МАТЕМАТИКА

Г.И. Синкевич
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры математики
Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет
Санкт-Петербург, Российская Федерация
E-mail: Galina.sinkevich@gmail.com

ИСТОРИЯ МЕТОДОВ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ

Идея принципа вложенных отрезков или эквивалентное ей представление о сходящихся последовательностях берет свое начало в античности. Архимед вычислял искомое с избытком и недостатком, приближая двумя последовательностями величин – объемлющих и объемлемых. Представление о точке, лежащей в последовательности вложенных отрезков, высказал Ж. Буридан. Поиск искомой величины с помощью приближения с избытком и недостатком использовали П. Ферма, Д. Грегори, И. Ньютон, К. Маклорен, К. Гаусс, Ж.-Б. Фурье. Эта логическая конструкция превращается в метод обоснования анализа в XIX в. в работах Б. Больцано, О.-Л. Коши, П. Дирихле, Ш. Мере, Э. Гейне, Г. Кантора, Г. Дарбу. В семидесятых годах XIX в. было построено несколько концепций действительного числа. Построение Кантора было основано на понятии предельной точки и принципе вложенных отрезков. Генезис этой идеи, уходящей корнями в античность, мы и рассмотрим.

Ключевые слова: *сходящиеся последовательности; вложенные отрезки; Архимед; Буридан; Маклорен; Кантор; Колмогоров.*

G.I. Sinkevich
Cand. of Phys.-Math. Sciences
Associated Professor
Department of Mathematics
Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
Saint-Petersburg, Russian Federation
E-mail: Galina.sinkevich@gmail.com

HISTORY OF CONVERGENT SEQUENCES METHODS AND SUB-SEGMENTS

The idea of nested intervals or an equivalent idea of convergent sequences originated in antiquity. Archimedes calculated in excess and deficiency, with two sequences of values, ambient and nested. The notion of a point lying in the sequence of nested segments, stated J. Buridan. A calculation of an unknown quantity by means of approximation with excess and deficiency used P. Fermat, J. Gregory, I. Newton, C. Maclaurin, K. Gauss, J.-B. Fourier. This logic structure had transformed into a ground method of analysis in the XIX century in works of B. Bolzano, A.-L. Cauchy, P. Lejeune-Dirichlet, E. Heine, G. Cantor, J.G. Darboux. Some concepts of a real number formed in the seventies of the XIX century. Cantor's construction founded on the concept of limit point and the principle of nested segments. We will consider just a genesis of this idea from antiquity to XX c.

Keywords. *Convergent sequences; nested intervals; Archimedes; Buridan, Maclaurin; Cantor; Kolmogorov.*

Свойство множества действительных чисел быть непрерывным или полным было сформулировано в виде нескольких концепций во второй половине XIX в. В основе каждой из этих концепций лежат следующие свойства множества действительных чисел.

1. Каждая последовательность замкнутых вложенных интервалов имеет непустое пересечение, и верна аксиома Архимеда.

2. Каждое ограниченное подмножество имеет верхнюю грань.

3. Каждая последовательность Коши сходится и верна аксиома Архимеда.

4. Каждое бесконечное ограниченное подмножество имеет предельную точку (свойство Больцано-Вейерштрасса).

5. Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Эквивалентность этих свойств была доказана на рубеже XIX и XX вв. Гильбертом. Истоком всех концепций служили античные методы пропорций и исчерпывания, но потребовалось более 2 300 лет для появления концепций числа и непрерывности. История этого процесса богата и интересна, в ней еще много неисследованного. Здесь мы проследим путь только первой из идей: метода вложенных отрезков или, что равносильно, сходящихся последовательностей.

Первая теория действительного числа была построена Евдоксом, изложена Евклидом в «Началах» и состояла из двух частей: теории отношений и метода исчерпания, который был разработан для несоизмеримых величин и заключался в построении монотонной последовательности сумм известных величин, приближающейся с недостатком к искомой геометрической величине. Архимед в своем «досифеевском[1]» цикле: «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях» и «Об измерении круга» при вычислении искомой величины создает две последовательности измеряемых величин, приближающихся к искомой с недостатком и с избытком.

В послании к Эратосфену Архимед отметил, что метод исчерпывания удобен, когда нужно обосновать правильность заранее известного результата. Чтобы найти сам результат, Архимед прибегал к эвристическому механическому методу математического атомизма. Он представлял отрезки линий состоящими из материальных точек плоские фигуры из отрезков и тела из плоскостей, и определял расстояния между центрами тяжести [1, 2].

В период раннего Возрождения в Европе распространились тексты античных авторов. В университетах Парижа XII в. и Оксфорда XIII в. лекции профессоров заключались в чтении классиков, прежде всего Аристотеля, и их комментировании. Как заметил В.П. Зубов, для XIV века характерны «математизация» Аристотеля и «физикализация» Евклида [3, *с. 622*]. Ученые пытались отделить понятия точки, линии и поверхности от их физической интерпретации (споры реалистов и номиналистов). Континуум рассматривался как целостный геометрический либо физический объект (понятие числового континуума формируется лишь в XIX в.). В работах Аверроэса и Альберта Великого возникает идея последовательности и бесконечной последовательности[2] как характеристики движения; зарождается различие между кинематическим и динамическим аспектами. В XIV в. эта идея была развита в трудах Вычислителей (Калькуляторов) – группы ученых Мертон-колледжа в Оксфорде. Благодаря им античная традиция оценок с помощью неравенств сменяется новой традицией точного вычисления, равенства. Их заслугой было введение в науку понятий «последовательность», «интенсивность» и «мгновенная скорость», хотя и не определенных строго.

