МАТЕМАТИКА

Г.И. Синкевич
доктор физ.-мат. наук
профессор кафедры математики
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
Санкт-Петербург, Российская Федерация

ИСТОРИЯ САМОЙ КРАСИВОЙ ФОРМУЛЫ МАТЕМАТИКИ ТОЖДЕСТВО ЭЙЛЕРА

История формулы Эйлера $\ln(\cos\varphi+i\sin\varphi) = i\varphi$ *или* $\cos\varphi+i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ *и история самой красивой формулы математики* $e^{i\pi} = -1$*, или* $e^{i\pi}+1 = 0$ *в основном известны, кроме одной небольшой детали: кто же впервые написал их в приведённом нами виде? Мы постараемся пролить свет на этот вопрос. Всё началось, когда Л. Эйлеру ещё не исполнилось семи лет: английский астроном и математик Р. Коутс разработал идею Иоганна Бернулли о связи между логарифмами и круговыми функциями и получил первую из приведенных нами формул. Затем И. Бернулли и Г. Лейбниц обсуждали значение логарифма отрицательного числа. Близок к решению вопроса был Джулио Фаньяно. 34-летний Эйлер получил первую и вторую формулы, связывающие показательную и тригонометрические функции, а затем и выражение логарифма отрицательного числа. В работе Эйлера содержатся значения логарифма для различных дуг, в том числе и для* π*, но нет явного выражения* $e^{i\pi} = -1$*. Это равенство появилось более чем полвека спустя в работе французского инженера и математика Жака Франсе среди нескольких частных случаев формулы Эйлера. Математики-теоретики, к частности, О. Коши, не выделяли эту формулу среди других. Уже было забыто происхождение этих формул из геометрических и механических задач. Среди специалистов сопредельных наук – физики, астрономии, геодезии, картографии, логики, философии – росло восхищение красотой и таинственностью этой формулы. Вокруг тождества Эйлера начал возникать мистический ореол (Б. Пирс). В конце XX века по опросу читателей журнала Mathematical Intelligencer, тождество Эйлера было признана самым красивым математическим результатом из 24 предложенных. В нашей статье приводится хронология предшествующих математических событий.*

Ключевые слова: *Тождество Эйлера, история, Дж. Кардано, Р. Бомбелли, Дж. Непер, Дж. Валлис, Р. Декарт, И. Бернулли, Г. Лейбниц, Р. Коутс, Дж. К. Фаньяно, Л. Эйлер, Ж. Даламбер, А. Муавр, К. Вессель, Арган, Ж. Франсе, О. Коши, Б. Пирс.*

G.I. Sinkevich
Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor
Department of Mathematics
St. Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering
Saint-Petersburg, Russian Federation

THE MOST BEAUTIFUL FORMULA IN MATHEMATICS. EULER IDENTITY HISTORY

The history of Euler's formula $\ln(\cos\varphi+i\sin\varphi) = i\varphi$ *or* $\cos\varphi+i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ *and the history of the most beautiful formula in mathematics* $e^{i\pi} = -1$ *or* $e^{i\pi}+1 = 0$ *are mostly known, except for one small detail: who first wrote them in the form we have given? We will try to shed light on this issue. It all started when L. Euler was not yet seven years old: the English astronomer and mathematician R. Cotes developed the J. Bernoulli's idea of a connection between logarithms and circular functions and received the first of the formulas we have given. Then I. Bernoulli and G. Leibniz discussed the value of a negative number logarithm. Close to resolving the issue was Giulio Fagnano. 34-year-old Euler received the first and second formulas connecting the exponential and trigonometric functions, and then the expression for the negative number logarithm. Euler's work contains the values of the logarithm for various arcs, including for* π*, but there is no explicit expression* $e^{i\pi} = -1$*. This equality appeared more than half a century later in the work of the French engineer and mathematician Jacques Français among several special cases of Euler's formula. Theoretical mathematicians, in particular, A. Cauchy, did not single out this formula among others. The origin of these formulas from geometric and mechanical problems has already been forgotten. Among specialists from adjacent sciences – physics, astronomy, geodesy, cartography, logic, philosophy – admiration for the beauty and mystery of Euler identity grew. A mystical halo began to appear around this formula (B. Pierce). At the end of the 20th century, according to a survey of readers of the journal Mathematical Intelligencer, Euler's identity was recognized as the most beautiful mathematical result out of 24 proposed. Our article provides a chronology of previous mathematical events.*

Keywords: *Euler's identity, history, G. Cardano, R. Bombelli, J. Napier, J. Wallis, R. Descartes, I. Bernoulli, G. Leibniz, R. Cotes, L. Euler, G.C. Fagnano, d'Alembert, A. De Moivre, K. Wessel, Argan, J. Français, O. Cauchy, B. Pierce.*

DOI: 10.25791/intstg.3.2023.1406

Введение

Связь между последовательностями значений дуг и последовательностями значений логарифмов (тогда ещё не функций!) возникает в XVI в. с началом изучения изогональной спирали, названной впоследствии логарифмической спиралью. В геометрических и механических задачах, о которых мы будем говорить, использовались также логистическая кривая (поместив которую в систему координат, сейчас мы можем интерпретировать в зависимости от положения либо как логарифмику, либо как экспоненциальную кривую) и гипербола. Поскольку ни понятия функции, ни тем более теории элементарных функций в начале XVIII века ещё не было, а теория рядов и методов интегрирования едва начали развиваться, в прикладных задачах преобладали геометрические методы, построение пропорций, метод конечных разностей, достигавшие высокой виртуозности. Математики и астрономы сопоставляли арифметические и геометрические последовательности, дуги и отношения отрезков с помощью логарифмической шкалы, что позволяло им получать результаты, которые сейчас мы легко получаем с помощью рядов и определенных интегралов. Так Р. Коутсом (R. Cotes) была получена формула поверхности сплюснутого и вытянутого сфероида, содержащую вербальное выражение, эквивалентное $\ln(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i\varphi$, на базе которой 29 лет спустя Эйлер вывел эту же формулу с помощью интегралов, а затем с помощью рядов.

Тождество Эйлера $e^{i\pi} = -1$ никогда не было написано самим Эйлером. Ныне это тождество окружено вниманием физиков, философов и популяризаторов, ему приписывается едва ли не мистическое значение: ведь в записи $e^{i\pi}+1 = 0$ дана связь пяти самых главных чисел математики. Ни сам Эйлер, ни математики следующих поколений не придавали особого значения этой формуле. Полвека спустя после той работы Эйлера, из которой формула следует как частный случай, она впервые была опубликована в работе инженера-математика Ж. Франсе, а ещё полвека спустя выраженное восхищение её красотой прозвучало в лекции астронома Б. Пирса. Рассмотрим последовательно все математические события.

1545, Джироламо Кардано, первое появление комплексных чисел

В 1545 г. Джироламо Кардано в своей книге *Ars magna* [18] получил корни из отрицательных величин при исследовании общей формулы кубического уравнения. Так как корни вспомогательного квадратного уравнения были взаимно сопряжёнными и при сложении уничтожались, Кардано рассматривал их как полезную вспомогательную конструкцию.

1572, Рафаэль Бомбелли, операции сложения и умножения комплексных чисел

В 1572 г. инженер-гидравлик Р. Бомбелли в книге *Алгебра* [17] указал на возможность определить отношение равенства, сумму и произведение комплексных чисел. Но ни физического, ни геометрического смысла у корней из отрицательных величин ещё не было. Традиционно числа воспринимались как количества или отношения, поэтому ни отрицательным, ни тем более мнимым числам в алгебре не находилось места.

1614, Джон Непер, логарифмы

В 1614 г. Джон Непер опубликовал *Описание удивительной таблицы логарифмов* [43], содержащую понятие логарифма и таблицы логарифмов тригонометрических функций для первой четверти круга с шагом в 1 минуту. Потребность в этом новом математическом инструменте была особенно велика у астрономов, вынужденных перемножать большие числа. Логарифм и скорость его изменения были определены Непером кинематически, последующие математики стали вычислять его с помощью квадратуры гиперболы, а в 1668 (Logarithmo-technia, Mercator, N.) появилась и формула разложения логарифма в ряд [40, *с. 30–34*]. Большим шагом в восприятии операций над иррациональными числами было введение десятичных дробей, которые Непер использовал для приближенных вычислений и оценки погрешности. В 1620-е гг. У. Оутред и Э. Уингейт сконструировали логарифмическую линейку. Но логарифм оставался в роли регулярного средства и ещё долгое время не считался функцией.

1637, Рене Декарт о статусе комплексных чисел

В 1637 г. Рене Декарт в своей *Геометрии* [1] рассматривал задачу о пересечении окружности с параболой. Случай раздельного положения параболы и окружности Декарт рассматривал как отсутствие истинных (действительных), ложных (отрицательных) корней, а лишь наличие воображаемых (imaginariae). «Не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням» [1, *с. 85*].

Благодаря Декарту началась алгебраизация геометрии. Над отрезками и другими геометрическими объектами стали производиться алгебраические операции, и здесь для нас будут важны свойства изученных с алгебраической точки зрения гиперболы, логарифмической спирали и логистической кривой, о чем пойдет речь далее.

1685, Джон Валлис, попытка интерпретации комплексных чисел

В 1685 г. Джон Валлис в трактате *Алгебра* [51] впервые сделал попытку дать геометрическую и физическую интерпретацию отрицательным и мнимым числам. Валлис впервые вводит числовую прямую, содержащую положительные числа, ноль и отрицательные числа, а затем формирует прообраз комплексной плоскости. Сначала он рассматривал мнимое число как сторону утраченного квадратного земельного участка, затем как среднее геометрическое между отрезками, отложенными в положительную и отрицательную стороны, т.е. как вертикальный отрезок по отношению к действительной прямой: «Ибо точно так же, как $\sqrt{bc}$ означает пропорциональное среднее между $+b$ и $+c$; или даже между $–b$ и $–c$ (что при умножении любого из них даст $+bc$:), поэтому корень ($–bc$) будет означать среднее пропорциональное между ($+b$) и ($–c$) или между ($–b$) и ($+c$); любое перемножение даст $–bc$. Этот факт, поскольку он касается чисто алгебраического рассмотрения, представляет истинную идею мнимого корня $\sqrt{-bc}$» [52, *с. 287*].

Далее, рассматривая среднее геометрическое в окружности и гиперболе, Валлис приходит к связи между ними с помощью мнимой подстановки [51, *с. 294*]. Эту идею впоследствии использовал Муавр, переходя от окружности $x^2+y^2 = 1$ к гиперболе $x^2–y^2 = 1$ с помощью замены y на $y\sqrt{-1}$.

1702, работы И. Ньютона, А. Муавра, И. Бернулли по развитию методов интегрирования рациональных функций

На рубеже XVII–XVIII веков с созданием дифференциального и интегрального исчисления в трудах И. Ньютона, Г. Лейбница, И. Бернулли, А. Муавра и Р. Коутса (Cotes) шла интенсивная работа по созданию техники интегрирования рациональных функций. Далеко не всегда площадь либо длину кривой можно было выразить в алгебраической форме, тогда говорили (напр., Ньютон), что кривая квадрируется геометрически или в конечном виде. Иначе стремились свести задачу к квадратуре конических сечений. К 1711 г. Ньютоном были получены разложения в ряды бинома, синуса, косинуса, показательной и некоторых других функций[1].

Прежде всего исследовались свойства тех функций, которые применялись к получению квадратуры круга и гиперболы, а также простейших трансцендентных функций. Было замечено, что интегрирование рациональных выражений с помощью мнимых подстановок может быть приведено к конечным алгебраическим выражениям или к квадратурам неопределенных отрезков круга и гиперболы. Особенно выделим работу И. Бернулли 1702 г. *Решение задачи об интегральном исчислении с некоторыми сокращениями по отношению к этому исчислению* [14]. В дополнении *Сокращенный способ преобразования сложных дифференциалов в простые и обратно; и наоборот, даже простых мнимых дифференциалов в сложные вещественные* [15, *с. 399–400*] к этому мемуару Бернулли пишет о возможности преобразования мнимого логарифмического дифференциала вида $adt:2bt\sqrt{-1}$ в дифференциал вещественного кругового сектора с помощью мнимой подстановки: «Полагая

$$t=\left(b\sqrt{-1}+\sqrt{\left(1:r-bb\right)}\right):(b\sqrt{-1}-\sqrt{1:r-bb}\ ),$$

мы получим $adr:\sqrt{(r-bbrr)}$.

Так как $\int(adz:(bb:zz))$ зависит от квадратуры круга и, с другой стороны,

$$adz:\left(bb+zz\right)=\frac{1}{2}adz\left(bb-bz\sqrt{-1}\right),$$

двум дифференциалам мнимых логарифмов, то отсюда следует, что мнимые логарифмы заменяют собою вещественные круговые секторы: при сложении мнимые величины уничтожаются и сумма делается вещественной» [15, *с. 400*]. Аналогично Бернулли преобразует дифференциалы гиперболического сектора к мнимому логарифму и обратно.

Уравнения кубические и более высоких степеней решались не только алгебраически, но и тригонометрическим способом, с помощью синусов кратных дуг. Известен эпизод с Франсуа Виетом, в 1594 г. решившим этим способом алгебраическое

[1] Ряд для логарифма получил Н. Меркатор в 1668 г. Не путать с картографом Герардом Меркатором.

уравнение 45-й степени. Используя известные тригонометрические соотношения и переходя от дуг окружности к дугам гиперболы с помощью мнимой подстановки [41, 42], Муавр пришел к формуле возведения в степень и извлечения корня натуральной (до 7-й) степени из комплексного числа.

Следуя Иоганну Бернулли, прием мнимой подстановки использовал Дж. Фаньяно [33].

