моё изложение кажется мне более простым по форме и более точно выдвигающим настоящее ядро вопроса. В то время как я писал это предисловие (20 марта 1872 года), я получил интересную статью «Ueber die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reichen» G.Cantor`a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann, Bd.5), за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Как мне кажется при быстром чтении, аксиома[11] в §2 вполне согласуется, независимо от внешней формы изложения, с тем, что я отмечаю ниже в §3, как сущность непрерывности[12]. Какую же пользу представит выделение, хотя бы только в понятии, вещественных чисел ещё более высокого порядка, я, согласно с моим пониманием системы вещественных чисел, как совершенной в самой себе, ещё признать не в состоянии[13]»[Дедекинд. Р. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса: Матезис. – Одесса. – 1923 г. Пер. С.О. Шатуновского. 4-е исправленное издание. С. 10-11].

---

[9] Автор выпустил это сочинение к юбилею своего отца. – *Примечание С. О. Шатуновского*. Юлиус Левин Ульрих Дедекинд (1795-1872) был профессором-юристом, историком и чиновником в Коллегиум Каролинум, как до 1862 года называлась Высшая техническая школа в Брауншвейге.

[10] В этой статье «Лекции по теории функций» Э. Гейне вводит понятие непрерывности с помощью фундаментальных последовательностей, используя, как он сам признаёт, некоторые результаты Г. Кантора.

[11] «Каждой числовой величине соответствует определённая точка прямой, координата которой равна этой числовой величине и притом равна в том смысле, который объяснён в указанном параграфе, и обратно». – [Кантор. Труды по теории множеств. – С. 13].

[12] «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, это рассечение прямой на два куска». – [Дедекинд. Непрерывность и иррациональные числа. – С. 17].

[13] Дедекинд имеет в виду понятие предельной точки и производного множества, определяемого Кантором в работе 1872 года.

Дедекинд рассматривает свойства равенства, упорядоченности, плотности множества рациональных чисел R, (числового корпуса, термин, который ввёл Дедекинд в дополнениях к изданным им лекциям Дирихле). При этом он старается избегать геометрических представлений. Определив отношение «больше» и «меньше», Дедекинд утверждает его транзитивность; существование между двумя различными числами бесконечного множества других чисел; а также для любого числа разбиение множества рациональных чисел на два бесконечных класса, таких, что числа одного из них меньше данного, и другого, числа которого больше данного числа; причём само число, производящее это разбиение, может быть отнесено как к одному, так и к другому классу, и тогда оно будет либо наибольшим для первого, либо наименьшим для второго класса.

После этого Дедекинд рассматривает точки на прямой линии и устанавливает для них те же свойства, что и только что установленные для рациональных чисел, постулируя, что каждому рациональному числу соответствует точка на прямой линии.

Но на прямой есть бесконечно много точек, которые не соответствуют никакому рациональному числу, например, величина диагонали квадрата с единичной стороной. Отсюда следует необходимость арифметическим путём дополнить множество рациональных чисел, чтобы область новых чисел обрела такую же полноту или непрерывность, что и прямая. Ранее понятие иррациональных чисел было связано с измерением протяженных величин, то есть с геометрическими представлениями. Дедекинд стремится ввести новое понятие чисто арифметическими средствами, то есть определить иррациональные числа посредством рациональных чисел:

«Предыдущее сравнение области R рациональных чисел с прямой привело к открытию в первой изъянов, неполноты, или разрывности, между тем как прямой мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, или непрерывность. В чём же собственно состоит непрерывность? Всё и заключается в ответе на этот вопрос, и только в этом ответе мы приобретаем научное основание для исследования *всех* непрерывных областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малейших частиц, конечно, многого не достигнешь. Дело идёт о том, чтобы дать точный признак непрерывности, который мог бы служить базисом действительных дедукций. Долгое время я напрасно об этом думал, но, наконец, нашёл искомое. Разные лица, вероятно, оценят эту находку различно, но всё же я думаю, что большинство найдёт её содержание весьма тривиальным. Оно состоит в следующем: в предыдущих параграфах обращено было внимание на то, что каждая точка *p* прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, т.е. в следующем: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, - это рассечение прямой на два фрагмента. Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует одно и только одно число, производящее это разложение» [Дедекинд, с. 17-18].