Жан Буридан (ок. 1300–1358) учился в Сорбонне у Уильяма Оккама. Интересна его концепция континуума, изложенная в «Вопросах к восьми книгам «Физики» Аристотеля», и в трактате «О точке». Буридан выделяет понятие границы, проявляет значимость геометрического понятия «касание». Буридан создает конструкцию, послужившую основой одного важного построения математики XIX в. – последовательность интервалов, в каждом из которых содержится точка континуума: «если взять первую крайнюю точку, то можно указать часть линии, ближайшую к ней и более близкую, нежели все прочие части, которые не являются частями этой части и которых она не является частью. Но если мы возьмем несколько таких частей, из которых одна не является частью другой, то нет двух частей, одинаково близких к первой точке. Например, к первой точке непосредственно примыкает первая половина линии, первая четверть, или первая восьмая. Но среди четвертей одна предшествует всем прочим четвертям, и среди восьмых одна предшествует всем прочим восьмым. Следовательно, аналогично можно сказать о точках, а именно: поскольку все находятся совершенно друг вне друга, одна должна предшествовать всем прочим[3]» [4, 5].

[1] Все эти работы написаны в виде писем к Досифею, ученику Конона.

[2] res successive.

[3] Идея покрытий была высказана Больцано в 1817 г., встречается в лекциях Дирихле 1862 г., лемма о покрытиях сформулирована Гейне в 1872 г., теорема о покрытиях доказана Борелем в 1895 г. и обобщена Лебегом в 1898 г.

В эпоху Возрождения растет интерес к традиции Архимеда, оказавшей влияние на Галилея и Стевина. Метод построения последовательностей объемлющих и объемлемых величин встречается в интерполировании разностями высоких порядков в «Логарифмической арифметике» Г. Бригса, в «Méthodes de quadrature» П. Ферма, о которых он сообщал ученику Галилея Б. Кавальери; в интерполяционных формулах Д. Валлиса.

Математический атомизм возродился в XVI в. И. Кеплер (1571–1630) использовал неделимые при вычислении объемов. Б. Кавальери (1589–1647) в 1635 г. издал «Основы учения о неделимых» [6]. Б. Кавальери высоко ценил эвристический потенциал метода неделимых, но отвергал возможность алгебраического обоснования метода, что порождало противоречия, отмеченные его учителем Галилеем. Дж. Валлис, И. Барроу и И. Ньютон пользовались продуктивным, хотя и противоречивым методом Кавальери. Маклорен писал: «Кавальери чувствовал в равной мере и трудности и преимущества нового метода. Он так говорит о нем, как если бы он предвидел, что необходимо придать новой науке бесспорную форму, чтобы удовлетворить наиболее придирчивых геометров» [7, *с. XLIX-L*].

Таким образом, определились две тенденции, намеченные в трудах Архимеда: поиск искомого результата с помощью метода неделимых, развитого в трудах Кеплера и Кавальери, и обоснование найденного результата с помощью сходящихся с избытком и недостатком последовательностей, продолженного Дж. Грегори и К. Маклореном. Заметим, что целью решения задач было нахождение геометрической величины (длины, площади, объема); в XVII в. этот процесс не давал определения числа как такового.

1668 год, Джеймс Грегори, «Истинная площадь круга и гиперболы»

Шотландец Джеймс Грегори (1638–1675) был предшественником Ньютона в создании математического анализа. В 1644–1667 гг. он жил в Италии, где в Падуе учился у Стефано дельи Анджели (Stefano degli Angeli), ученика Кавальери. Там же он издал два сочинения: «Истинная площадь круга и гиперболы» [8] и «Общие разделы геометрии» [9], где применил метод Архимеда для вычисления криволинейных площадей, но, как отметил он сам, в сочетании с более удобным и кратким методом неделимых, принадлежащим Кавальери. В «Геометрии» Дж. Грегори уже содержится пропорция, позволяющая вычислить длину дуги с помощью элемента дуги, и многие идеи интегрального исчисления. Дж. Грегори впервые использует термин «сходимость». В работе «Истинная площадь круга и гиперболы» [8] Дж. Грегори, выражая все соотношения в пропорциях вписанных и описанных фигур, строит последовательности, приближающиеся к истинному значению площади гиперболического сегмента с избытком и недостатком. Таким образом, традиция Архимеда получает новое развитие на базе метода неделимых[4].

На традиции Архимеда основано вычисление квадратур в интерполяционных формулах у Ньютона. В 1669 г. Ньютон создал метод приближенного решения алгебраического уравнения с помощью касательных [10]. В 1740 г. его усовершенствовал Т. Симпсон [11], в 1768 г. Ж. Мюрей (J.-R.-P. Mourraille, 1720–1808) обратил внимание на необходимость условия выпуклости [12, *с. 179–183*], условия сходимости этого метода описал Ж.Б. Фурье в 1826 г.[5] [13]. Этот метод представляет собой процесс стягивания интервала, содержащего корень уравнения. После того как в 1922 г. С. Банах сформулировал принцип сжимающих отображений [14], на его основе в середине XX в. метод касательных был обобщен в работах Л.В. Канторовича [15, 16].