И. Ньютон и его ученик Р. Коутс (Cotes) разработали таблицы дифференциалов, соответствующих квадратурам. Во времена Ньютона еще не существовало понятия неопределенного интеграла как первообразной, и не была формализована формула Ньютона-Лейбница. Квадратуры искали как геометрические задачи: выразить длину или площадь под данной кривой как длину или площадь уже известной круговой (либо гиперболической) дуги или сектора соответственно. Неопределенный интеграл как первообразная приобретает самостоятельное значение у Эйлера.

1712, Иоганн Бернулли, Готфрид Лейбниц, Жан Лерон Даламбер о значении логарифма отрицательного числа

До 1702 года мнимые числа рассматривались лишь как корни из отрицательных величин. Долгое время было неясно, приводят ли операции над комплексными числами к числам такого же вида[2]. Понятие логарифма также было неясным: это был либо показатель некоторой прогрессии, либо квадратура гиперболы, либо степенной ряд, но никак не функция с чёткой областью определения. Глубинные связи между этими проявлениями ещё не были изучены. В 1702 году Иоганн Бернулли столкнулся с проблемой вычисления логарифма отрицательного и комплексного числа. К 1712 году Бернулли и Лейбниц в своей переписке спорили по поводу того, чем является логарифм отрицательного числа [50]. Лейбниц подставил в формулу разложения логарифма в ряд $x = -2$ и заключил, что логарифм от -1 не может быть нулём. Для положительного числа a справедливо $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$. Продолжая рассуждение, можно заключить, что $\ln i = \ln\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\ln(-1)$. Но чему равен $\ln(-1)$? Лейбниц полагал, что он должен быть комплексным (мнимым), но и этот термин у него не имел чёткого определения. Бернулли [50, *с. 294*], а потом и Даламбер [27, *с. 210–1230*], считали, что логарифм отрицательного числа должен быть вещественным. Аргументы Бернулли были основаны на интегрировании логарифма от $(-x)$ как интеграла от $dz{:}z$, взятого между пределами 1 и $(-x)$, но, как подметил И.Ю. Тимченко, он проводил интегрирование через полюс $z = 0$ и получал $\log(-x) = \log x$ [4, *с. 212–213*]. Позже Эйлер доказал, что логарифм отрицательного числа будет комплексным, добавив, что логарифм многозначен.

История логарифмической спирали

Логарифмическая спираль, известная нам по уравнению в полярных координатах $\rho = ae^{b\varphi}$, была впервые описана А. Дюрером в 1525 г. [28, *с. 29*] как спираль, в каждой своей точке составляющая постоянный угол с касательной (изогональная спираль). Её изучали Р. Декарт (1638), Е. Торричелли (1644) [48], И. Ньютон (1687) [3, *с. 370–375* и далее], Якоб I Бернулли (1691, 1692) [13, *с. 207–213*], П. Вариньон [49, *с. 69–131*]. Декарт внес в геометрию алгебраический алгоритм. Он установил, что у логарифмической (изогональной) спирали при изменении угла в арифметической прогрессии радиус-вектор меняется в геометрической прогрессии и показал равносильность тому, что полярные углы для точек кривой пропорциональны логарифмам радиус-векторов [1, *с. 192, 250*].

В 1714 г. английский астроном и математик, ученик, редактор и издатель Ньютона, Роджер Коутс (Roger Cotes) рассмотрел логарифмическую спираль, которую он называет обратной или равноугольной спиралью – (reciprocal spiral, Spiralem Aequiangulam), расширил исследования Вариньона, и на базе изучения ее свойств выработал собственный вычислительный метод для решения задач анализа.

1714, Роджер Коутс, логарифм комплексного числа. Связь между дуговыми и логарифмическими функциями

Английский математик, механик и астроном Р. Коутс[3] (1682–1716), ученик, редактор и издатель Ньютона, сделал значительный вклад в

[2] В 1749 г. Эйлер в статье «Исследование о мнимых корнях уравнений» показал, что операции над комплексными числами приводят к числам того же вида.

[3] Написание его имени в русской историко-математической литературе: Коутс, Котс, Котес. Следуя А.П. Юшкевичу, мы будем придерживаться написания Коутс.

вычислительные методы астрономии и математики. Иногда его называют английским Эйлером. При жизни была опубликована только одна его статья, *Логометрия. Измерения отношений* (1714) [25]. Продолжение – вторая и третья части *Логометрии* вместе с трудами по вычислительным методам и теории ошибок в астрономии и геодезии, вышли уже посмертно под названнем *Гармония измерений* [26] (1722). Юшкевич отмечает: «Здесь выведены и обоснованы такие формулы, как например, $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$, причем такими словами: наименьшее изменение какой-либо круговой дуги относится к наименьшему изменению синуса этой дуги, как радиус к синусу дополнения. Что касается функций, обратных тригонометрическим, то они в это время выступали как некоторые площади, и символика для них еще не была создана» [7, *с. 341*].

Ньютон рассмотрел большое число интегралов, содержащих корень из квадратного трехчлена, и создал таблицы простейших кривых, сравнимых по квадратуре с эллипсом и гиперболой. Разработку его методов продолжил Коутс.

В *Гармонии измерений* впервые опубликованы графики тангенса и секанса, таблицы дифференциалов, таблицы интегралов для большого числа алгебраических функций, а также теорема о разложении на множители первой и второй степени двучлена $a^n \pm x^n$, доказанная впоследствии Муавром. Коутсу принадлежит едва ли не самое первое печатное вычисление чисел e и $1/e$ с 12-ю верными знаками с помощью непрерывных дробей (у Лейбница было 8 знаков, позже у Эйлера – 14, затем 23). В этой же работе содержится более подробное пояснение метода Логометрии.

Коутсу мы обязаны введению радиана, формулами производных тригонометрических функций; методами аппроксимации квадратур, в т.ч. формулами Ньютона-Котса. На основании выведенных формул Коутс для большого количества кривых вычислил длины дуг, площади, объёмы и поверхности тел вращения. Полученные результаты Коутс применял к задачам механики, физики и навигации.

Метод Коутса автономен по отношению к рядам и флюксиям. Он построен на пропорциях, использовании свойств гиперболы, логарифмической спирали и логистической (логарифмической) кривой, а также сопоставления арифметической и геометрической прогрессий.

Логарифмическая (логистическая) кривая, тогда ещё не отнесённая к координатным осям, применялась к любому соответствию между арифметической и геометрической прогрессией, например, к вычислению сложных процентов (Я. Бернулли, *Некоторые вопросы выгоды, с решением проблемы азартных игр*, 1690, [12, *с. 219–223*]).

Коутс получает такие же результаты, которые можно получить методом флюксий, но иногда его метод проще и быстрее, а часто его путь является единственно возможным для своего времени[4]. Хотя разложение функций в ряд и метод флюксий уже были известны, но само понятие функции было неясным, и поэтому даже Ньютон в «Математических началах натуральной философии» весьма умеренно пользовался разложениями в ряды с помощью производных (например, разложение для синуса он получил, обратив ряд арксинуса, а не дифференцируя), а метод флюксий использовал весьма сдержанно. Операции над рядами: сложение, умножение на число, дифференцирование, определение сходимости, ещё не были обоснованы. В то же время метод пропорциональных отношений, хотя бы и очень сложных, был традиционно испытан. У Коутса в *Harmonia mensurarum* составлены таблицы сложных пропорций для различных геометрических объектов. Коутс виртуозно применяет метод пропорций, а также своё понимание логарифма как меры отношения, к геометрическим объектам.

Кривые, кроме полярных, не строились в системе координат. Понятие геометрического места точек только начало зарождаться в работах И. Бернулли и Г.Ф. де Лопиталя. Для аргумента и для значений функции (как мы их сейчас понимаем) строили прямые (как правило, параллельные), на которых откладывали значения аргумента на одной, соответствующие значения функции на другой. Затем, сопоставляя эти значения, вне системы координат строилась кривая. Если аргумент менялся по закону геометрической прогрессии, для него рисовали шкалу, на которой откладывали соответствующие отрезки. Например, Э. Галлей в задаче о длине меридиана откладывал отрезки с общим началом 1, $(1+x)$, $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, и т.д., где x малó. На другой шкале откладывались значения соответствующей арифметической прогрессии из показателей 0, 1, 2, 3, … Далее Галлей строил логарифмическую спираль. При таких же начальных условиях Я. Бернулли (1690) демонстрировал закон сложного

[4] Например, длина подкасательной определяется из подобия треугольников. Коутс вычислял также периметр эллипса, который с помощью интегрирования стал доступен приближенно только в XIX веке.

процента и строил логистическую кривую (сейчас мы знаем ее как экспоненту, но тогда кривая не соотносилась с осями и ее расположение могло быть произвольным, т.е. могло выглядеть и как логарифмика[5]). Третья из используемых кривых, гипербола, строилась относительно своей асимптоты, определялась площадь под гиперболой. Было получено, что площадь пропорциональна логарифму отношения предельных абсцисс. Поэтому натуральные логарифмы называли ещё гиперболическими.

Коутс в «Логометрии» сначала определяет *квадратуру произвольной гиперболической области с помощью канона логарифмов*, определяет логарифм как меру отношения отрезков; устанавливает функциональное уравнение

$$f((\frac{a}{b})^n) = nf(\frac{a}{b})$$

$$f\left(\frac{a}{a}\right) = 0,$$

и далее выражал меру $\frac{a}{b}$ как $f\left(\frac{a}{b}\right) = M\log\left(\frac{a}{b}\right)$, где M – постоянная,связанная с основанием логарифма. Коутс подробно исследует отношение логарифма к различным квадратурам гиперболы. Пример, выбранный для иллюстрации результатов, представляет собой движение тяжелого тела, поднимающегося и опускающегося вертикально в среде, сопротивление которой изменяется пропорционально квадрату скорости[6]. Результаты связаны с работой Коутса над интегралами. В процессе решения возникают дифференциальные уравнения с тригонометрическими либо логарифмическими решениями, которые выражаются в геометрической форме и обобщаются в терминах свойств окружности и гиперболы.

Коутс прибегает к методу пропорций, когда вычисляет поверхность слоя сплюснутого и вытянутого сфероида (эллипсоида вращения), и при этом получает во втором случае формулу, в наших обозначениях имеющую вид $\ln(\cos x + i\sin x) = xi$, связывающую круговые и логарифмические функции, и названную в будущем формулой Эйлера. Коутс, обнаружив благодаря своему методу связь между круговыми и логарифмическими канонами (функциями), называл эту связь чудесной гармонией природы: «Здесь, конечно, очень широкое поле приложений, на котором можно испытать силу метода, особенно если к *Логометрии* добавить *Тригонометрию*, в которой я однажды наблюдал странное родство между методами, идущими друг с другом» [25, *с. 30*].

Заметим, что длина дуги эллипса не могла быть вычислена до появления теории эллиптических функций. Первые приближения были у Ньютона (1711) в *Анализе с помощью уравнений* [2, *с. 8*], затем у Фаньяно (1750) [33], затем у Дж. Айвори в 1798 [38], затем у Ф.В. Бесселя в 1825 [16]. Эйлер неоднократно обращался к проблеме спрямления кривых, в том числе к вычислению дуги эллипса[7], при этом Эйлер использовал метод, совмещающий геометрию, тригонометрию и кинематику.

Приведем полностью рассуждение Коутса, в котором появляется формула Эйлера. К сожалению, подробное описание его метода требует слишком много места и времени, к этому мы обратимся в другой раз. Главная его задача - выразить искомую величину (здесь - поверхность сфероида) через поверхность шарового слоя известного радиуса, который он находит методом пропорций. После перевода текста Коутса мы приведем наш комментарий.

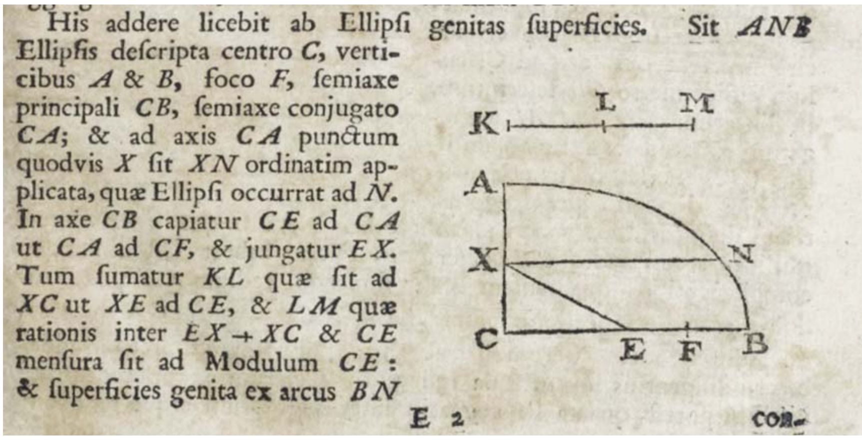
«Позвольте ещё рассмотреть поверхность, созданную эллипсом. Пусть *ANB* — эллипс, описываемый из центра *C*, с вершинами *A* и *B*, с фокусом *F*, главной полуосью *CB* и сопряженной полуосью *CA*; и в произвольной точке *X* на оси *CA* пусть отрезок *XN* расположен по ординате, которая пересекает эллипс в точке *N*. Выберите точку *E* так, чтобы *CE* относилось к *CA*, как *CA* к *CF*, и проведите *EX*. Затем возьмите [отдельно] такой отрезок *KL*, чтобы он относился к *XC*, как *XE* к *CE*, и отрезок *LM*, который является мерой отношения между $EX + XC$ и *CE* к модулю *CE*: и [тогда] поверхность, образованная вращением дуги *BN* вокруг оси *CX*, будет соответствовать кругу, описанному радиусом *CB*, поскольку сумма линий *KL* и *LM* равна *KM* этому радиусу *CB* [ibidem, *с. 32*].