Это свойство прямой Дедекинд называет аксиомой, принимая которую, мы придаём прямой непрерывность. Причём Дедекинд утверждает, что это наш мысленный акт, который производится независимо от того, является ли реальное пространство непрерывным или разрывным, это мысленное заполнение новыми точками не влияет на реальное бытие пространства.

Далее Дедекинд переходит к построению иррациональных чисел. Он называет сечением деление множества рациональных чисел любым числом, обращая внимание на то, что либо в одном классе есть наибольшее, либо в другом классе есть наименьшее, и обратно, если сечение обладает этим свойством, то оно производится либо наименьшим, либо наибольшим числом. В то же время существует бесконечно много сечений, которые не могут быть произведены рациональным числом. Например, если *D* есть целое число, не являющееся квадратным, то существует целое положительное число λ, такое, что $\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$. Таким образом получается, что в одном классе нет наибольшего, а в другом классе нет наименьшего числа, производящего это сечение, в чём и состоит неполнота, или разрывность области рациональных чисел. В таком случае, если сечение не может быть произведено рациональным числом, создадим новое, иррациональное число, которое создаёт это сечение. Каждому определённому сечению соответствует одно и только одно рациональное или иррациональное число. Два числа неравны, если они соответствуют различным сечениям. Между ними можно определить отношения «больше» или «меньше».

Дедекинд рассматривает непрерывность области $\mathfrak{R}$ вещественных чисел: «Область $\mathfrak{R}$ обладает ещё и непрерывностью, то есть имеет место следующее предложение: Если система $\mathfrak{R}$ всех действительных чисел распадается на два класса a_1 и a_2 такого рода, что каждое число α_1 класса a_1, меньше каждого числа α_2 класса a_2, то существует одно и только одно число α, производящее это разложение» [Дедекинд, с. 25].

Он определяет вычисления с вещественными числами. При этом он доказывает теорему о непрерывности арифметических операций: «Если число λ есть результат вычислений, совершённых над числами α, β, γ, …, и если λ лежит внутри интервала *L*, то можно указать интервалы *A*, *B*, *C* (внутри которых лежат числа α, β, γ,…) такого рода, что результат такого же вычисления, в котором, однако, числа α, β, γ,…заменены числами соответственных интервалов *A*, *B*, *C*,…, будет всегда представлять число, лежащее внутри интервала *L*» [Дедекинд, с. 28]. Дедекинд сетует на трудность изложения этой теоремы, что облегчается с введением понятий переменных величин, функций и пределов. Заметим, что несмотря на то, что работа была написана в 1872 году, Дедекинд не пользуется уже разработанным аппаратом математического анализа, сделанным Вейерштрассом, в частности, его языком ε-δ. Понятие предела носит у него качественный оттенок. Дедекинд по существу использует только те аспекты непрерывности, которые нужны ему для обоснования понятия числа и арифметических операций над числами средствами теории множеств.

Дедекинд устанавливает зависимость введённых им понятий с основными положениями анализа бесконечных. Определение предела он даёт в таком виде: «Говорят, что переменная величина x, пробегающая последовательные определённые численные значения, приближается к постоянному *пределу* α, если она в ходе процесса изменения *окончательно* заключается между каждыми двумя числами, между которыми α само лежит, или, что то же, если разность $x-\alpha$, взятая абсолютно, опускается ниже всякого данного значения, отличного от нуля» [Дедекинд, с. 29].

Дедекинд доказывает теорему: «Если величина x возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, то она приближается к некоторому пределу» [Дедекинд, с. 29].

На этом заканчивается работа Дедекинда «Непрерывнось и иррациональные числа». Как мы видим, определение понятий непрерывности и действительного числа безупречно с логической точки зрения, оно носит юридический оттенок, но представление об объёме и структуре понятия из него не следует. Математики, определив число таким способом, переходят к построениях к более рабочему определению числа Кантора.