Ньютон в 1686 г. в «Математических началах натуральной философии» (Книга I, Отдел I, «О методе первых и последних отношений») [17, *с. 57–64*] сформулировал 11

[4] «Послание к Эратосфену» Архимеда, в котором он признает эвристическую роль метода неделимых, было найдено только в 1906 г.

[5] Опубликовано уже после смерти Фурье, в 1831 г.

лемм первой теории пределов[6], в том числе следствие из IV леммы: «Если вообще две какого угодно рода величины будут разделены на одинаковое число частей и, при бесконечном возрастании числа их и уменьшении каждой из них, отношение их соответственно друг к другу, то есть первой к первой, второй ко второй и т. д., остается постоянным, то и самые величины будут находиться в этом же отношении» [ibidem, *с. 59*]. Эта лемма использовалась Ньютоном для нахождения площади криволинейной фигуры путем покоординатного сравнения ее с известной фигурой. Это алгебраизация метода Кавальери, но неделимые у Ньютона, заменены переменными, величина которых стремится к нулю.

Колин Маклорен, «Трактат флюксий», 1742 г.

Шотландский математик Колин Маклорен (1698–1746) был другом Ньютона, по рекомендации которого он стал профессором Эдинбургского университета, заняв в 1726 г. место Джеймса Грегори-младшего[7]. После смерти Ньютона в 1727 г. его концепция анализа подверглась нападкам за недостаточную ясность и обоснованность[8]. Маклорен решил написать обоснование «Трактата флюксий» Ньютона. В 1742 г. вышел его собственный «Трактат флюксий» [7], содержащий систематизированное и понятное изложение метода Ньютона. Сочинение должно было служить учебником для юношества. К. Маклорен стремился показать близость метода Ньютона и античного метода исчерпания. Опытный педагог, К. Маклорен нашел осязаемый образ сходимости, расположив сходящиеся величины, будь то длины, площади или объемы, на прямой: «мы будем представлять круги и многоугольники с помощью прямых линий, таким же образом, как выражаются все величины в пятой книге Начал» [ibid., *с. 5*]. Все величины: объемлемая, искомая и объемлющая, последовательно расположены на отрезке, то есть соотношение их наглядно. Заметим также, что у К. Маклорена впервые появляется термин «аксиома Архимеда».

Благодаря метафоре Маклорена метод сходящихся последовательностей приобрел инвариантную наглядность, которая в следующем веке позволила этому методу подняться на следующую ступень обобщения. Его конструкция еще далека от определения числа, она сформулирована для величин [18].

В XVIII в. сохранялась традиция метода конечных разностных отношений, имевшая начало в работах Б. Тейлора, А. де Муавра, И. Ньютона и продолженная Дж. Стирлингом, Л. Эйлером, Ж.Л. Лагранжем. А.-М. Лежандр в «Элементах геометрии» 1794 г. [19] определял каждую геометрическую величину как число, и обратно, каждому числу ставил в соответствие геометрическую величину. Примечательно также построение Ампера 1806 г. при доказательстве теоремы Лагранжа о среднем значении. Он строил цепочку неравенств, в центре которой находилось оцениваемое отношение (средняя дробь), и, уменьшая шаг, приближался к искомому значению [20]. У Ампера в работе не было ни рисунков, ни геометрических ассоциаций.

Поставленная еще Галилеем проблема оценки ошибок наблюдения развивалась в работах Лагранжа и Лапласа. В 1775/1776 г. Лагранж рассматривал вероятность погрешности в среднем арифметическом при различных законах распределения погрешностей. В 1774 г. П.С. Лаплас, исследуя устойчивость солнечной системы, опубликовал «Мемуар о вероятностях причин по событиям» [21], в котором появился его закон нормального распределения. Создание теории ошибок было продолжено Гауссом. В 1809 г. Гаусс в работе «Теория движения небесных тел, движущихся вокруг Солнца по коническим сечениям» изложил каноническую теорию учета возмущений орбит (§177–182). Анализируя распределение ошибок наблюдений на основе формулы Лапласа, он заключает: «Так как возможные ошибки в

[6] Ньютон сформулировал леммы для «последних отношений» (ultima ratio), но А.Н. Крылов перевел этот термин как «предел».

[7] Джеймс Грегори (1666–1742), профессор математики и племянник известного математика Джеймса Грегори (1738–1675), брат астронома и математика Давида Грегори (1659–1708).

[8] Венцом этой критики был «Аналист» Дж. Беркли 1734 г.

любом случае ограничены определенными пределами, вероятность ошибок за этими пределами всегда должна быть равна нулю, в то время как наша формула всегда дает некоторое значение» [22, *с. 258–260*]. Гаусс обосновал этот результат, минимизируя сумму квадратов ошибок. Таким образом, принцип сходящихся последовательностей обогатился еще одной метафорой из теории ошибок. В западной справочной литературе этот результат Гаусса называют первой формулировкой теоремы о сжатой переменной[9]. Но нужен был еще один шаг, чтобы появилась теорема о сжатой переменной. Для этого было необходимо понятие сходящейся последовательности и непрерывной функции.