Для того чтобы это последнее построение имело место, полуось *CA*, вокруг которой производилось вращение, должна быть меньше другой полуоси *CB*; ибо иначе значение модуля *CE*, т.е. величина $\frac{CAq}{\sqrt{CBq - CAq}}$ (в совр. обозначч. $\frac{CA^2}{\sqrt{CB^2 - CA^2}}$ – *Г.С.*)

[5] Эйлер первым определил показательную функцию как обратную к логарифмической (1743, Эйлер, Логарифм отрицательного числа. [32, *с. 273*].

[6] Эта же проблема подробно обсуждается у Ньютона в Principia.

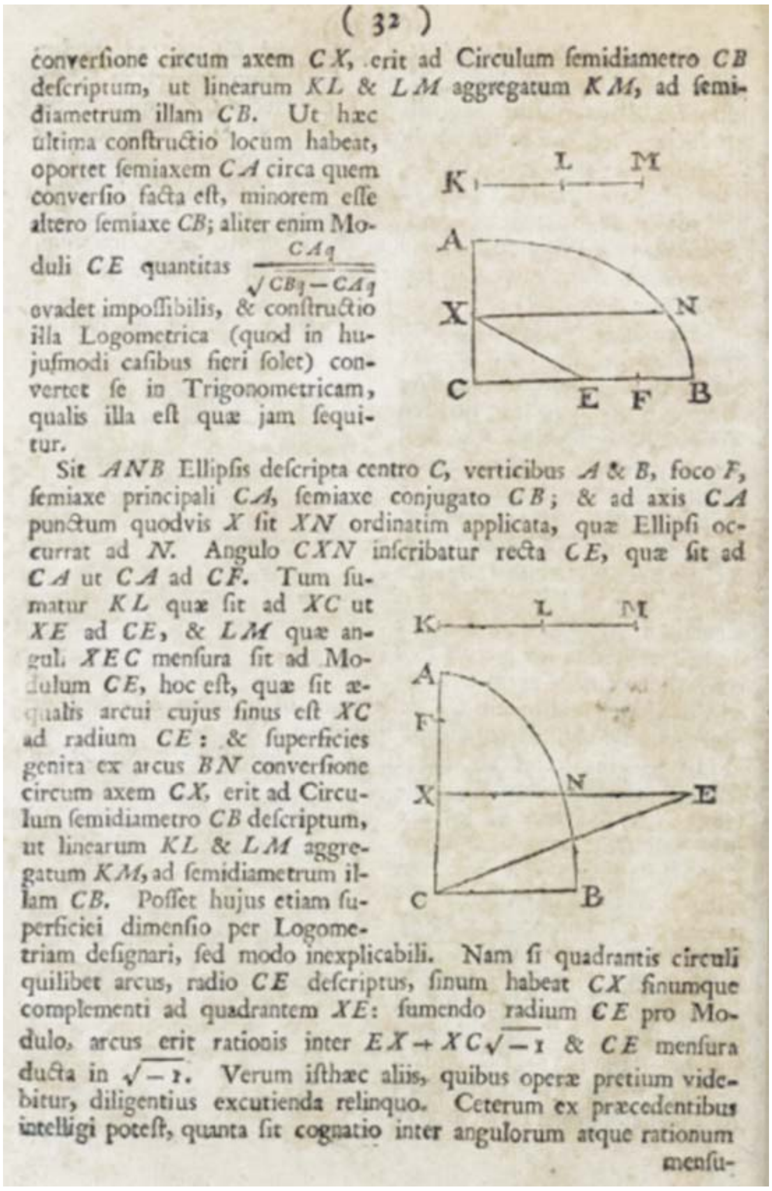
[7] Например, в 1725–1727 (Архив АН. Ф. 136, оп. 1, № 115 ф. лл. 1-2 об.; Ф. 136, оп. 1, № 114, лл.1-4 об., Ф. 136, оп. 1 № 115б, лл. 1-4 об.), 1730-е гг. (Ф. 136, оп. 1, № 173, лл. 1-2 об.), в 1750-е гг., De lineis curvis, quarum rectificatie per datam quadraturam mensuratur [30, *с. 439–451*].



His addere licebit ab Ellipſi genitas ſuperficies. Sit *ANB* Ellipſis deſcripta centro *C*, verticibus *A* & *B*, foco *F*, ſemiaxe principali *CB*, ſemiaxe conjugato *CA*; & ad axis *CA* punctum quodvis *X* ſit *XN* ordinatim applicata, quæ Ellipſi occurrat ad *N*. In axe *CB* capiatur *CE* ad *CA* ut *CA* ad *CF*, & jungatur *EX*. Tum ſumatur *KL* quæ ſit ad *XC* ut *XE* ad *CE*, & *LM* quæ rationis inter $EX + XC$ & *CE* menſura ſit ad Modulum *CE*: & ſuperficies genita ex arcus *BN*

E 2 con-

Иллюстрация 1. с. 31 Логометрии [25, *с. 31*]



(32)

converſione circum axem *CX*, erit ad Circulum ſemidiametro *CB* deſcriptum, ut linearum *KL* & *LM* aggregatum *KM*, ad ſemidiametrum illam *CB*. Ut hæc ultima conſtructio locum habeat, oportet ſemiaxem *CA* circa quem converſio facta eſt, minorem eſſe altero ſemiaxe *CB*; aliter enim Moduli *CE* quantitas $\frac{CAq}{\sqrt{CBq - CAq}}$ evadet impoſſibilis, & conſtructio illa Logometrica (quod in hujuſmodi caſibus fieri ſolet) convertet ſe in Trigonometricam, qualis illa eſt quæ jam ſequitur.

Sit *ANB* Ellipſis deſcripta centro *C*, verticibus *A* & *B*, foco *F*, ſemiaxe principali *CA*, ſemiaxe conjugato *CB*; & ad axis *CA* punctum quodvis *X* ſit *XN* ordinatim applicata, quæ Ellipſi occurrat ad *N*. Angulo *CXN* inſcribatur recta *CE*, quæ ſit ad *CA* ut *CA* ad *CF*. Tum ſumatur *KL* quæ ſit ad *XC* ut *XE* ad *CE*, & *LM* quæ anguli *XEC* menſura ſit ad Modulum *CE*, hoc eſt, quæ ſit æqualis arcui cujus ſinus eſt *XC* ad radium *CE*: & ſuperficies genita ex arcus *BN* converſione circum axem *CX*, erit ad Circulum ſemidiametro *CB* deſcriptum, ut linearum *KL* & *LM* aggregatum *KM*, ad ſemidiametrum illam *CB*. Poſſet hujus etiam ſuperficiei dimenſio per Logometriam deſignari, ſed modo inexplicabili. Nam ſi quadrantis circuli quilibet arcus, radio *CE* deſcriptus, ſinum habeat *CX* ſinumque complementi ad quadrantem *XE*: ſumendo radium *CE* pro Modulo, arcus erit rationis inter $EX + XC\sqrt{-1}$ & *CE* menſura ducta in $\sqrt{-1}$. Verum iſthæc aliis, quibus operæ pretium videbitur, diligentius excutienda relinquo. Ceterum ex præcedentibus intelligi poteſt, quanta ſit cognatio inter angulorum atque rationum menſu-

Иллюстрация 2, Логометрия, с. 32. [25, *с. 32*]

станет невозможной, и логометрическая конструкция (которая обычно делается в случаях такого рода) превратится в тригонометрическую, как и следующая.

Пусть теперь *ANB* – эллипс, описываемый из центра *C*, с вершинами *A* и *B*, с фокусом *F*, главной полуосью *CA*, сопряженной полуосью *CB*; а на оси *CA* находится произвольная точка *X*, являющаяся ординатой линии *XN*, которая пересекает эллипс в точке *N*. Пусть угол *CXN* опирается на прямую *CE*, которая относится к *CA* как *CA* к *CF*. Тогда возьмем *KL*, который относится к *XC*, как *XE* к *CE*, и [потом возьмем такой отрезок] *LM*, который является мерой угла *XEC* к модулю *CE*, то есть, такого [угла], который равен дуге, чей синус равен [отношению] *XC* к радиусу *CE*; и тогда поверхность, образованная вращением дуги *BN* вокруг оси *CX*; будет относиться к кругу, описанному радиусом *CB*, как сумма отрезков *KL* и *LM*, составляющих *KM*, к этому радиусу *CB* [25, *с. 31–32*].

Размер этой поверхности также можно определить с помощью *Логометрии*, но необъяснимым [загадочным] образом. Ибо если любая дуга четверти окружности, описанная радиусом *CE*, имеет синус *CX* и синус дополнения к квадранту *XE*: принимая за модуль радиус *CE*, тогда произведение дуги и $\sqrt{-1}$ будет мерой отношения $EX+XC\sqrt{-1}$ к *CE*. Но это следует более тщательно изучить в других случаях, для которых это может показаться стоящим»[8] [25, *с. 31–32*].

Вот другой перевод последней фразы: «Если какая-либо дуга четверти круга, описанного радиусом *CE*, имеет синус *CX* и синус дополнения до четверти *XE* и если принять радиус *CE* за модуль, то дуга будет мерой отношения $EX+XC\sqrt{-1}$ к *CE*, умноженной на $\sqrt{-1}$» (Перевод А.П. Юшкевича [7, *с. 61*]).

Пояснение к последней фразе таково. *CE* – радиус окружности, угол

$$XEC = \theta, \frac{CX}{CE} = \sin\theta,$$

$$\frac{EX}{CE} = \cos\theta; \frac{EX}{CE} + \frac{CX}{CE}\sqrt{-1} = \cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}.$$

Логарифм – это мера данного отношения, т.е.

$$\ln(\frac{EX}{CE} + \frac{CX}{CE}\sqrt{-1}) = \ln(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}).$$

Дуга, соответствующая углу *XEC* и радиусу *CE*, измеренная в радианах, равна $\theta\sqrt{-1}$. Итого $\ln(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1}) = \theta\sqrt{-1}$.

Из-за различий в переводе возникает изменение смысла: левую или правую часть равенства следует умножить на $\sqrt{-1}$? Заметим, что в *Harmonia mensurarum* 1722 г. эта же фраза повторяется дословно, но отличие составляет появление запятой, а именно: «Nam si quadrantis circuli quilibet arcus, radio *CE* descriptus, sinum habeat *CX* sinumque complementi ad quadrantem *XE*: sumendo radium *CE* pro Modulo, arcus erit rationis inter $EX+CX\sqrt{-1}$ & CE mensura, ducta in $\sqrt{-1}$». В некоторых источниках говорится об ошибке Коутса: действительно, если множитель $\sqrt{-1}$ поместить не в правой, а в левой части равенства, появится лишний минус. Английский исследователь творчества Коутса, *Ronald Gowing*, полагает, что знак минус оправданно возникает из-за двойственного толкования Коутсом направления хода дуги и ее комплексной природы [58, *с. 38*].

Заметим, что Коутс впервые в математике вводит угол, чья мера всегда равна радиусу, т.е. обеспечивающему такое отношение, мера которого всегда равна модулю. Это модулярное отношение равно 2, 71828…, соответствующий угол равен 57, 295 градусов, что составляет один радиан. Именно благодаря Коутсу появилась радианная мера углов, без чего было бы невозможно появление тождества Эйлера.

Далее Коутс пишет: «Размер этого протяжения также можно определить с помощью логометрии, но необъяснимым образом… Но я оставляю эти вещи другим, которым будет полезно изучить их более тщательно. Из того, что было сказано ранее, можно понять, насколько велика связь между мерами углов и отношениями и как легко они превращаются друг в друга путем небольшого изменения для различных случаев одной и той же задачи» [25, *с. 33*]. Более Коутс не возвращался к этой теме.

Коутс определяет площадь поверхности сплюснутого и вытянутого сфероида, вращает эллипс вокруг вертикальной оси. Сначала это эллипс с полуосями $a > b$, что дает сплюснутый сфероид. Здесь элемент дуги содержит множитель $\frac{CX^2}{\sqrt{CB^2 - CX^2}}$, что окончательно приводит к утверждению, что поверхность образованная дугой *BN*, вращающейся вокруг оси *CX*, будет относиться к кругу, описанному радиусом *CB*, как совокупность отрезков KL и *LM*, составляющих *KM*, к этому радиусу *CB*, а именно, при *S* – площадь верхнего купола сплюснутого сфероида,

[8] Относительно перевода этого места есть разночтения. Во второй редакции 1722 г. после слова ducta поставлена запятая, что изменяет смысл. По замечанию И.Ю. Тимченко, начиная с работ Франсуа Виета слово ducere, ductio приобрело более широкий смысл: не просто умножение, а произведение: «произведение A и B обозначается словом in». (Тимченко, с. 106–108). В другой статье мы рассмотрим все варианты перевода.

$$\frac{S}{\pi CB^2} = \frac{KL+LM}{CB}, \text{ где } KL = \frac{XC \cdot XE}{CE}, LM$$

это мера отношения, т.е. логарифм отношения (обозначаемый l), а именно, $LM = l(\frac{CB}{CX} + \frac{\sqrt{CB^2 - CX^2}}{CX})$. Принимая во внимание, что точка X скользит по вертикальной оси от нуля до b, и переходя к натуральному логарифму, окончательно получаем для верхней половины сплющенного сфероида

$$S = \pi a^2 + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}).$$

Затем Коутс рассматривает эллипс с полуосями $a < b$, фокус на вертикальной оси, вращение вокруг вертикальной оси, и рассматривает дугу верхнего купола вытянутого сфероида. Т.к. он по-прежнему располагает точку X на вертикальной оси, полярный радиус больше экваториального радиуса, а отношения строятся так же, возникает корень из отрицательной величины, и мера дуги XEC}, умноженная на $\sqrt{-1}$, определяется как $LM = l(\frac{CB}{CX} + \frac{\sqrt{CB^2 - CX^2}}{CX}\sqrt{-1})$. Как известно, эта площадь будет выражаться через арксинус[9].