Заметим, что одновременно вышедшая статья Гейне «Лекции по теории функций» 1872 года содержала определение числа, данное Кантором, и незадолго до них во Франции вышла работа

Шарля Мере с таким же построением[14], но оставшаяся не оценённой соотечественниками, а в Германии она осталась неизвестной из-за франко-прусской войны. Теперь французы говорят «определение действительного числа Мере-Кантора-Гейне». Правда, Мере, определив иррациональные числа как пределы последовательностей рациональных чисел, на этом останавливается[15]. Гейне и Кантор идут дальше, образуя новые последовательности из иррациональных чисел.

Иррациональные числа у Кантора.

Сравним эту работу Дедекинда с чуть опередившей её упомянутой работой Кантора «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов» [G.Cantor . Ueber die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reichen. - Кантор Г. Труды по теории множеств. М. 1985. – С. 9 – 18]. Здесь Кантор строит множество числовых величин, которое мы теперь называем действительными числами, дополняя множество рациональных чисел иррациональными, с помощью последовательностей рациональных чисел, названными им фундаментальными, то есть таких, что разность $a_{n+m} - a_n$ бесконечно мала для любого положительного m при возрастании n (т. е. последовательностей Коши). Тогда можно утверждать, что последовательность (1) $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$сходится к некоторому пределу b. Если имеется другая последовательность $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots$с отличными от первой элементами, сходящаяся к пределу b', то между ними возможны три взаимоисключающих соотношения:

---

[14] Méray, Ch. / Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données / Ch. Méray // Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat.– 1869. – (2) 4. – P. 280–289.

[15] Синкевич Г.И. Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере // Труды X Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Издательство ЯГПУ – 2012 г. – С. 180–185.

1) либо $a_n - a'_n$ становится бесконечно малым при возрастании *n*;

2) либо $a_n - a'_n$ начиная с некоторого определённого значения *n* остаётся большей некоторого положительного рационального ε;

3) либо $a_n - a'_n$ начиная с некоторого определённого значения *n* остаётся меньше некоторой отрицательной рациональной величины –ε.

В первом случае Кантор полагает $b=b'$, во втором $b>b'$, в третьем $b<b'$.

Точно так же можно утверждать, говорит Кантор, что последовательность (1) может находиться к рациональному числу *a* в одном из трёх отношений, что влечёт $b=a, b>a, b<a$. Отсюда в качестве следствия получается, что если *b* – предел последовательности, то $b-a_n$ становится бесконечно малой при возрастании *n*. Совокупность рациональных чисел Кантор называет областью *A*, совокупность всех числовых величин *b* называет *B*. На взятые вместе области *A* и *B* можно распространить применяемые конечное число раз числовые операции, принятые для рациональных чисел (сложение, вычитание, умножение, деление, если делитель ненулевой). Тогда область *A* (рациональных чисел) получается из области *B* (иррациональных чисел) и вместе с ней образует новую область *C*. А именно, если задана числовая последовательность чисел $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ числовых величин из *A* и *B*, не все из которых принадлежат области *A*, и если эта последовательность обладает тем свойством, что $b_{n+m} - b_n$ становится бесконечно малой при возрастании *n* и любом *m*, то об этой последовательности говорят, что она имеет определённый предел *c*. Числовые величины *c* образуют область *C*. Отношения равенства, больше, меньше и элементарные операции определяются аналогично предыдущим случаям. Но даже установленное равенство двух величин *b* и *b'* из *B* не влечёт их идентичности, а

лишь выражает некоторое определённое отношение между последовательностями, которым они сопоставляются.

Из области C и предшествующих ей аналогично получается область D, из всех их – область E и т.д.; посредством λ таких переходов получается область L. Понятие числа, как оно развито здесь, несёт в себе зародыш необходимого и абсолютно бесконечного обобщения. *Числовая величина*, *значение* и *предел* Кантор употребляет как равнозначные. Для сравнения с этим параграфом Кантор ссылается на X книгу «Начал» Евклида[16].