1817 год, Бернард Больцано

В 1817 г. Бернард Больцано в работе «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по крайней мере один действительный корень уравнения» [24] (в русском переводе [25]), в §6, 7 ввел критерий сходимости последовательности частичных сумм ряда[10]. Продолжая мысль Архимеда, Б. Больцано показывает, что если разность между частичными суммами (элементами) последовательности может быть сделана сколь угодно малой, то такая последовательность сходится к определенному пределу. Этот же критерий без доказательства повторяет в 1821 г. Коши, с тех пор он стал называться критерием Коши, а последовательности, удовлетворяющие этому критерию, впоследствии стали называться последовательностями Коши-Кантора. Это был первый вклад Б. Больцано в построение концепции действительного числа. Вторым его вкладом, сделанным в этой же работе, было создание понятия точной верхней грани линейной числовой области.

Б. Больцано интуитивно наметил основные направления дальнейшего развития концепции числа: принцип сходящихся последовательностей, принцип вложенных отрезков и понятие supremum. В 1830-е гг. Б. Больцано начал создавать концепцию действительного числа в терминах сечений [26]. Эти рукописи начали публиковаться только с 1930 г.

Гениальность предвидений Б. Больцано была оценена лишь после его смерти благодаря Герману Ганкелю, который публиковал и пропагандировал его немногие опубликованные работы [27]. К трудам Б. Больцано обращались К. Вейерштрасс и Г. Кантор.

1821 и 1823 годы, Огюстен Коши

Математика Франции наполеоновского периода была изгнана из университетов в технические школы и милитаризована. Основное внимание уделялось подготовке военных специалистов и инженеров, для чего были созданы Эколь Политехник и другие инженерные школы. Как сказал Риман, математика Франции была вычислительной, а математика Германии – концептуальной. Курс анализа, который Коши читал в Эколь Политехник, был краток и ориентирован на приложения. Но в этом курсе содержалось систематическое изложение теории пределов, важнейшие теоремы анализа, посвященные непрерывным функциям, дифференцирование, интегрирование и теория рядов. В то же время О. Коши не уделял внимания понятию иррациональных чисел, рассматривая их как пределы последовательностей рациональных чисел без определения операций и упорядочивания. Гениальность Огюстена Коши (1789–1857) заключалась в строгом и ясном обобщении достижений предшественников, на базе которых он создал стройную концепцию математического анализа своего времени, что позволило ему получить новые результаты и сформировать новые разделы математики, например, теорию вычетов.

В Курсе 1821 г., в III прибавлении «О численном решении уравнений» О. Коши

[9] Это та самая теорема, которая в учебном фольклоре называется теоремой о двух милиционерах, карабинерах, жандармах, городовых, о пьянице и двух полицейских, о трех струнах, squeezed theorem, pinched theorem, sandwich theorem. В учебниках математического анализа она выделяется в самостоятельную теорему в XX в. [23].

[10] Заметим, что в русском переводе Кольмана имеются неточности.

рассматривает (без ссылки) теорему, которой была посвящена работа Больцано 1817 г. У О. Коши она сформулирована так: «Пусть $f(x)$ – вещественная функция переменной x, непрерывная в пределах между $x = x_0$, $x = X$. Если величины $f(x_0)$, $f(X)$ имеют разные знаки, то уравнение $f(x) = 0$ имеет решение хотя бы при одном значении х между x_0 и X» [28, *с. 378*]. О. Коши доказывает ее, разделив отрезок на m равных частей и выделяя в нем такой субинтервал, на краях которого функция имеет разные знаки. Продолжая алгоритм, О. Коши получает последовательность стягивающихся интервалов с длинами $\frac{X - x_0}{m^n}$, где последовательность граничных точек слева возрастает, а справа – убывает. Значения функции в граничных точках, имея разные знаки, приближаются к нулю. Так как функция непрерывна, то общий предел последовательностей аргумента является корнем уравнения. Эту теорему доказывал Б. Больцано в 1817 г., используя деление отрезка пополам и с помощью этого построения показывая непротиворечивость существования точной верхней границы. Как и во многих других случаях [29], О. Коши гениально упростил идею его доказательства и фактически формализовал теорему о сжатой переменной. Сейчас теорема о существовании корня непрерывной функции носит имя Больцано-Коши, впервые для многочленов ее сформулировал Мишель Ролль в 1690 г. [30].

В 1875 г. Гастон Дарбу в «Мемуаре о разрывных функциях» [31], строит последовательности интегральных сумм, которые сходятся к интегралу справа и слева.

С 1860-х гг. в математическом анализе происходят большие перемены. Новые потребности математики, связанные с появлением рядов Фурье, разрывных функций, необходимостью классифицировать множество точек разрыва, вызвали к жизни новую реформу анализа второй половины XIX в. Инициатива перешла к немецким математикам во главе с Вейерштрассом. Появляются новые концепции числа, непрерывности, равномерной непрерывности; как следствие теоремы о стягивающихся интервалах появляется лемма о покрытиях. Вейерштрасс развивает понятие непрерывности на языке эпсилон-дельта, вводя новую концепцию числа через понятия верхней грани и равномерной сходимости рядов; в 1869–1872 гг. Ш. Мере создает концепцию числа, основанную на понятии сходящихся последовательностей Коши. В 1872 г. Э. Гейне формулирует концепцию, основанную на фундаментальных (сходящихся) последовательностях Кантора; в 1872 г. Р. Дедекинд выдвигает свою концепцию, основанную на понятии сечения.