Эйлер (1747), изучив работу Коутса, нашел более простой путь: он сравнил первообразные двух интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и заметил, что один интеграл из другого получается с помощью мнимой подстановки, после чего сравнил первообразные. Подробнее о рассуждении Эйлера ниже.

Благодаря Коутсу в геометрии и анализе впервые появилась алгебраическая формула, связывающая логарифмические и круговые функции.

Л. Эйлер. Основы теории функций комплексной переменной

С 1730 года Леонард Эйлер разрабатывал основы теории элементарных функций комплексного переменного. В 1734–1735 гг. Эйлер получил условие $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ для функции $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. В 1752 г. это же условие получил Даламбер, в XIX веке О. Коши (1814) и Риман (1851). Эйлер вводит понятие комплексной переменной и функции от неё, формулирует теорему о разложении многочлена на множители первой и второй степени, раскладывает функции комплексной переменной в обобщённые степенные ряды и в бесконечные произведения («Введение в анализ бесконечно малых»,1748). Исследует условия конформности отображения (1777); применяет комплексные функции к вычислению интегралов (1776 г. и после); вводит понятие гамма-функции (название дано позже Лежандром) и некоторые другие специальные функции.

С 1743 г. в своих работах Эйлер переходил от координат точки (x, y) к комплексному числу $p = x \pm \sqrt{-1}y$, представляя его в полярных координатах $p = s\left(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega\right)$.

В 1743 году Эйлер создаёт метод решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков, в котором при решении характеристических алгебраических уравнений возникают мнимые числа. При этом общее решение уравнения действительно.

Эйлер использовал более удобные обозначения, а именно, букву «*e*» как основание натурального логарифма с 1728 г., букву «π» как отношение длины окружности к диаметру[10] с 1736 г., букву «*i*» как обозначение мнимой единицы с 1777 г., причем даёт ей современное определение ($i^2 = -1, \frac{1}{i} = -i$). Однако, что ещё долгое время вместо буквы «*i*» математики использовали обозначение $\sqrt{-1}$.

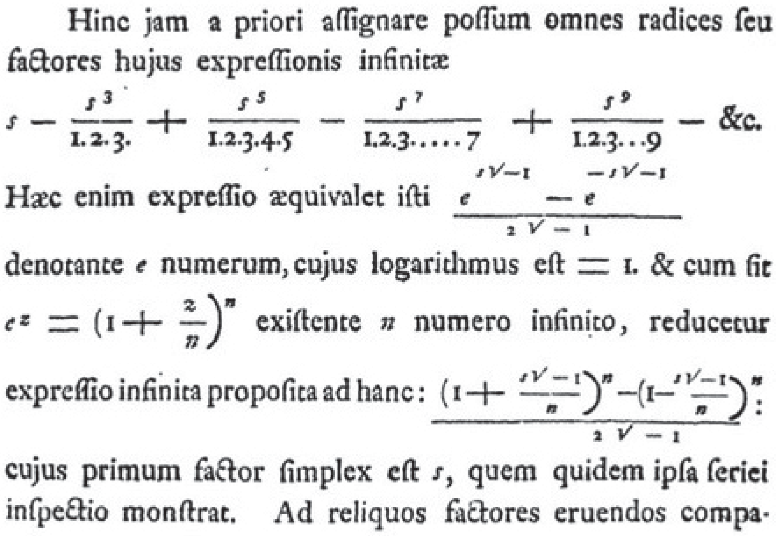
1743, формулы Эйлера.

К 1711 г. Ньютоном были получены разложения в ряды бинома, синуса, косинуса, показательной и некоторых других функций. Эйлер с помощью разложения в ряды получил выражения синуса и косинуса через экспоненту комплексного числа (формулы Эйлера). Об этом он писал в письмах к Гольдбаху 9.12.1741 и 8.05.1742, и к Николаю II Бернулли 16.01.1742, 10.11. 1742 (в этом письме также содержатся формулы возведения в степень в тригонометрической форме) [30, с. 519, 520, 529], затем опубликовал в 1743 г. [31].

Эйлер писал: «После рассмотрения логарифмов и показательных количеств следует рассмотрение

[9] Во времена Коутса не было ни символики, ни определения аркфункций.

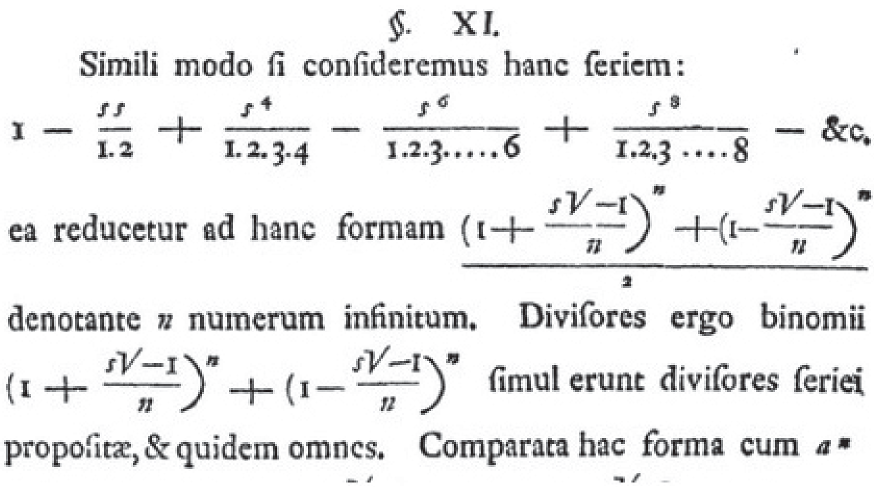
[10] Заметим, что число π как отношение длины окружности к диаметру впервые появилось в 1706 г. в работе У. Джонса [36] как сокращение слов «периметр» или «периферия» круга, но вошло в математический обиход благодаря Эйлеру.


Hinc jam a priori aſſignare poſſum omnes radices ſeu factores hujus expreſſionis infinitæ

$$s - \frac{s^3}{1.2.3.} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.\ldots.7} + \frac{s^9}{1.2.3..9} - \&c.$$

Hæc enim expreſſio æquivalet iſti $\frac{e^{s\sqrt{-1}} - e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ denotante e numerum, cujus logarithmus eſt $= 1$. & cum ſit $e^z = (1+\frac{z}{n})^n$ exiſtente n numero infinito, reducetur expreſſio infinita propoſita ad hanc: $\frac{(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n})^n - (1-\frac{s\sqrt{-1}}{n})^n}{2\sqrt{-1}}$: cujus primum factor ſimplex eſt s, quem quidem ipſa ſeriei inſpectio monſtrat. Ad reliquos factores eruendos compa-

Иллюстрация 3. Представление Эйлером синуса через экспоненту (1743, [31, *с. 177*])


§. XI.

Simili modo ſi conſideremus hanc ſeriem:

$$1 - \frac{ss}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.3.\ldots.6} + \frac{s^8}{1.2.3\ldots.8} - \&c.$$

ea reducetur ad hanc formam $\frac{(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n})^n + (1-\frac{s\sqrt{-1}}{n})^n}{2}$ denotante n numerum infinitum. Diviſores ergo binomii $(1+\frac{s\sqrt{-1}}{n})^n + (1-\frac{s\sqrt{-1}}{n})^n$ ſimul erunt diviſores ſeriei propoſitæ, & quidem omnes. Comparata hac forma cum a^n

Иллюстрация 4. Стр. 177. Представление косинуса через экспоненту (1743, ibidem, с. 179)

дуг круга и их синусов и косинусов, сколько и потому, что они происходят от самых логарифмических и показательных количеств, когда эти последние заключают в себе мнимые величины» [6, *с. 110*].

Также же Эйлер вывел формулу дуги

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \ln \frac{1+\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}z}{1-\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}z},$$

эквивалентную формуле Эйлера [6, *с. 119*]. Это представление после Эйлера использовали Лагранж и другие математики в двумерных задачах гидродинамики.

1749, Эйлер о логарифмах отрицательных и мнимых чисел

В 1747 г. (опубл. в 1749), уже после смерти своего учителя И. Бернулли, Эйлер сделал доклад в Берлинской академии наук *О логарифмах отрицательных и мнимых чисел* [32], в котором приводит формулу $\ln(-1) = (\pi \pm 2\pi n)\sqrt{-1}$ и её частные случаи для $\pm\pi\sqrt{-1}$, $\pm3\pi\sqrt{-1}$, и т.д., а также формулу для $\ln 1 = \ln(-1)^2$, дающую значения $\pm2\pi\sqrt{-1}$, $\pm6\pi\sqrt{-1}$ и т.д.

Сейчас мы знаем эту формулу в виде $Lnz = \ln|z|+i\varphi+2k\pi i$. Вот как выглядит изложение Эйлера [ibidem, *с. 269*]:

«§1. В переписке гг. Лейбница и Иоганна Бернулли был большой спор по поводу логарифмов отрицательных и мнимых чисел, обе стороны упорно отстаивали свою точку зрения, сохраняя, однако, полное согласие в других вопросах анализа» [ibidem, *с. 139*].

Эйлер в качестве отправных точек рассуждения берет те самые интегралы и их первообразные, которые получались у Коутса в задаче о поверхности сфероида, а именно, арксинус и «длинный» логарифм.

Далее Эйлер рассматривает дуги на единичном круге, их синусы и косинусы с учётом периодичности ±2πn+φ для значений аргумента $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\pi$ и т.д. Он обозначает $x = \sin\varphi$, $y = \cos\varphi$, $y=\sqrt{1-x^2}$. Буквой l обозначен натуральный логарифм. Т.к. $d\varphi=\frac{dx}{y}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, Эйлер вводит обозначение $x=z\sqrt{-1}$, откуда $d\varphi=\frac{dz\sqrt{-1}}{\sqrt{1+z^2}}$. Следовательно,

$$\int\frac{dz\sqrt{-1}}{\sqrt{1+z^2}}=l(\sqrt{1+z^2}+z)+C.$$

Соответственно,

$$\overline{\varphi}=\sqrt{-1}\,l(\sqrt{1-x^2}+\frac{x}{\sqrt{-1}})+C.$$

Очевидно, пишет Эйлер, константа $C = 0$.

Тогда

$$\overline{\varphi}=\frac{1}{\sqrt{-1}}l(\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{-1}),$$

отсюда

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{-1}}l(\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1}),$$

или

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{-1}}l(y+x\sqrt{-1}).$$

Тогда

$$\varphi\pm 2\pi n=\frac{1}{\sqrt{-1}}l(y+x\sqrt{-1})\ \text{ и}$$

$$l\left(y+x\sqrt{-1}\right)=(\varphi\pm 2\pi n)\sqrt{-1}.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, $l(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})=(\varphi\pm2\pi n)\sqrt{-1}$ [ibidem, *p. 277*].

И, наконец, Эйлер вычисляет ln(–1) (илл. 5).

Как можно видеть, у Эйлера уже содержится равенство ln(–1) = ±πi. Но желанного выражения через экспоненту у него нет.

На с. 279 Эйлер замечает: «Par la done la question, agitée entre MM. Leibnitz et Bernoulli, de savoir, si les logarithmes des nombres négatifs sont réels, ou imaginaires, est décidée en faveur, du premier, qui les soutient imaginaires, et toutes les objections que M. Bernoulli a élevèes contre ce sentiment, n’ont plus aucune prise sur cette décision» – «Отсюда вопрос, волновавший гг. Лейбница и Бернулли, вопрос о том, являются ли логарифмы отрицательных чисел действительными или мнимыми, решается в пользу первого, утверждавшего их мнимыми, и все возражения и протесты г-на Бернулли уже не окажут никакого влияния на этот вывод» – заметим, что опубликовать это ехидное замечание Эйлер позволил себе лишь через год после смерти своего учителя И. Бернулли.

§ 29. Soit maintenant l'arc proposé φ de 180°, ou soit $\varphi = \pi$, et nous aurons $\sin\varphi = 0$ et $\cos\varphi = -1$. Cette supposition faite, l'équation générale trouvée se changera en cette forme

$$l(-1) = (\pi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}\ (= 1 \pm 2n)\,\pi\sqrt{-1},$$

d'où nous tirons toute l'infinité des logarithmes du nombre négatif -1, car nous aurons

$$l(-1) = \pm\pi\sqrt{-1},\quad \pm 3\pi\sqrt{-1},\quad \pm 5\pi\sqrt{-1},\quad \pm 7\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

et de là nous voyons clairement, que tous les logarithmes de -1 sont imaginaires et tous différents des logarithmes de $+1$. Cela non obstant, les logarithmes de $(-1)^2$ qui seront

$$\pm 2\pi\sqrt{-1},\quad \pm 6\pi\sqrt{-1},\quad \pm 10\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

sont visiblement contenus dans les logarithmes de $+1$; ce qui suffit pour sauver les contradictions apparentes dont j'ai fait mention là-haut, quoiqu'il n'en suive pas reciproquement que les moitiés de tous les logarithmes de $+1$ soient logarithmes de -1: ce que la nature même des quantités ne permet pas, puisque -1 n'est pas la seule racine carrée de $+1$.

Иллюстрация 5 [32, *с. 278*]

Из свойства логарифмов Эйлер выражает логарифм отрицательного числа как сумму логарифма от –1 и логарифма модуля соответствующего числа; выражает логарифм мнимой единицы как $(\pm 2n+1/2)\pi\sqrt{-1}$. На основании полученных логарифмов он доказывает формулу возведения в степень $(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^{\mu} = \cos\mu\varphi+\sin\mu\varphi\sqrt{-1}$ и формулу извлечения корня [ibidem, *p. 281*].