Далее Кантор рассматривает точки на прямой, определяя расстояние между ними как предел последовательности, и вводя отношения больше, меньше и равно. Он вводит аксиому, что, и обратно, каждой числовой величине соответствует точка прямой, координата которой равна этой числовой величине и притом равна в том смысле, который объяснён в этом параграфе. Кантор называет это утверждение аксиомой, так как оно недоказуемо по самой его природе. Благодаря ей числовые величины дополнительно приобретают определённую предметность, от которой они, однако, совершенно не зависят.

В соответствии со сказанным выше Кантор рассматривает точку на прямой как определённую, если её расстояние от 0, рассматриваемое с определённым знаком, задано как числовая величина, значение, или предел λ-вида.

Далее Кантор определяет точечные множества или множества значений, и вводит понятие предельной точки[17] точечного множества. Под окрестностью понимается любой интервал, содержащий эту точку внутри себя. Таким образом, вместе с точечным множеством задаётся и множество его предельных точек. Оно называется первым производным точечным множеством. Если

---

[16] В X книге «Начал» представлена классификация несоизмеримых величин.

[17] Сейчас мы говорим «точка сгущения» - такая точка, в каждой окрестности которой содержится бесконечно много точек данного множества и может быть, и она сама..

оно состоит из бесконечного числа точек, из него можно образовать второе производное множество и так далее.

Введение понятия предельной точки (точки сгущения) было плодотворным. Его сразу же начали использовать другие математики – Г. Шварц, У. Дини[18].

Кантор о сравнении различных способов введения понятия числа и непрерывности.

28 апреля 1872 года, получив работу Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа, Кантор писал ему: «Искренне благодарю Вас за Вашу работу о непрерывности и иррациональных числах. Как я теперь смог убедиться, точка зрения, к которой я пришёл несколько лет тому назад, отправляясь от занятий арифметикой, фактически совпадает с Вашими взглядами; имеется различие лишь в способе введения числовых величин. Я вполне убеждён, что Вы правильно выявили сущность непрерывности»[19].

Правда, в их последующей переписке содержится полемика о способе определения непрерывности, и в 1882 году Кантор пишет Дедекинду: «Я пытался обобщить Ваше понятие сечения и воспользоваться им для определения понятия континуума, но мне это не удалось. Напротив, мой исходный пункт – счётные «фундаментальные последовательности» (под ними я понимаю последовательности, элементы которых неограниченно сближаются друг с другом) – кажутся годящимися для этой попытки»[20].

К 1878 году Кантор переходит от анализа точечных областей к понятию мощности, формулирует гипотезу континуума, рассматривает непрерывные отображения между множествами различной размерности. Тем острее он ощущает недостаточность

---

[18]Синкевич Г.И. Улисс Дини и понятие непрерывности // История науки и техники. – 2012. - №10. – С. 3-11.
[19] Кантор Г. Труды по теории множеств. М.- 1985. – С. 327.
[20] Там же, с. 356.

определения непрерывности через сечение. В 1879 году он делает попытку использовать теорему о корневом интервале[21]для доказательства невозможности непрерывного и двусторонне однозначного отображения между двумя различными многообразиями разных порядков[22].

В 1883 году Кантор, анализируя различные формы введения числа, в цикле работ «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном» §9, стр. 81-87, писал: «Я хотел бы вкратце и построже сказать о трёх известных мне и в существенном однородных главных формах строго арифметического изложения учения об общих действительных числах. Это *прежде всего* способ введения, которым в течение ряда лет пользовался в своих лекциях об аналитических функциях профессор Вейерштрасс и некоторые намёки на которые можно найти в программной работе г-на Э. Коссака (Die Elemente der Arithmetik. Berlin 1872). *Во-вторых*, г-н Р. Дедекинд в своём сочинении «Stetigkeit und irrationale Zahlen» (Braunschweig 1872) опубликовал своеобразную форму определения. *В-третьих*, в 1871 году я предложил (Math. Ann. 1872, Bd. 5, S. 123) форму определения, внешне имеющую сходство с вейерштрассовской… На мой взгляд, эта *третья*… является самой простой и естественной из всех и имеет ещё то преимущество, что она самым непосредственным образом приспособлена для аналитических вычислений»[23].