В 1872 г. Кантор пишет первую работу по теории множеств [32, 33, *с. 9–17*], в которой вводит понятие предельной точки. В этой работе Кантор определяет свои фундаментальные последовательности: «Когда я говорю о числовой величине в обобщенном смысле, то это происходит прежде всего в том случае, когда предложена бесконечная последовательность рациональных чисел a_1, a_2, …, a_n, …, заданная при помощи некоторого закона и обладающая тем свойством, что разность $a_{n+m} - a_n$ становится бесконечно малой при возрастании n, каково бы ни было целое положительное число m, или, другими словами, что для произвольно выбранного (положительного рационального) ε существует такое целое число n_1, что $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, если $n \geq n_1$ и m – любое положительное целое число». «Упомяну десятую книгу «Начал» Евклида, которая остается образцом для рассмотренного в этих параграфах предмета» [33]. На базе понятия фундаментальной последовательности Кантор строит начала теории множеств.

Появление неевклидовой геометрии привело к необходимости анализа аксиом геометрии, понятия непрерывности и полноты. В работах Дедекинда и Пеано появилась аксиоматическая система арифметики. Системы аксиом арифметики и геометрии требовали обобщения на едином основании. В 1899 г. Гильберт ввел новую систему аксиом, в которую ввел аксиому Архимеда и аксиому полноты:

«*Аксиома измерения или аксиома Архимеда*. Пусть A_1 есть произвольная точка на прямой между произвольно данными точками A и B; строим затем точки A_2, A_3, A_4,… так, что точка A_1 лежит между точками A и A_2, A_2 между A_1 и

A_3, A_3 между A_2 и A_4, и сверх того, отрезки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,… равны между собою: тогда в ряду точек A_2, A_3, A_4,… всегда существует такая точка A_n, что точка B лежит между A и A_n.

Аксиома полноты. Элементы (точки, прямые, плоскости) геометрии образуют систему вещей, которая, при условии сохранения всех указанных выше аксиом, не допускает расширения, то есть к системе точек, прямых, плоскостей невозможно присоединить другую систему так, чтоб в новой расширенной системе были по-прежнему удовлетворены вместе все аксиомы» [34, *с. 20*].

В XIX в. было много попыток построить геометрию без аксиомы Архимеда[11]. Этот вопрос обсуждал Д. Гильберт. Как он писал, «Выполнимость аксиомы полноты существенно обусловливается предварительным установлением аксиомы Архимеда; это значит – аксиома полноты привела бы к противоречию, если бы к аксиомам I–IV не была еще присоединена аксиома Архимеда».

В XX в. исследования Колмогорова показали, что аксиома полноты может быть заменена принципом вложенных отрезков (фундаментальных последовательностей Коши-Кантора) вместе с аксиомой Архимеда. В сороковые годы Колмогоров создал построение действительных чисел как функций натурального числа [37–40].

Уже в конце XIX в. новые концепции числа, непрерывности и теория множеств вошли в курсы теории функций действительной переменной. В XX в. в России такой курс читали С.О. Шатуновский в Одессе, его ученик Г.М. Фихтенгольц в Петербурге, Н.Н. Лузин, П.С. Александров, А.Н. Колмогоров в Москве. Первое издание книги Александрова и А.Н. Колмогорова «Введение в теорию функций действительного переменного» было в 1933 г., но в нем, как и в двух последующих изданиях, еще не содержится аксиоматическое построение.

Как пишет В.М. Тихомиров: «Осенью 1954 г. третьему курсу мехмата, на котором учился автор этих строк, А.Н. Колмогоров начал читать курс «Анализ III». Это был первый синтетический (т.е. вбиравший в себя многие разделы математики) курс в истории мехмата МГУ. Программа курса была разработана А.Н. Колмогоровым в сороковые и пятидесятые годы прошлого века…

А.Н. Колмогоров вводил аксиоматическое определение действительных чисел как совокупности, являющейся полным линейным упорядоченным полем. Определив алгебраические отношения и отношение порядка, перешел к последней аксиоме – аксиоме полноты. А.Н. Колмогоров называл ее аксиомой непрерывности. Он привел ряд аксиом непрерывности и доказал их эквивалентность. Эти аксиомы связаны с именами тех выдающихся математиков XIX века, кому математический анализ обязан своей логической стройностью – Дедекинда, Больцано, Вейерштрасса, Кантора и Коши.

Это аксиома Дедекинда о сечении, аксиома Больцано о существовании точной верхней (нижней) грани, аксиома Вейерштрасса о предельной точке, аксиома о сходящейся подпоследовательности, аксиома о монотонной последовательности, аксиома о вложенных отрезках.

Аксиома Дедекинда была сформулирована им в 1872 г. [41; 42], хотя предвосхищение понятия сечения высказано в работах Больцано в 1830-е гг. [43]. Аксиома Больцано о существовании точной верхней грани была высказана им в 1817 г. [24, 25]; отсутствие теории действительного числа позволило Б. Больцано доказать лишь непротиворечивость предположения о существовании верхней грани. Понятие предельной точки было введено Кантором в 1872 г. [32] и развито в лекциях Вейерштрасса [44, 45]. Понятие сходящейся подпоследовательности впервые изложил Э. Гейне в 1872 г. на основании идеи Кантора и бесед с Вейерштрассом [46; 47].