Как видите, отсюда лишь малый шаг до названного в начале наших тезисов тождества, но Эйлер его не делает. Возможно, он не придавал значения этой форме как частному случаю.

Только после смерти Эйлера, уже в XIX веке, геометрическая интерпретация комплексного числа была открыта Весселем, Арганом, и развита в работах Гаусса, Грассмана, Гамильтона и других учёных.

1750 г., Джулио Карло Фаньяно

Джулио Карло, Граф Фаньяно, Маркиз де Тоски (1682–1766), получивший прекрасное гуманитарное образование, практически безвыездно проживал в своем поместье на берегу Адриатического моря. Он заинтересовался математикой лишь в 24-летнем возрасте. Ему ни разу не пришлось беседовать ни с одним крупным математиком своего времени, но изучив труды Декарта, Ньютона, Лейбница, Иоганна, Якоба и Николая I Бернулли, Лопиталя и многих других, он сам занялся математическими исследованиями[11] и со многими математиками состоял в переписке. Первые работы Фаньяно были посвящены исследованию лемнискаты и нахождения ее длины. Трудность интегрирования в задаче остановила Якоба и Иоганна Бернулли, потому что инеграл не выражался элементарно. Фаньяно стал искать другие пути и обнаружил довольно простые отношения между некоторыми дугами лемнискаты. Впоследствии Эйлер, изучая работы Фаньяно, обратил внимание на структурные свойства соответствующих интегралов. Свои работы Фаньяно публиковал на итальянском языке в венецианском журнале *Giornale dei letterati l'Italia*, а в 1750 издал двухтомник своих сочинений [33], который отправил в Берлинскую академию наук на рецензию к Л. Эйлеру. Восхищенный Эйлер способствовал избранию Фаньяно иностранным членом Берлинской академии, и во многом продолжил исследования Фаньяно. Это относится к тем трудам Фаньяно, которые были написаны ок. 1719 г. и относились к развитию методов интегрирования с помощью введения мнимых переменных, а также их приложений к вычислению площадей и дуг некоторых кривых, в том числе эллипса [33, *с. 469*]. Фаньяно, не скованный коллегиальными отношениями и профессиональными прикладными задачами, занимался число математическими аспектами и выработал несколько оригинальных методов как в отношении решения алгебраических уравнений, так и в отношении методов интегрирования, в частности, вычисления дуг кривых без помощи рядов, лишь с помощью сопоставления их разностей. При решении квадратур Фаньяно сначала ищет способ найти путем приближения круговой сектора, дуга которого равна заданному промежутку гиперболы, а затем гиперболическую площадь, равную соответствующему круговому сектору [33, *с. 476*].

Решая поставленную задачу: найти приближением, *но без использования обращения ряда*, сектор окружности, равный заданному промежутку между равносторонней гиперболой, асимптотой и двумя ординатами той же асимптоты, Фаньяно получает и исследует уравнение, которым впоследствии заинтересовался Эйлер [33, *с. 480*]

$$\frac{dt\sqrt{-1}}{1+tt} = \frac{dx\sqrt{-1}}{1+x}. \tag{1}$$

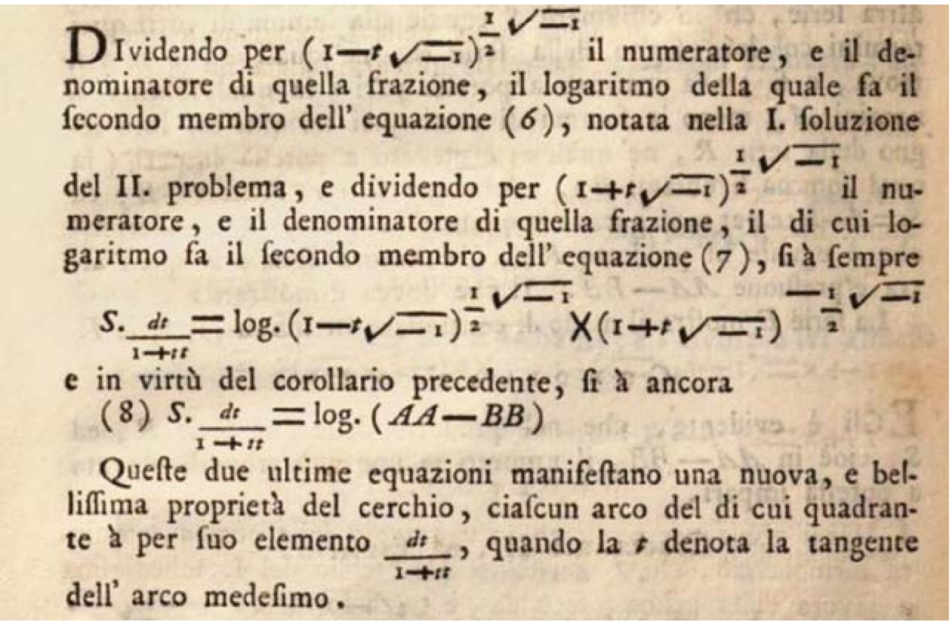
При этом Фаньяно получает выражение арктангенса через логарифм, в наших обозначениях

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \ln\left((1-it)^{i/2} \times (1+it)^{-i/2}\right),$$

а также её эквивалентные формы (илл. 6).

И, наконец, в последней главе Фаньяно ставит вопрос о вычислении дуги эллипса (точнее, о нахождении такой круговой или гиперболической дуги, которая равна дуге эллипса). Используя свой метод изучения лемнискаты, Фаньяно обратил внимание на соотношение между дугами на эллипсе. При решении этой задачи у него возникает интеграл, названный впоследствии эллиптическим. Фаньяно гордился тем, что он первым

[11] Заметим, что с точки зрения католической церкви, у Лейбница и Бернулли был только один недостаток: они были протестантами. Их сочинения, в частности, некоторые номера Acta eruditorum, входили в индекс запрещенных книг L'Index librorum prohibitorum (декреты 29 марта 1690, 4 марта 1709, 15 января 1714) и Фаньяно регулярно приходилось просить у аббата Гвидо Гранди разрешения (лицензию) на прочтение этих книг (сами книги, как писал Фаньяно, с некоторыми усилиями удавалось достать) [45, *p. 5*].



Dividendo per $(1-t\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$ il numeratore, e il denominatore di quella frazione, il logaritmo della quale fa il ſecondo membro dell' equazione (6), notata nella I. ſoluzione del II. problema, e dividendo per $(1+t\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$ il numeratore, e il denominatore di quella frazione, il di cui logaritmo fa il ſecondo membro dell' equazione (7), ſi à ſempre

$$S.\frac{dt}{1+tt} = \log.(1-t\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}} \times (1+t\sqrt{-1})^{-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$$

e in virtù del corollario precedente, ſi à ancora

$$(8)\quad S.\frac{dt}{1+tt} = \log.(AA-BB)$$

Queſte due ultime equazioni manifeſtano una nuova, e belliſſima proprietà del cerchio, ciaſcun arco del di cui quadrante à per ſuo elemento $\frac{dt}{1+tt}$, quando la t denota la tangente dell' arco medeſimo.

Иллюстрация 6. Фаньяно [33, *с. 490*]

начал оперировать с мнимыми степенями. К сожалению, здесь мы не можем рассказать об этом подробно.

1797, Каспар Вессель, комплексное число как направленный отрезок, геометрическая интерпретация операций

В 1797 г. геодезист и картограф Каспар Вессель подал в Датскую академию наук работу *Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников* [Wessel C.], опубликованную в 1799 г. Вессель ввёл понятие комплексного числа как направленного отрезка, определил сложение как параллельное смещение плоскости, а умножение – как вращение плоскости с растяжением. Операции над комплексными числами распространились на операции над геометрическими объектами. Работа предназначалась для картографов, опубликована на датском языке, и более столетия оставалась неизвестной математическому сообществу.

1806, 1813/14, Арган. Геометрические диаграммы

Биографии Аргана спорна и даже подлинность его имени подвергается сомнениям. Возможно, его имя и годы жизни – Жан Робер Арган (1768–1822). Мы рекомендуем читателю обратиться к исследованию Шубринга (G. Schubring [47]), хотя и его интерпретация содержит противоречия.

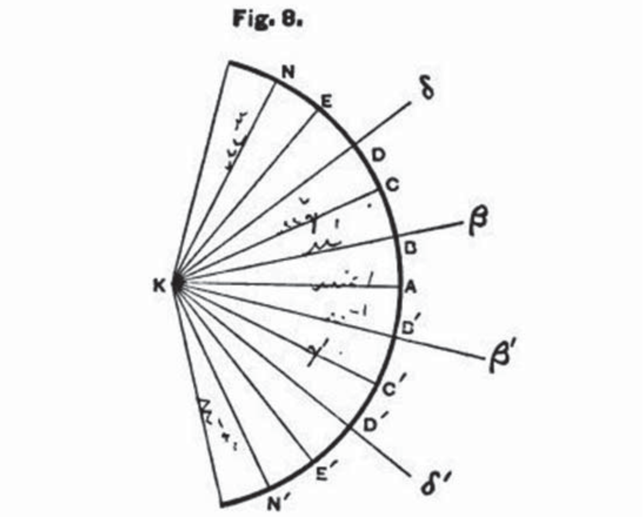
В 1806 г. во Франции вышла анонимная брошюра *Опыт некоторого способа представления мнимых величин в геометрических построениях* [9], в которой была разработана геометрическая теория комплексного числа. В частности, там говорится, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а модули растягиваются. В работе введены так называемые диаграммы Аргана, изображающие на окружности операции умножения, возведения в степень и извлечения корня из комплексного числа. Как подтвердилось впоследствии, автором брошюры был математик-любитель Арган. Известно, что Лежандр высоко оценил присланный ему автором экземпляр.

1813, Жак Франсе. Первое появление знаменитой формулы

В то время во Франции жили два брата, армейские офицеры и после отставки преподаватели математики.

Старший, Франсуа Жозеф Франсе (1768–1810), преподавал математику в гражданских и военных учебных заведениях. Он был дружен с Л.-Ф. Арбогастом, написал несколько неопубликованных мемуаров о дифференциальном исчислении и его применении в артиллерии, получивших высокую оценку А.-М. Лежандра, Ж.Л. Лагранжа, С.Ф. Лакруа и Ж.-Б. Био. Лежандр передал ему анонимную брошюру Аргана 1806 г.

Младший брат, Жак Фредерик Франсе (1875–1833) служил в инженерном корпусе, затем был



§1. If AB, BC, ... , EN (Fig. 8) are equal arcs, n in number, and we make $\overline{KB}=u$, we shall have $\overline{KC}=u^2$, $\overline{KD}=u^3$, ... , $\overline{KN}=u^n$.

Иллюстрация 7. Диаграмма Аргана, посвящённая возведению комплексного числа в степень

профессором военного искусства в Меце. Ему принадлежат работы по интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, по аналитической геометрии, в том числе по преобразованию косоугольных координат и их приложение к решению проблемы нахождения сферы, касательной к четырём заданным сферам. После смерти своего старшего брата (1810), Жак Франсе изучил его математический архив и продолжил его математические исследования. Он опубликовал четыре мемуара об идеях своего брата, дополнив их так, что трудно различить вклады каждого из братьев. В сентябре 1813 г. во втором номере IV тома журнала Жергонна *Annales de mathématiques* Жак Франсе опубликовал работу *Новые принципы позиционной геометрии и интерпретация мнимых символов* [34], в которой дал геометрическое представление комплексных чисел с интересными приложениями.

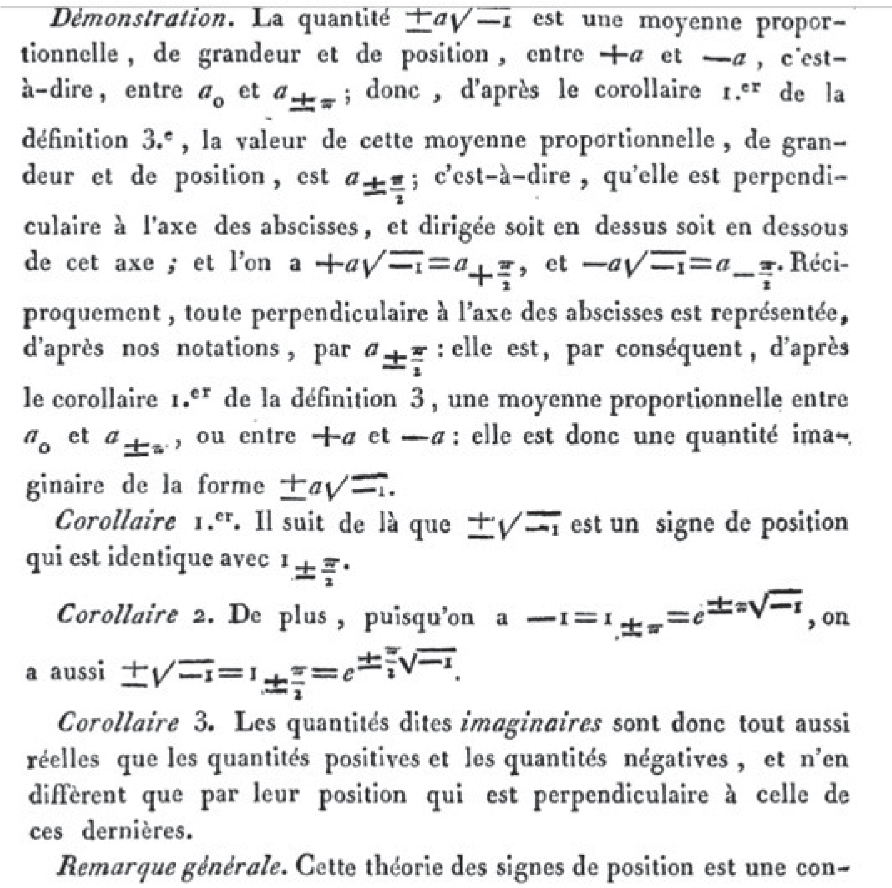
Этой публикации предшествовала бурная дискуссия между Ж. Франсе, Арганом и Ф. Сервуа. Франсе и Арган аргументировали правильность геометрического представления, в то время как Сервуа утверждал, что комплексные числа должны интерпретироваться только с использованием чистой алгебры.