«Определению какого-либо иррационального действительного числа всегда соответствует строго определённое множество первой мощности рациональных чисел. В этом заключается общая черта всех форм определений. Различие же их состоит в моменте порождения, при помощи которого множество соединяется с

---

[21] Теорему, называемую ныне теоремой Больцано-Коши: непрерывная функция, имеющая разные знаки на краях интервала, внутри интервала достигает нулевого значения. Это утверждение впервые высказал Мишель Ролль в 1690 году применительно к алгебраическим уравнениям.

[22] Эта попытка доказательства изложена Кантором в статье «Об одной теореме из теории непрерывных многообразий» (Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten, перевод Ф.А. Медведева) [31, с. 36-39].

[23] Кантор, с. 81.

определяемым им числом, и в тех условиях, которым должно удовлетворять множество, чтобы оно оказалось подходящей основой для соответствующего определения числа.

При *первой* форме определения в основу кладётся множество положительных рациональных чисел a_ν, которое будет обозначаться (a_ν) и которое удовлетворяет тому условию, что, сколько бы и каких из этих a_ν мы ни суммировали в конечном количестве, эта сумма всегда остаётся меньше некоторой заданной границы. Теперь если мы имеем две подобных совокупности (a_ν) и (a'_ν), то строго доказывается, что могут представиться три случая: или каждая часть $1/n$ единицы всегда встречается одинаково часто в обеих совокупностях, если только их элементы суммируются в достаточном, доступном увеличению количестве, или $1/n$ начиная с известного n всегда содержится чаще в первой совокупности, чем во второй; или наконец, $1/n$ начиная с известного n всегда содержится чаще во второй совокупности, чем в первой. Соответственно этим случаям мы полагаем, обозначая через b и b' определяемые этими двумя совокупностями (a_ν) и (a'_ν) числа, что в первом случае $b=b'$, во втором $b>b'$, в третьем $b<b'$. Если мы соединим обе совокупности в одну новую совокупность $(a_\nu+a'_\nu)$, то это даёт основу для определения $b+b'$. Если же из двух совокупностей (a_ν) и (a'_ν) образовать новую совокупность $(a_\nu a'_\nu)$, элементы которой являются произведениями из всех (a_ν) на все (a'_ν), то эта новая совокупность принимается в качестве основы определения bb'.

Мы видим, что здесь момент порождения, связывающий множество с порождаемым им числом, заключается в *образовании сумм*. Но следует подчеркнуть как *существенное* то, что здесь оперируют только суммированием всегда *конечного* количества рациональных элементов, а *не* полагается заранее, например, что определяемое число b равно сумме $\sum a_\nu$ бесконечного ряда (a_ν). В этом заключалась бы *логическая ошибка*, ибо, скорее, определение суммы $\sum a_\nu$ получается только путём приравнивания её непременно уже определённому заранее готовому числу b. Я думаю, что эта логическая ошибка, которой впервые избегнул Вейерштрасс, совершалась почти всеми и не была замечена лишь потому, что она относится к тем редким случаям, когда действительная ошибка не может причинить большого вреда в исчислении. Несмотря на это, с вышеуказанной ошибкой связаны, по моему мнению, все те трудности, которые заключаются в понятии иррационального, между тем как если избегнуть этой ошибки, то иррациональное число занимает место в нашем духе с такой же определённостью, ясностью и отчётливостью, как и рациональное число.