Как говорил Дедекинд, человечество постепенно совершает восхождение по лестнице смыслов, тщательно расчленяя ряд мыслей, на которых покоятся законы чисел [48, 49,

[11] Дж. Веронезе (1854–1917) в 1890 г. в «Основаниях геометрии» предложил концепцию линейного неархимедова континуума [35], см. также работы О. Штольца [36].

с. 5]. Рассматривая историю метода вложенных отрезков, мы видим восхождение по лестнице смыслов от античности до нашего времени. Метод неделимых существовал для поиска, метод исчерпания для обоснования у Архимеда; понятие последовательности зародилось у Вычислителей Мертон-колледжа, обрело логическую форму у схоластов. Эпоха Возрождения вновь пробудила интерес к неделимым у Кеплера и Кавальери, способствовала синтезу методов и возникновению понятия сходимости у Грегори. Ньютон и Лейбниц создали математику переменных величин – Исчисление. Маклорен впервые выделил роль аксиомы Архимеда. Он же создал метафору, наглядный образ сходящихся друг к другу последовательностей как последовательности вложенных отрезков. Теория ошибок измерения, основанная Галилеем, продолженная в работах Лапласа и завершенная Гауссом, дала другую метафору: распределение погрешностей по нормальному закону. Развитие понятия функции, и прежде всего непрерывной функции в работах Больцано, определило направления развития концепции непрерывности с помощью понятий верхней грани, сходящихся последовательностей и сечения. Математический анализ начала XIX в. имел фундаментом достаточную для своего времени теорию пределов Коши и его теоремы о непрерывных функциях. На его основе во второй половине XIX в. возникают несколько концепций числа и непрерывности: Мере, Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда. Различия этих концепций примирил Гильберт, доказав их эквивалентность, а в XX в. А.Н. Колмогоров построил единую концепцию действительного числа.

Список литературы

1. *Архимед. Сочинения* /Перевод, вступительная статья и комментарии И.Н. Веселовского. Москва: ГИФМЛ. 1962.

2. Синкевич Г.И. Архимед: письма к Досифею и аксиома полноты // *Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы*. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Сборник статей Международной конференции. Москва, 2015. С. 366–370.

3. Зубов В.П. Трактат Николая Орема «О конфигурации качеств» // *Историко-математические исследования*. М.: Наука, 1958. XI. С. 601–635.

4. Буридан Ж. Трактат «О точке» // В.П. Зубов. *Из истории мировой науки. Избранные труды 1921–1963.* СПб: Алетейя, 2006. С. 311–347.

5. Синкевич Г.И. XIV век и ранние представления о континууме // *История и педагогика естествознания*. Москва, 2015. I. С. 7–12.

6. Кавальери Б. (1635). *Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного с приложением «Опыта IV» о применении метода неделимых к алгебраическим степеням*. Том I. Основы учения о неделимых («Геометрия», Кн. I и II и «Опыт IV». Перевод со вступительной статьей и комментариями С.Я. Лурье. М,-Л.: ГИТТЛ. 1940.

7. MacLaurin C. A Treatise of Fluxions in two books by Colin MacLaurin, A.M., Professor of Mathematics in the Univesity of Edinburg and Fellow of the Royal Society. Edinburg: Printed by T.W. and T. Ruddmans. MDCCXLII.

8. Gregory J. 1668a. Vera circuli et hyperbolae quadratura cui accedit geometria pars vniuersalis inseruiens quantitatum curuarum transmutationi & mensurae. Authore Iacobo Gregorio Abredonensi. Padua, 1668, 247 p.

9. Gregorie J. 1668b. The Universal Part of Geometry devoted to the transmutation and measurement of curved quantities. Translated by Andrew Leahy. Электронный ресурс: http://math.knox.edu/aleahy/gregory/WORKING/gpu.html

10. Newton I. 1712. Analysis per aequationes numero terminorum infinitas // Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota. Sent by Dr. Barrow to Mr. Collins in a Letter dated July 31.1669. Edita Londini, 1712. Pp. 3–20.

11. Simpson Th. Essay on several subjects in speculative and mixed mathematics. London, MDCCCXL.

12. A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip. Springer, 1999.

13. Fourier J.B.J. Analyse des équations determinées. Première partie. Paris : Chez Firmin Didot frères, libraries, Rue Jacob 24. 1831.

14. Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // Fundamenta Mathematicae. 1922. 3. Pp. 133–182.

15. Канторович Л.В. *О методе Ньютона* / Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института, Труды МИАН СССР, М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1949. 28. С.104–144.

16. Синкевич Г.И. История метода касательных // *Математика и математическое моделирование: проблемы и перспективы*. Международная научно-практическая конференция. Оренбург, 20–21 мая 2015 г.: сборник научных статей. Оренбург: Издательство ОГПУ, 2015. С.246–250.

17. Ньютон И. (1686). *Математические начала натуральной философии* / Перевод с латинского с примечаниями и пояснениями А.Н. Крылова // Собрание трудов академика А.Н. Крылова. М.-Л.: АН СССР. VII. 1936 г.

18. Синкевич Г.И. Колин Маклорен (1698–1746) и метод сходящихся последовательностей в его «Трактате о флюксиях» 1742 года // *Труды международной научной*

конференции. Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство. Publications international scientific conference. Education, science and economics at universities and schools. Integration to international educational area. Армения, Горис, 2015. С. 434–440.