В своей работе Жак Франсе сослался на анонимную брошюру Аргана 1806 г.: «Я должен по справедливости заявить, что основание этих новых идей не принадлежит мне. Я нашел это в письме г-на Лежандра к моему покойному брату, о чём этот великий геометр рассказал ему. Следовательно, то, что принадлежит мне, сводится к способу объяснения и демонстрации этих принципов, к обозначению и к идее обозначения положения ... Я публикую полученные мной результаты в надежде на то, что первый автор этих идей заявит о себе» [34, *с. 70–71*].

Именно в этой статье, на 64 с., [во втором следствии] Жак Франсуа пишет: $+1 = e^{0\pi\sqrt{-1}}$, и $-1 = e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$. Это и есть первое явное написание тождества Эйлера (илл. 8).

В ноябре 1813 г. в V выпуске того же 4-го тома этого журнала Арган откликнулся своей статьей *Размышления о новой теории мнимых с последующим приложением к доказательству теоремы анализа* [10], в которой признал своё авторство анонимной брошюры 1806 г., упомянул о знакомстве с ней Лежандра и об его высоком мнении об этой брошюре, а также изложил с некоторыми уточнениями своё новое доказательство основной теоремы алгебры, и ввёл термин «модуль комплексного числа» в его современном значении.

В журнале Жергонна *Annales de mathématiques pures et appliquées* до 1832 г. было несколько статей с примерами вычислений логарифмов и степеннопоказательных функций комплексной переменной. В других французских и немецких математических журналах периода 1830–1875 внимания тождеству Эйлера не уделялось.



Démonstration. La quantité $\pm a\sqrt{-1}$ est une moyenne proportionnelle, de grandeur et de position, entre $+a$ et $-a$, c'est-à-dire, entre a_0 et $a_{\pm\pi}$; donc, d'après le corollaire 1.er de la définition 3.e, la valeur de cette moyenne proportionnelle, de grandeur et de position, est $a_{\pm\frac{\pi}{2}}$; c'est-à-dire, qu'elle est perpendiculaire à l'axe des abscisses, et dirigée soit en dessus soit en dessous de cet axe; et l'on a $+a\sqrt{-1}=a_{+\frac{\pi}{2}}$, et $-a\sqrt{-1}=a_{-\frac{\pi}{2}}$. Réciproquement, toute perpendiculaire à l'axe des abscisses est représentée, d'après nos notations, par $a_{\pm\frac{\pi}{2}}$: elle est, par conséquent, d'après le corollaire 1.er de la définition 3, une moyenne proportionnelle entre a_0 et $a_{\pm\pi}$, ou entre $+a$ et $-a$: elle est donc une quantité imaginaire de la forme $\pm a\sqrt{-1}$.

Corollaire 1.er. Il suit de là que $\pm\sqrt{-1}$ est un signe de position qui est identique avec $1_{\pm\frac{\pi}{2}}$.

Corollaire 2. De plus, puisqu'on a $-1=1_{\pm\pi}=e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$, on a aussi $\pm\sqrt{-1}=1_{\pm\frac{\pi}{2}}=e^{\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$.

Corollaire 3. Les quantités dites *imaginaires* sont donc tout aussi réelles que les quantités positives et les quantités négatives, et n'en diffèrent que par leur position qui est perpendiculaire à celle de ces dernières.

Remarque générale. Cette théorie des signes de position est une con-

Иллюстрация 8. Первое появление знаменитого тождества Эйлера, 1813 г. (Français, J. F. Nouveaux principes [34, *с. 64*])

1821, Огюстен Коши. Analyse algébrique

В 1821 году Огюстен Коши читал курс анализа в Политехнической школе [19]. Коши выражает логарифм от –1: $l((-1)) = \pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}$ [19, *с. 315*], но показательной записи не даёт. Он предлагает обозначать главное значение логарифма (при $k = 0$) $l(a)$ или просто la. У Коши нет геометрической интерпретации комплексных чисел и операций над ними. Но это был учебный курс, а не научное исследование. В своём изложении Коши придерживается основных пунктов статьи Эйлера «О логарифме отрицательного числа».

Вот фрагмент, посвящённый вычислению логарифма от минус единицы (илл. 9, 10).

На стр. 318 Коши повторяет формулу для главного и общего значения логарифма для значения πi (илл. 11).

Позже, в 1829–1832 годах Коши сделал величайший вклад в теорию функций комплексной переменной – создал теорию вычетов. В работах по этой теме Коши часто использовал показательную форму представления как для доказательства непрерывности (*О разложениях функций в упорядоченные ряды по возрастанию переменных* [20]), так и при вычислении контурных интегралов.

Он неоднократно обращался к теме представления чисел и функций в показательном виде. В 1831–1832 г., будучи в эмиграции в Турине, Коши опубликовал в двух тетрадях литографированное издание *Résumés Analytiques* (*Краткое аналитическое изложение*), неоднократно переиздаваемое им по возвращении во Францию [21]. Изложение содержит результаты различных направлений его исследований, в том числе § XV. *Мнимые экспоненты. Разложение через функции* cos$x$, sin$x$ [24]. Здесь на с. 140 содержится тождество Эйлера в виде $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$. В 1846 г. Коши опубликовал *Мемуар о функциях мнимой переменной* [22], а в 1847 г. *Мемуар о новой теории мнимых и о символических корнях уравнений и о тождествах* [23], также опубликованный в XXX номере журнала Крелле. Здесь Коши представляет свою теорию алгебраической эквивалентности, в которой мнимые числа рассматривались как эквивалентные классы многочленов с действительными коэффициентами по модулю (x^2+1). Тождество, которое он здесь приводит и называет символическим, это $i^2+1=0$ [23, *с. 319*].

В последующие годы в европейских журналах авторы не проявляли большого интереса к вопросам тригонометрического и экспоненциального представления комплексного числа и их интерпретации.

l'expression

$$l((-1)).$$

SOLUTION. Soit $u+v\sqrt{-1}$ l'une de ces valeurs, u, v désignant deux quantités réelles. On aura, d'après la définition même de l'expression $l((-1))$,

$$(13) \qquad e^{u+v\sqrt{-1}} = -1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$e^{u}\left(\cos.\, v + \sqrt{-1}\,\sin.\, v\right) = -1.$$

Иллюстрация 9. Коши [19, *с. 315*]

316 COURS D'ANALYSE.

En d'autres termes, les diverses valeurs de $l((-1))$ seront données par l'équation

$$(14) \qquad l((-1)) = \pm(2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Par conséquent ces valeurs seront toutes imaginaires et en nombre infini.

3.e PROBLÈME. *Trouver les diverses valeurs de l'expression*

Иллюстрация 10. Коши [19, *с. 316*]

$$(19) \qquad l((\alpha+\beta\sqrt{-1})) = l(\rho)+\zeta\sqrt{-1}+\pi\sqrt{-1}+l((1)).$$

Si dans cette dernière équation on fait en particulier $\alpha+\beta\sqrt{-1} = -1$, c'est-à-dire, $\alpha = -1$, $\beta = 0$, et par suite $\rho = 1$, $\zeta = 0$, on obtiendra la suivante

$$(20) \qquad l((-1)) = \pi\sqrt{-1} + l((1)).$$

Il en résulte qu'on aura généralement, pour des valeurs négatives de α,

$$(21) \qquad l((\alpha+\beta\sqrt{-1})) = l(\rho)+\zeta\sqrt{-1}+l((-1)).$$

Иллюстрация 11. Коши [19, *с. 318*]

Первая треть XIX века, Британия. Попытка логической интерпретации

С начала XIX века математики Англии уделяли внимание устранению различий в английской и континентальной математической терминологии, восходящих к работам Ньютона и Лейбница, а также обоснованию алгебраических операций. По уровню математической подготовки Англия заметно отставала от европейских стран. Молодые британские профессора ратовали за реформирование устаревшей системы образования. В то время лучшие учебники и научные исследования были на французском языке. Молодые математика Тринити-колледжа

(Кембридж) Дж. Пикок, Ч. Бэббидж[12], Дж. Гершель[13] и Р. Вудхауз[14] к 1812–1815 гг. основали Аналитическое общество для перевода французских учебников по высшей математике и для собственных исследований, направленных на проблемы обоснования преподаваемых наук, прежде всего алгебры. При этом ими была предпринята попытка придать анализу алгебраическую форму.

Преподаватель Кембриджа, математик и астроном Роберт Вудхауз в 1801 г. пишет статью *О необходимой истинности некоторых заключений, полученных с помощью мнимых величин* [56], направленную на необходимость логического обоснования операций с мнимыми величинами, в частности, относительно разложения в ряд[15] экспоненты. Автор показывает, что «операции с мнимыми величинами отнюдь не механические, а проводятся по правилам строгой и неукоснительной логики; и что, хотя, строго говоря, никакое суждение о них не может быть истинным или ложным, тем не менее, после демонстрации определенных формул для реальных величин, демонстрации с невозможными величинами могут быть проведены законно и логически» [56, *с. 118–119*]. Вудхауз анализирует «Введение в анализ бесконечно малых» Эйлера, раздел о логарифме отрицательного числа, а также исследует значения, при которых $e^x = -1$. Вопрос, поставленный Вудхаусом, таков: будет ли значение x в разложении e^x обеспечивать для y или $e^x = -1$ значение действительной величины или нет?

Вудхауз рассматривает аргументы участников спора о логарифме отрицательного числа, упрекает Эйлера в том, что его *Введение в анализ* местами ошибочно и часто неудовлетворительно, добавляя, что «было необходимо исследовать понятия, на которых в конечном счете покоится вычисление; объяснять значение воображаемых символов, прослеживая их происхождение; устанавливать отдельными и независимыми доказательствами правила сочетания невозможных величин, а не выводом из их сходства с правилами подобных сочетаний действительных величин; и тщательно различать то, что доказано на очевидных принципах, и то, что следует только из произвольных предположений» [56, с. 111, 118]. Вудхаус заканчивает свою статью так: «Я попытался установить логику для невозможных величин; зафиксировать значение некоторых двусмысленных выражений; и примирить противоречия в учении о логарифмах. Я питаю надежду, что то, что я сказал, может удержать математиков от попыток обосновать доказательство на таком хрупком и узком основании, как аналогия; или из-за опасного представления, что в системе символов, полностью выдуманной ими, есть либо необъяснимые парадоксы, либо необъяснимые тайны» [ibidem, *p. 119*].

В 1803 г. Р. Вудхауз пишет книгу *Принципы аналитических вычислений* [57], во многом посвящённую формулам Эйлера и правомерности их обоснования с помощью рядов, где замечает: «Хотя в отдельности эти символы не поддаются численному исчислению, но без ущерба для логической точности и отчётливого понимания, формулы вполне можно использовать в расчётах, так как известен их источник и вывод» [57, *p. 9*].

Другой член Аналитического общества, Дж. Пикок, выпускник и преподаватель Тринити-колледжа, создатель алгебры логики, основной своей задачей ставил реформирование преподавания алгебры. В 1830 году он опубликовал *Трактат по алгебре* [44], целью которого было поставить алгебру на строго логическую, не уступающую уровню европейских университетов[16]. Дж. Пикок рассматривал в ней операции над действительными и комплексными числами, и формулы Эйлера. Он сформулировал принцип перманентности эквивалентных форм: законы операций алгебры должны оставаться неизменными, что бы ни означали символы, над которыми совершается операция[17] [44, *с. 104*].

Отсюда берет своё начало английская школа алгебры логики, в которую входили Дункан Грегори, А. Де Морган и Дж. Буль. Подход английских математиков определил логическую составляющую интереса к формулам Эйлера.

---

[12] Чарльз Бэббидж (1791–1871) – математик, изобретатель первой аналитической вычислительной машины, иностранный член-корреспондент Императорской академии наук в Санкт-Петербурге (1832). Несмотря на обучение в Тринити-колледже, основам математики он обучался самостоятельно по трудам Ньютона, Лейбница, Лагранжа, Лакруа, Эйлера и других математиков академий Санкт-Петербурга, Берлина и Парижа.

[13] Джон Фредерик Уильям Гершель (John Frederick William Herschel, 1792–1871) английский химик, математик, астроном и физик.

[14] Работы Вудхауза не имели большого влияния на его современников, если бы не поддержка Джорджа Пикока, Чарльза Бэббиджа и Джона Гершеля, которые сформировали Аналитическое общество с цель защиты общего использования в университете аналитических методов и дифференциальной записи.

[15] Заметим, что основные вопросы сходимости рядов и правомерности операций над рядами были решены к середине XIX века.

[16] В 1842–1845 вышло расширенное издание «Трактата по алгебре» Пикока в двух томах.

[17] §132. Law of the permanents of equivalent forms stated: Whatever form is algebraically equivalent to another, when expressed in general symbols, must be true, whatever those symbols denote.

Now the question concerning the logarithms of negative quantities, in a precise form, and freed from its verbal ambiguities, is this; is the symbol which, substituted for x in the developement of e^x, makes y or $e^x = -1$, the sign of a real quantity or not?