В форме определения г-на Дедекинда в основу кладётся *совокупность всех* рациональных чисел, но разделённых на две группы таким образом, что если мы обозначим числа первой группы U_ν, а числа второй группы через B_μ, то всегда $U_\nu < B_\mu$. Подобное деление множества рациональных чисел г-н Дедекинд называет его «сечением», обозначает через $(U_\nu | B_\mu)$ и сопоставляет ему число b.Если сравнить два подобных сечения $(U_\nu | B_\mu)$ и $(U'_\nu | B'_\mu)$ друг с другом, то, как и при *первой* форме определения оказывается всего *три* возможности, соответственно которым представленные обоими сечениями числа b и b' или приравниваются друг к другу, или принимается, что $b > b'$, или $b < b'$. Первый случай имеет место, - если отвлечься от некоторых, легко регулируемых исключений, возникающих при рациональности определяемых чисел, - лишь при полном тождестве обоих сечений. В этом наблюдается решительное и безусловное преимущество данной форму определения по сравнению с обеими другими, а именно то, что каждому числу b соответствует лишь *единственное* сечение. Но она сопровождается и тем крупным недостатком, что числа в анализе *никогда* не представляются в форме «сечений», в которую их приходится лишь вписывать весьма искусственным и сложным образом.

И здесь затем следуют определения в виде суммы $b+b'$ и произведения bb' на основе новых сечений, получаемых из двух заданных.

Недостаток, связанный с *первой* и *третьей* формами определения, а именно, что здесь одни и те же, т.е. равные числа, представляются бесконечно часто, и что, таким образом, не получается непосредственно однозначного обозрения всех действительных чисел, можно весьма легко устранить путём специализации положенных в основу множеств (a_ν), если привлечь к рассмотрению какую-либо из известных однозначных систем, вроде десятичной системы или разложения в простые цепные дроби.

Перейду теперь к *третьей* форме определения действительных чисел. И здесь в основу кладётся бесконечное множество рациональных чисел (a_ν) первой мощности, но теперь ему приписывается другое свойство, чем в теории Вейерштрасса, а именно: я требую, чтобы взяв произвольно малое рациональное число ε, можно было бы так удалить конечное число членов множества, чтобы оставшиеся имели попарно разность, которая по абсолютной величине меньше ε. Всякое такое множество (a_ν), которое можно также охарактеризовать равенством $\underset{\nu=\infty}{Lim}(a_{\nu+\mu}-a_\nu)=0$ (при произвольном μ), я называю *фундаментальной последовательностью* и сопоставляю ему некоторое определяемое им число b, для которого целесообразно даже воспользоваться самим знаком (a_ν), как это сделано у г-на Гейне, который в этих вопросах после многих устных обсуждений присоединился к моим взглядам (См. Журнал Крелле, т. 74, с. 172). Подобная *фундаментальная последовательность*, как можно строго вывести из её понятия, приводит к трём случаям: или её члены a_ν для достаточно больших значений ν по абсолютной величине меньше, чем любое наперёд заданное число; или они начиная с некоторого ν больше определённо заданного положительного рационального числа ρ, или же они начиная с известного ν меньше некоторой определённо заданной отрицательной рациональной величины $-\rho$. В первом случае я говорю, что b равно нулю, во втором, что b больше нуля или положительно, в третьем, что b меньше нуля или отрицательно.

Затем переходим к элементарным операциям. (… - сумма, произведение, частное), в том числе и между рациональным a и иррациональным числом.

Лишь теперь мы переходим к определению равенства и обоих случаев неравенства двух чисел b и b' (из которых b' может также равняться a), говоря при этом $b=b'$, $b>b'$ или $b<b'$ в зависимости от того, равна ли нулю, больше нуля или меньше нуля разность $b-b'$.

После всех этих подготовительных рассуждений получается в качестве первой *строго доказуемой* теоремы, что если b есть число, определяемое фундаментальной последовательностью (a_ν), то $b-a_\nu$ при возрастании ν становится по абсолютной величине меньше, чем любое мыслимое рациональное число, или иначе, что $\underset{\nu=\infty}{Lim} a_\nu = b$.