19. Legendre A.M. Les Éléments de géométrie. Par A.M. Legender, Avec Additions Et Modifications. Paris : Published Blanchet.1823.

20. Ampère, A. Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrete cette série à un terme quelconque/Mémoir par M. Ampère, Répétiteur à l'Ecole Politechnique // Journal de l'Ecole Politechnique. 1806. Cahier 13. Pp. 148–181.

21. Laplace P. Mémoire sur la probabilité des Causes par les Événements // Mémoires l'Academie Royale des Sciences. Paris, 1774. (6). Pp. 621–656.

22. Gauss C.F. (1809). Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections. With an appendix. Translated in English by C.H. Davis. Boston. 1857. 268 p. India: Pranava Books. Reprint 2013.

23. Синкевич Г.И. История теоремы о пределе сжатой переменной // *Наука и техника: Вопросы истории и теории.* Материалы XXXVI международной годичной конференции Санкт-Петербургского отделения Российского национального комитета по истории и философии науки и техники РАН (21–24 апреля 2015 г.). Выпуск XXXI. СПб: Санкт-Петербургский филиал ИИЕТ РАН. 2015. С. 191, 192.

24. Bolzano B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag: Gottlieb Haase. 1817.

25. Больцано Б. Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения // *В книге Кольман Э. Бернард Больцано*. М. 1955. С. 170–204.

26. Рыхлик К. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Больцано // *Историко-математические исследования*. 1958. XI. С. 515–532.

27. Синкевич Г.И. Распространение и влияние идей Больцано на развитие анализа XIX века // *Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы*. Проблемы математического и естественнонаучного образования. Тезисы и тексты докладов Международной конференции 15–18 декабря 2014 года. Москва: РУДН. 2014. С. 436–438.

28. Cauchy, A.-L. Course d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique // Oeuvres. Ser. 2, t. 3.

29. Синкевич Г.И. К истории эпсилонтики // *Математика в высшем образовании*. 2012. № 10. С. 149–166.

30. Синкевич Г.И. От метода каскадов к изучению свойств непрерывных функций: историческая хроника // *Вопросы истории естествознания и техники.* 2015. 36. № 4. С. 642–664.

31. Darboux G. Mémoire sur les fonctions discontinues //Annales de l'École Normale. 1875. 2-e Série. Tome IV. Pp. 57–112.

32. Cantor G. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen // Math. Ann. 1872. Bd.5. Pp. 123–132.

33. Кантор Г. *Труды по теории множеств* / Перевод Ф.А. Медведева и П.С. Юшкевича. М.: Наука, 1985.

34. Гильберт Д. *Основания геометрии. (1899 г.)* / Перевод А.В. Васильева. СПб. 1923.

35. Veronese G. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padova: Tipografia del Seminario, 1891.

36. Stolz O. 1881. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. 1881. Bd. 18. Pp. 255–279.

37. Колмогоров А.Н. *К обоснованию теории вещественных чисел* / УМН 1946 г. № 1. С. 217–219.

38. Тихомиров В.М. Аксиоматический метод и теория действительных чисел в лекциях А.Н. Колмогорова // *Математика в высшем образовании*. 2014 г. № 12. С. 149–154.

39. Гладкий А.В., Козиоров Ю.Н. Действительные числа как последовательности обыкновенных дробей (Теория действительных чисел по Колмогорову) // *Математика в высшем образовании*. 2009. 7. С. 21–38.

40. Русаков А.А., Чубариков В.Н. О двух подходах к обоснованию вещественных чисел // *Математика в высшем образовании*. 2006. № 4. С. 37–44.

41. Dedekind R. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig, Vieweg. 1872.

42. Дедекинд Р. (1872). *Непрерывность и иррациональные числа* / Пер. с нем. С.О. Шатуновского. Одесса, 1923. 4-е изд.

43. Bernard Bolzano's Schriften. Band 2. Zahlentheorie. Praha: Královská česká společnost nauk v Praze, 1931.

44. Weierstrass K. 1989. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner-Archiv für mathematic. Band 9, 272 p. Reprint 1989.

45. Синкевич Г.И. Формирование топологических понятий в лекциях Вейерштрасса 1886 года // *Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов*. Выпуск 19. Под редакцией проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. СПб. 2013. С. 4–23.

46. Heine E. 1872. Die Elemente der Functionenlehre // J. reine angew. Math. 1872. 74. Pp. 172–188.

47. Гейне Э.Г. Лекции по теории функций / Перевод и примечания Г.И. Синкевич // *Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов*. Выпуск

18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. СПб. 2012. С. 26–46.

48. Dedekind R. Was sind und was sollen die Zahlen? 1 Auflage, Vieweg, Braunschweig 1888.

49. Дедекинд Р. *Что такое числа и для чего они служат?* / Общая редакция и предисловие Г.И. Синкевич. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2015.

References

1. Archimedes. Sochineniya / Perevod, vstupitel'naya stat'ya i kommentarii I.N. Veselovskogo [*Archimedes. Works.* Translation, introduction and comments I.N. Veselovsky]. Moscow: GIFML. 1962 (Archimedes. Works).