In the expression e^x, x is the logarithm of e^x, and, by extension, $x\sqrt{-1}$ is to be called the logarithm of $e^{x\sqrt{-1}}$. Now $e^{x\sqrt{-1}}$ is the symbol for $1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1\,.\,2\,.\,3}$ &c. or $\left(1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \&c.\right) + \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \&c.\right)$ or $e^{x\sqrt{-1}}$ may be said to be $= \cos.\,x + \sqrt{-1}\sin.\,x$. Hence, $x\sqrt{-1}$ is the logarithm of $\cos.\,x + \sqrt{-1}\sin.\,x$; when the arc x is equal 0, or 2π, or 4π, or 6π, or generally $2m\pi$, its $\cos.\,x = 1$.

Иллюстрация 12. Вудхауз [56, *с. 112*]

Уильям Гамильтон[18] – королевский астроном Ирландии, математик, механик, физик, рассматривал алгебру ни как искусство, ни как язык, ни как науку о количестве, но как науку о порядке в определённых рядах. Гамильтон определил вектор как перенос. Его символ *i* означает, во-первых, единичный вектор оси *Ox*, во-вторых, мнимую единицу, и, в-третьих, оператор вращения – верзор. Гамильтон хотел распространить систему комплексных чисел на трёхмерное пространство, но обнаружил трудности с определением умножения – нарушался либо коммутативный закон, либо закон дистрибутивности. Это противоречило принципу перманентности Пикока, пока в 1843 г. Гамильтон не определил операции над кватернионами. В дальнейшем его теория кватернионов послужила базой для создания векторного анализа.

Середина XIX века, США. Б. Пирс

Американский астроном и математик Бенджамин Пирс[19] внес вклад в небесную и аналитическую механику, статистику (критерий Пирса), теорию чисел, линейную алгебру, геодезию и философию математики. Благодаря ему в университетах США начали читать математические курсы и проводить математические исследования, математика превратилась в академическую науку [8]. Его курсы включали изучение классиков математики, они содержали бурное эмоциональное восхищение их математическими открытиями. Один из его слушателей, впоследствии профессор Гарвардского университета У.Э. Байерли (W.E. Byerly), вспоминал об одном эпизоде 1864 г.: «...В одной из своих лекций он привел соотношение, связывающее π, *e* и *i*, в таком виде: $e^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt[i]{i}$, которое, по-видимому, сильно поразило его воображение. Он выронил мел и резинку, засунул руки в карманы и, поразмыслив несколько минут над формулой, повернулся к своему классу и сказал очень медленно и внушительно: «Господа, это верно, это совершенно парадоксально, мы не можем понимать это, и мы не знаем, что это значит, но мы доказали это, и поэтому мы знаем, что это должно быть правдой» [8].

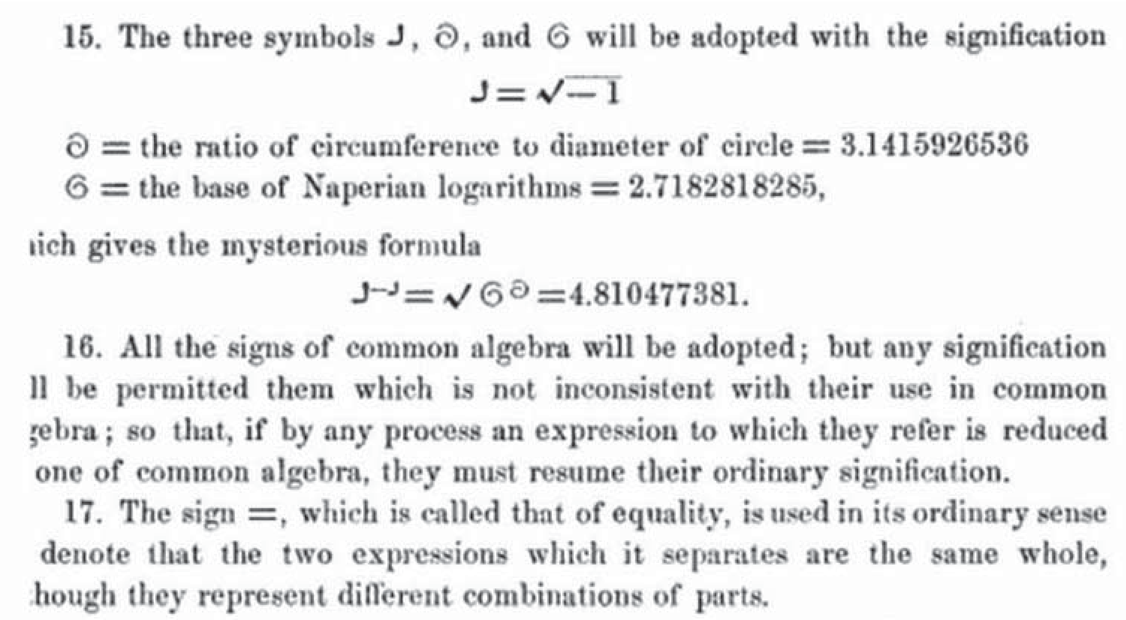
Позже Пирс повторяет рассуждение об этом равенстве в своей «Линейной ассоциативной алгебре» [46, *с. 101–111*].

Этот трактат, по словам самого Пирса, был направлен на то, чтобы привести фундаментальные принципы науки к центральному глубинному источнику и уже оттуда провести краткий путь к наиболее плодотворным формам исследования.

XX век

В 1933 г. Ричард Фейнман в своих знаменитых лекциях по физике [5, *с. 35*] назвал уравнение Эйлера «самой примечательной формулой в математике», «объединением алгебры и геометрии» и

[18] William Rowan Hamilton, 1805–1865.
[19] Benjamin Peirce, 1809–1880, отец Чарльза Пирса.



15. The three symbols J, Ͽ, and Ϭ will be adopted with the signification

$$\text{J} = \sqrt{-1}$$

Ͽ = the ratio of circumference to diameter of circle = 3.1415926536
Ϭ = the base of Naperian logarithms = 2.7182818285,

ıich gives the mysterious formula

$$\text{J}^{-\text{J}} = \sqrt{Ϭ^{Ͽ}} = 4.810477381.$$

16. All the signs of common algebra will be adopted; but any signification ll be permitted them which is not inconsistent with their use in common ;ebra; so that, if by any process an expression to which they refer is reduced one of common algebra, they must resume their ordinary signification.

17. The sign =, which is called that of equality, is used in its ordinary sense denote that the two expressions which it separates are the same whole, hough they represent different combinations of parts.

Иллюстрация 13. Peirce [46, *с. 111*]

«нашей драгоценностью». «…мы мало представляли себе силу процессов абстракции и обобщения. Используя набор алгебраических «законов» или свойств чисел, …, определения обратных операций, мы смогли здесь сами изготовить не только числа, но и такие полезные вещи, как таблицы логарифмов, степеней и тригонометрических функций (ибо это то, что мнимые степени вещественных числа)» [5, *с. 92*].

Ещё один известный математик, Майкл Атья, назвал эту формулу «…математическим аналогом фразы Гамлета – «быть или не быть» – очень короткой, очень сжатой, и в то же время очень глубокой».

В 1988 году математик Дэвид Уэллс проводил опрос среди читателей математического журнала *The Mathematical Intelligencer*, предложив выбрать из 24 самую красивую теорему [53]. В 1990 г. он подвёл итоги опроса в статье [54]. Большинство читателей выбрало тождество Эйлера.

Заключение

Итак, мы с Вами проследили путь возникновения формул Эйлера из наблюдений за соответствием между арифметической и геометрической прогрессиями, выраженных геометрически; возникновение алгебраической формы связи между ними, возникновение логарифмической и показательной функций, и их выражения через ряды; их вспомогательную роль при интегрировании. Значение естественных источников возникновения этих формул сменилось аппаратным применением в математике и прикладных вопросах, старанием усилить алгебраический аспект, недоверчиво-настороженным отношением логиков и философов математики, восторженным отношением физиков, и, наконец, признанием тождества Эйлера самой красивой формулой математики. В XX в. апология этой формулы возрастала подобно апологии золотого сечения.

Список литературы

1. Декарт Р. *Геометрия* / Перевод, примечания и статья А.П. Юшкевича. Москва-Ленинград, ГОНТИ. 1938.
2. Ньютон И. *Математические работы*. Москва-Ленинград, ОНТИ. 1937.
3. Ньютон И. *Математические начала натуральной философии* / ред. и предисл. Л.С. Полака; пер. и комм. А.Н. Крылова. М.: Наука. 1989.
4. Тимченко И.Ю. *Основания теории аналитических функций. Ч. 1: Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций*. Одесса: Шульце, 1899.
5. Фейнман Р.Ф., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике. Т. 2. Пространство. Время. Движение*. М.: Мир, 1967.
6. Эйлер Л. *Введение в анализ бесконечно малых* / пер. Е.Л. Пацановского под ред И.Б. Погребысского. М.: ГИФМЛ, 1961.
7. Юшкевич А.П. *История математики. Т. 3. Математика XVIII столетия*. М.: Наука, 1972.
8. Archibald R.C., Lowell A.L., Byerly W.E., Chace A.B. Benjamin Peirce // *The American Mathematical Monthly*. 1925. Vol. 32. Issue 1. Pp 1–30.
9. Argand R. *Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. 2e édition. Paris, Gauthier Villars. 1874. Pp. 1–60.

10. Argand. Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analise //*Annales de mathématiques pures et appliquées*. 1813. T. 5 (1814–1815). Pp. 197–209.

11. Argand J.R. *Imaginary quantities; their geometrical interpretation*. New York, D. Van Nostrand, 1881.

12. Bernoulli Jacob. Quaestiones nonnullæ de usuris, cum solutione problematis de sorte alearum, propositi in Ephem. Gall. A. // *Acta Eruditorum*, (1685) May 1690. Pp. 219–223.

13. Bernoulli Jacob Lineae cycloidales, Evolutae, Ant-Evolutae, Causticae, Anti-Causticae, Peri-Causticae. Earum usus & simplex relation ad se invicem. Spira mirabilis //*Acta eruditorum*, 1692, May. Pp. 207–213.

14. Bernoulli Johann I. Op. LXX, Solution d'un Problême Concernant le calcul intégral, avec quelques abregés par raport à ce calcul. Par M. Bernoulli Professeur à Groningue. Le tout extrait d'une de ses Lettres écrite de Groningue le 5. Aoust 1702 // *Mémoires de l'Académie royale des sciences,* 1702 (1704). Pp. 289–297.

15. Bernoulli Johann I. *Manière abrégées de transformer les différentielles composées en simples, & reciproquement; Et même les simples imaginaires en réelles composées*. (1702) Tomus primus quo continentur ea quae ab anno 1690 ad annum 1713 prodierunt. Lausannae & Genevae, sumptibus Marci-Michaelis Bousquet & sociorum, 1742. [6], XXIV, 563, [1] p., XXIII c. di tav. Pp. 399–400.

16. Bessel F.W. Ueber die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen // *Astronomische Nachrichten*, 1825, 4. Pp. 241–254.

17. Bombelli R. *L'algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri di Rafael Bombelli da Bologna*. Bologna, Nella stamperia do Guovanni Rossi, 1572.

18. Cardani H. *Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus*. Papiae, A.Osiandro, 1545.

19. Cauchy A.-L. *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique*. Analyse Algébrique. Paris, Imprimerie royale. 1821.

20. Cauchy A.-L. Sur les développement des fonctions series ordonnées suivant les puissances ascendan les des variables // *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 1846. Pp. 313–330.

21. Cauchy A.-L. *Oeuvres complètes. Série 2*. Vol. 10. (1845) Paris, l'Académie des sciences. 1882–1974.

22. Cauchy A.-L. Mémoire sur les fonctions de variables imaginaires // *Oeuvres completes. Série 2*. Vol 13. Pp. 405–435. (1846). Paris, l'Académie des sciences. 1882–1974.

23. Cauchy A.-L. Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences // *Oeuvres completes. Série 1*. Vol 10. Pp. 312–323.

24. Cauchy A.-L. Des exponentielles imaginaires. Développements des fonctions cosx, sinx // *Oeuvres completes. Série 2*. Vol 10. Pp. 133–141.

25. Cotes R. Logometria // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1714, 29 (338). Pp. 5–45.

26. Cotes Roger with Smith Robert, ed., *Harmonia mensurarum: sive analysis & synthesis per rationum & angulorum mensuras promotæ: accedunt alia opuscula mathematica* / per Rogerum Cotesium ... . Cantabrigia, edidit et auxit Robertus Smith. 1722. Separate pagination.

27. D'Alembert J. Sur les Logarithmes des quantités negatives. Sixiéme Mémoire // *Opuscules mathématiques ou Mémoires sur différens sujets de géométrie, de méchanique, d'optique, d'astronomie*. Vol. 1. Paris, Jombert, David, Briasson. 1756. Pp. 210–230.

28. Dürer Albrecht. *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen*. Nüremberg: Hieronymus Andreae. 1525.

29. Euler L. *Introductio in analysin infinitorum*. Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet, 1748. Vol. 1.

30. Euler L. *Opera postuma mathematica et physica*. St.-Petersburg, Academiae Scientiarum Petropolitanae. 1862. Vol. 1.

31. Euler L. Da summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum // *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum*, VII, 1743. Pp. 172–192. = Opera omnia, Series 1. Vol. 14. Pp. 138–155.

32. Euler L. Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires // *Opera postuma mathematica et physica*, 1862. Vol. 1. Pp. 269–281.

33. Fagnano G.C. *Produzioni matematiche del conte Giulio Carlo di Fagnano... Tomo primo*. In Pesaro, nella stamperia Gavelliana, 1750.

34. Français J.F. Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires // *Annales de Mathématiques pures et appliquées*. Vol. 4 (1813–1814). Pp. 61–71.

35. Feynman R.P. *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. I. The New Millennium Edition, 2011.

36. Jones W. *Synopsis Palmariorum Matheseos: Or, a new Introduction to the Mathematics*.... London: Printed by Jeff. Wale at the Angel in St. Paul's Church-Yard. 1706.