Следует обратить внимание на следующий кардинальный пункт, значение которого легко пропустить: в случае третьей формы определения число b не определяется вовсе как «предел» членов a_ν фундаментальной последовательности (a_ν). Принять это значит совершить такую же логическую ошибку, как та, о которой мы говорили при рассмотрении *первой* формы определения, и именно на том основании, что тогда предполагается наперёд существование предела $\underset{\nu=\infty}{Lim} a_\nu = b$. Скорее, дело обстоит обратным образом, а именно так, что благодаря нашим предыдущим определениям понятию числа b приписываются такие свойства и отношения к рациональным числам, что отсюда можно с логической очевидностью вывести заключение: $\underset{\nu=\infty}{Lim}\, a_\nu$ существует и равен b. Да простят мне все эти подробности, которые оправдываются тем, что большинство проходят мимо этих неприметных деталей и затем легко натыкаются на противоречия в иррациональных числах, ставя их под сомнения, между тем как соблюдение указанных здесь предосторожностей легко предохранило бы их от этого. Действительно, они тогда ясно поняли бы, что иррациональное число благодаря *приданным ему нашим определением свойствам* является такой же реальностью для нашего духа [Кантор стр. 84-85], как рациональное и даже как целое рациональное число, и что вовсе нет нужды *получать* его путём предельного процесса, а что, скорее, наоборот, *располагая* этими свойствами, можно общим образом убедиться в пригодности и очевидности предельных процессов. Ведь приведённую выше теорему легко обобщить следующим образом: если (b_ν) представляет собой какое-нибудь множество рациональных или иррациональных чисел, обладающее тем свойством, что $\lim\limits_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu}-b_\nu)=0$ (каково бы ни было μ), то существует некоторое число b, определяемое фундаментальной последовательностью (a_ν), и такое, что $\underset{\nu=\infty}{Lim}\, b_\nu = b$.

Оказывается, следовательно, что *те самые* числа b, которые были определены на основании фундаментальных последовательностей (a_ν) (я называю эти фундаментальные последовательности последовательностями первого порядка) таким образом, что они оказываются пределами a_ν, могут быть представлены различными способами и как пределы последовательностей (b_ν), где каждое b_ν определяется с помощью фундаментальной последовательности первого порядка $\left(a_{\mu}^{(\nu)}\right)$ (с фиксированным ν).[стр. 85]

Поэтому любое подобное множество (b_{ν}), если оно обладает тем свойством, что $\lim_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu}-b_{\nu})=0$ (при произвольном μ), я называю фундаментальной последовательностью *второго* порядка.

Точно так же можно образовать фундаментальные последовательности *третьего, четвёртого*,…, *n*-го порядка, а также фундаментальные последовательности порядка α, где α - любое число второго числового класса.

Все эти фундаментальные последовательности дают для определения какого-либо действительного числа b то же самое, что и фундаментальные последовательности первого порядка. Всё различие заключается лишь в более сложной, пространной форме задания. (…).

[Стр. 85] Я пользуюсь теперь следующим способом выражения: числовая величина b дана фундаментальной последовательностью *n*-го, соответственно, α-го порядка. Если решиться на это, то мы получаем таким путём необыкновенно лёгкий и в то же время понятный язык, чтобы описать наиболее простым и выпуклым образом всю полноту многообразных, часто столь сложных образований анализа. Благодаря этому получится, на мой взгляд, серьёзный выигрыш в ясности и прозрачности изложения. Тем самым я возражаю против опасений, высказанных г. Дедекиндом в предисловии к его сочинению «Непрерывность и иррациональные числа». Мне вовсе не приходило в голову вводить с помощью фундаментальных последовательностей второго, третьего и т.д. [Стр. 86] порядков новые числа, которые не были бы определены уже с помощью фундаментальных последовательностей первого порядка: я имел в виду лишь понятийно различную форму задания. Это ясно вытекает из различных мест моей работы.

Я хотел бы здесь обратить внимание на обно замечательное обстоятельство, а именно, что порядки фундаментальных последовательностей, различаемые мною с помощью чисел первого и второго числового классов, совершенно исчерпывают все мыслимые в анализе, уже найденные и не найденные формы обычных типов последовательностей, исчерпывают в том смысле, что нет вовсе фундаментальных последовательностей, - как я это строго докажу при других обстоятельствах, - порядковое число которых можно было бы обозначить каким-нибудь числом, например, третьего числового класса. [О коммутативности – стр.87]