37. Hamilton W.R. Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time // *Transactions of the Royal Irish Academy*. Vol. 17. Part 1 (1837). Pp. 293–422.

38. Ivory J. *A new series for the rectification of the Ellipsis: together with some observations of the evolution of the formula* $(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^n$. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. 1798. 4. Pp. 177–190.

39. Leibniz G. Specimen novum analyseos pro scientia infini, circa Summas & Quadraturas // *Acta eruditorum*. 1702, May. Pp. 210–219.

40. Mercator N. *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos nova, accurata et facilis*. London, G. Godbid, 1668.

41. Moivre Ab. Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicus quae vocantur Cardani resolution analvtica // *Philisophical Transactions*, 1706/1707. Pp. 2368–2371.

42. Moivre Ab. De Sectione Anguli // *Philisophical Transactions*, 1722, 374. Vol. 32. Pp. 228–230.

43. Napier J. Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio: Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam

in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, & expeditißimi explicatio // *Edinburgi. Hart*, 1614.

44. Peacock G. *A treatise on algebra*. London, Cambridge: J. & J.J. Deighton. 1830.

45. Pepe L. La formazione filosofica e scientifica di Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano // *Torino, Conferenze e seminari Associazione Subalpina Mathesis a cura di E. Gallo, L. Giacardi, C.S. Roero*, 2000. Pp. 82–94.

46. Pierce B. Linear Associative Algebra // *American Journal of Mathematics*. Vol. 4. Johns Hopkins University Press, 1881. Pp. 97–229.

47. Schubring G. Argand and the Early Work on Graphical Representation: New Sources and Interpretations // *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers. Proceedings of the Wassel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11-15 1998* / J. Lützen (Ed.). Copenhagen: Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, 2001. Pp. 125–146.

48. Torricellii E. *Opera geometrica Evangelistae Torricellii.* Florentiae: Masse & de Landis, 1644.

49. Varignon P. Nouvelle formation de spirales // *Histoire de l'académie royale des science, année.* 1704, Paris, 1706. Pp. 69–131.

50. Virorum Celeberr. *Got. Gul. Leibnitii Et Johan. Bernoullii Commercium Philosophicum Et Mathematicum*. Vol. 2. Lausannae et Genevae: Sumpt. M.M. Bousquet et socior. 1745.

51. Wallis J. *A treatise of algebra, both historical and practical*. London: printed by John Playford, 1685. Separate pagination.

52. Wallis J. *De algebra tractatus, historicus [et] practicus ... cum variis appendicibus ...: Operum Mathematicorum volumen alterum*. Oxoniae: E Theatro Sheldoniano, 1693.

53. Wells D. Which is the most beautiful? // *Mathematical Intelligencer*, 1988. Vol. 10. No. 4. Pp. 30–31.

54. Wells D. Are These the Most Beautiful? // *Mathematical Intelligencer*, 1990. Vol. 12. No. 3. Pp. 37–41.

55. Wessel C. On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefly to the Solution of Plane and Spherical Polygons // *Smith D.E. A source book in Mathematics*. New York: Dover publications. 1959. Vol. 3. Pp. 55–66.

56. Woodhouse R. On the Necessary Truth of Certain Conclusions Obtained by Means of Imaginary Quantities // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*,1801. Pp. 89–119.

57. Woodhouse R. *The principles of analytical calculation*. Cambridge: Printed at the University press. 1803.

58. Gowing R. *Roger Cotes – Natural Philosopher*. Cambridge University Press. 1983.

References

1. Descartes R. *Geometria* [Geometry]. Perevod, primechaniya i stat'ya A.P. Yushkevicha. Moscow-Leningrad, GONTI. 1938.

2. Newton I. *Matematicheskiye raboty* [Mathematical works]. Moscow-Leningrad, ONTI. 1937.

3. Newton I. Matematicheskiye nachala natural'noj filosofii [Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica]. Red. i predisl. L.S. Polaka; per. i komm. A.N. Krylova. M.: Nauka. 1989.

4. Timchenko I.Yu. *Osnovaniya teorii analiticheskih funktsij. Ch. 1: Istoricheskiye svedeniya o razvitii ponyatij i metodov, lezhashchih v osnovanii teorii analiticheskih funktsij* [Foundations of the theory of analytic functions. Part 1: Historical information about the development of concepts and methods underlying the theory of analytic functions]. Odessa, Shul'tse. 1899.

5. Feynman R.F. 1967. *Fejnmanovskiye lektsii po fizike. Tom 2. Prostranstvo. Vremya. Dvizheniye* [Feynman Lectures on Physics. Vol. 2. Space. Time. Movement]. M.: Mir, 1967.

6. Euler L. *Vvedeniye v analiz beskonechno malyh* [Introductio in analysin infinitorum]. Per. Ye.L. Patsanovskogo pod red I.B. Pogrebysskogo. M.: GIFML. 1961.

7. Yushkevich A.P. *Istoriya matematiki* [History of Mathematics]. T. 3. Matematika XVIII stoletiya. M.: Nauka. 1972.

8. Archibald R.C., Lowell A.L., Byerly W.E., Chace A.B. Benjamin Peirce // *The American Mathematical Monthly*. 1925. Vol. 32. Issue 1. Pp 1–30.

9. Argand R. *Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. 2e édition. Paris, Gauthier Villars. 1874. Pp. 1–60.

10. Argand. Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analise //*Annales de mathématiques pures et appliquées*. 1813. T. 5 (1814–1815). Pp. 197–209.

11. Argand J.R. *Imaginary quantities; their geometrical interpretation*. New York, D. Van Nostrand, 1881.

12. Bernoulli Jacob. Quaestiones nonnullæ de usuris, cum solutione problematis de sorte alearum, propositi in Ephem. Gall. A. // *Acta Eruditorum*, (1685) May 1690. Pp. 219–223.

13. Bernoulli Jacob Lineae cycloidales, Evolutae, Ant-Evolutae, Causticae, Anti-Causticae, Peri-Causticae. Earum usus & simplex relation ad se invicem. Spira mirabilis //*Acta eruditorum*, 1692, May. Pp. 207–213.

14. Bernoulli Johann I. Op. LXX, Solution d'un Problême Concernant le calcul intégral, avec quelques abregés par raport à ce calcul. Par M. Bernoulli Professeur à Groningue. Le tout extrait d'une de ses Lettres écrite de Groningue le 5. Aoust 1702 // *Mémoires de l'Académie royale des sciences,* 1702 (1704). Pp. 289–297.

15. Bernoulli Johann I. *Manière abrégées de transformer les différentielles composées en simples, & reciproquement; Et même les simples imaginaires en réelles composées*. (1702) Tomus primus quo continentur ea quae ab anno 1690 ad annum 1713 prodierunt. Lausannae & Genevae, sumptibus Marci-Michaelis Bousquet & sociorum, 1742. [6], XXIV, 563, [1] p., XXIII c. di tav. Pp. 399–400.

16. Bessel F.W. Ueber die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen

Vermessungen // *Astronomische Nachrichten*, 1825, 4. Pp. 241–254.

17. Bombelli R. *L'algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri di Rafael Bombelli da Bologna*. Bologna, Nella stamperia do Guovanni Rossi, 1572.

18. Cardani H. *Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus*. Papiae, A.Osiandro, 1545.

19. Cauchy A.-L. *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique*. Analyse Algébrique. Paris, Imprimerie royale. 1821.

20. Cauchy A.-L. Sur les développement des fonctions series ordonnées suivant les puissances ascendan les des variables // *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 1846. Pp. 313–330.

21. Cauchy A.-L. *Oeuvres complètes. Série 2*. Vol. 10. (1845) Paris, l'Académie des sciences. 1882–1974.

22. Cauchy A.-L. Mémoire sur les fonctions de variables imaginaires // *Oeuvres completes. Série 2*. Vol 13. Pp. 405–435. (1846). Paris, l'Académie des sciences. 1882–1974.

23. Cauchy A.-L. Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences // *Oeuvres completes. Série 1*. Vol 10. Pp. 312–323.

24. Cauchy A.-L. Des exponentielles imaginaires. Développements des fonctions cosx, sinx // *Oeuvres completes. Série 2*. Vol 10. Pp. 133–141.

25. Cotes R. Logometria // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1714, 29 (338). Pp. 5–45.

26. Cotes Roger with Smith Robert, ed., *Harmonia mensurarum: sive analysis & synthesis per rationum & angulorum mensuras promotæ: accedunt alia opuscula mathematica* / per Rogerum Cotesium ... . Cantabrigia, edidit et auxit Robertus Smith. 1722. Separate pagination.

27. D'Alembert J. Sur les Logarithmes des quantités negatives. Sixiéme Mémoire // *Opuscules mathématiques ou Mémoires sur différens sujets de géométrie, de méchanique, d'optique, d'astronomie*. Vol. 1. Paris, Jombert, David, Briasson. 1756. Pp. 210–230.

28. Dürer Albrecht. *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen*. Nüremberg: Hieronymus Andreae. 1525.

29. Euler L. *Introductio in analysin infinitorum*. Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet, 1748. Vol. 1.

30. Euler L. *Opera postuma mathematica et physica*. St.-Petersburg, Academiae Scientiarum Petropolitanae. 1862. Vol. 1.

31. Euler L. Da summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum // *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum*, VII, 1743. Pp. 172–192. = Opera omnia, Series 1. Vol. 14. Pp. 138–155.

32. Euler L. Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires // *Opera postuma mathematica et physica*, 1862. Vol. 1. Pp. 269–281.

33. Fagnano G.C. *Produzioni matematiche del conte Giulio Carlo di Fagnano... Tomo primo*. In Pesaro, nella stamperia Gavelliana, 1750.

34. Français J.F. Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires // *Annales de Mathématiques pures et appliquées*. Vol. 4 (1813–1814). Pp. 61–71.

35. Feynman R.P. *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. I. The New Millennium Edition, 2011.

36. Jones W. *Synopsis Palmariorum Matheseos: Or, a new Introduction to the Mathematics*.... London: Printed by Jeff. Wale at the Angel in St. Paul's Church-Yard. 1706.

37. Hamilton W.R. Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time // *Transactions of the Royal Irish Academy*. Vol. 17. Part 1 (1837). Pp. 293–422.

38. Ivory J. *A new series for the rectification of the Ellipsis: together with some observations of the evolution of the formula* $(a^2+b^2\text{-}2ab\cos\varphi)^n$. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. 1798. 4. Pp. 177–190.

39. Leibniz G. Specimen novum analyseos pro scientia infini, circa Summas & Quadraturas // *Acta eruditorum*. 1702, May. Pp. 210–219.

40. Mercator N. *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos nova, accurata et facilis*. London, G. Godbid, 1668.

41. Moivre Ab. Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicus quae vocantur Cardani resolution analvtica // *Philisophical Transactions*, 1706/1707. Pp. 2368–2371.

42. Moivre Ab. De Sectione Anguli // *Philisophical Transactions*, 1722, 374. Vol. 32. Pp. 228–230.

43. Napier J. Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio: Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, & expeditißimi explicatio // *Edinburgi. Hart*, 1614.

44. Peacock G. *A treatise on algebra*. London, Cambridge: J. & J.J. Deighton. 1830.

45. Pepe L. La formazione filosofica e scientifica di Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano // *Torino, Conferenze e seminari Associazione Subalpina Mathesis a cura di E. Gallo, L. Giacardi, C.S. Roero*, 2000. Pp. 82–94.

46. Pierce B. Linear Associative Algebra // *American Journal of Mathematics*. Vol. 4. Johns Hopkins University Press, 1881. Pp. 97–229.

47. Schubring G. Argand and the Early Work on Graphical Representation: New Sources and Interpretations // *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers. Proceedings of the Wassel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11-15 1998* / J. Lützen (Ed.). Copenhagen: Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, 2001. Pp. 125–146.

48. Torricellii E. *Opera geometrica Evangelistae Torricellii.* Florentiae: Masse & de Landis, 1644.

49. Varignon P. Nouvelle formation de spirales // *Histoire de l'académie royale des science, année.* 1704, Paris, 1706. Pp. 69–131.

50. Virorum Celeberr. *Got. Gul. Leibnitii Et Johan. Bernoullii Commercium Philosophicum Et Mathematicum*. Vol. 2. Lausannae et Genevae: Sumpt. M.M. Bousquet et socior. 1745.

51. Wallis J. *A treatise of algebra, both historical and practical*. London: printed by John Playford, 1685. Separate pagination.

52. Wallis J. *De algebra tractatus, historicus [et] practicus ... cum variis appendicibus ...: Operum Mathematicorum volumen alterum*. Oxoniae: E Theatro Sheldoniano, 1693.

53. Wells D. Which is the most beautiful? // *Mathematical Intelligencer*, 1988. Vol. 10. No. 4. Pp. 30–31.

54. Wells D. Are These the Most Beautiful? // *Mathematical Intelligencer*, 1990. Vol. 12. No. 3. Pp. 37–41.

55. Wessel C. On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefly to the Solution of Plane and Spherical Polygons // *Smith D.E. A source book in Mathematics*. New York: Dover publications. 1959. Vol. 3. Pp. 55–66.

56. Woodhouse R. On the Necessary Truth of Certain Conclusions Obtained by Means of Imaginary Quantities // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*,1801. Pp. 89–119.

57. Woodhouse R. *The principles of analytical calculation*. Cambridge: Printed at the University press. 1803.

58. Gowing R. *Roger Cotes – Natural Philosopher*. Cambridge University Press. 1983.

Информация об авторе

Синкевич Галина Ивановна, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математики

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ)
190005, С.-Петербург, Российская Федерация, 2-я Красноармейская, 4

Information about author

Sinkevich Galina Ivanovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Department of Mathematics

St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
190005, St.-Petersburg, Russian Federation, 2-th Krasnoarmeyskaya, 4