2. Sinkevich G.I. Archimedes: pis'ma k Dositheus i aksioma polnoty [Archimedes: letters to Dositheus and completeness axiom]. *Beskonechnomernyy analiz, stokhastika, matematicheskoe modelirovanie: novye zadachi i metody.* Problemy matematicheskogo i estestvennonauchnogo obrazovaniya. Sbornik statey Mezhdunarodnoy konferentsii [Infinite-dimensional analysis, stochastics, mathematical modeling, new tasks and methods. Problems of Mathematics and Science Education. Collection of articles of the International Conference]. Moscow, 2015. Pp. 366–370. (Archimedes: Letters to Dositheus and completeness axiom).

3. Zubov V.P. Traktat Nicole Oresme «O konfiguratsii kachestv» [Nicholas Orem treatise «On the qualities of configuration»]. *Istoriko-matematicheskie issledovaniya* [Historical and mathematical studies]. M.: Science. 1958. XI. Pp. 601–635. (Nicole Oresme's treatise «De configuratione qualitatum»).

4. Buridan J. Traktat «O tochke» [The treatise «On the spot»]. V.P. Zubov. *Iz istorii mirovoy nauki. Izbrannye trudy 1921–1963* [V.P. Zubov. From the history of world science. Selected Works 1921–1963]. SPb: Aleteyya. 2006. Pp. 311–347. (J. Buridan. Quaestio de punkto).

5. Sinkevich G.I. XIV vek i rannie predstavleniya o kontinuume [XIX century and early ideas about the continuum]. I*storiya i pedagogika estestvoznaniya* [History and Natural Science Pedagogy]. Moscow, 2015. I. Pp. 7–12.

6. Cavalieri B. (1635) *Geometriya, izlozhennaya novym sposobom pri pomoshchi nedelimykh nepreryvnogo s prilozheniem «Opyta IV» o primenenii metoda nedelimykh k algebraicheskim stepenyam.* Tom I. Osnovy ucheniya o nedelimykh («Geometriya», Kn. I i II i «Opyt IV». Perevod so vstupitel'noy stat'yey i kommentariyami S.Ya. Lur'ye [Geometry set out in a new way using continuous indivisible with the application «Experience IV» on the application of the method of indivisibles to algebraic powers. Volume I. Fundamentals of indivisible («Geometry», Bk. I and II, and «Experience IV». Translated with an introductory article and comments S.Y. Lurie]. M,-L.: GITTL. 1940. (Cavalieri B. Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota).

7. MacLaurin C. A Treatise of Fluxions in two books by Colin MacLaurin, A.M., Professor of Mathematics in the Univesity of Edinburg and Fellow of the Royal Society. Edinburg: Printed by T.W. and T. Ruddmans. MDCCXLII.

8. Gregory J. 1668a. Vera circuli et hyperbolae quadratura cui accedit geometria pars vniuersalis inseruiens quantitatum curuarum transmutationi & mensurae. Authore Iacobo Gregorio Abredonensi. Padua, 1668, 247 p.

9. Gregorie J. 1668b. The Universal Part of Geometry devoted to the transmutation and measurement of curved quantities. Translated by Andrew Leahy. Электронный ресурс: http://math.knox.edu/aleahy/gregory/WORKING/gpu.html

10. Newton I. 1712. Analysis per aequationes numero terminorum infinitas. Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota. Sent by Dr. Barrow to Mr. Collins in a Letter dated July 31.1669. Edita Londini, 1712. Pp. 3–20.

11. Simpson Th. Essay on several subjects in speculative and mixed mathematics. London, MDCCCXL.

12. A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip. Springer, 1999.

13. Fourier J.B.J. Analyse des équations determinées. Première partie. Paris : Chez Firmin Didot frères, libraries, Rue Jacob 24. 1831.

14. Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Mathematicae. 1922. 3. Pp. 133–182.

15. Kantorovich L.V. *O metode Newton'a*. Sbornik rabot po priblizhennomu analizu Leningradskogo otdeleniya instituta, Trudy MIAN SSSR [On the method of Newton. Collection of works on the approximate analysis of the Leningrad Branch of the Institute, Trudy]. M.–L.: Izd-vo AN SSSR, 1949. 28. Pp. 104–144. (On Newton's method).

16. Sinkevich G.I. Istoriya metoda kasatel'nykh [History tangent method]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie: problemy i perspektivy*. Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya. Orenburg, 20–21 maya 2015 g.: sbornik nauchnykh statey [Mathematics and mathematical modeling: problems and prospects. International scientific-practical conference. Orenburg, May 20–21, 2015.: collection of scientific articles]. Orenburg: Izdatel'stvo OGPU, 2015. Pp. 246–250. (On the history of tangent method).

17. Newton I. (1686). *Matematicheskie nachala natural'noy filosofii* / Perevod s latinskogo s primechaniyami i poyasneniyami A.N. Krylova [Mathematical Principles of Natural Philosophy. Translated from the Latin with notes and explanations A.N. Krylov]. Sobranie trudov akademika A.N. Krylova [Collected Works of Academician A.N. Krylov]. M.-L.: AN SSSR. VII. 1936. (Newton. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica).

18. Sinkevich G.I. *Colin Maclaurin (1698–1746) i metod skhodyashchikhsya posledovatel'nostey v ego «Traktate o flyuksiyakh» 1742 goda* [Colin Maclaurin (1698–1746) and the method of convergent sequences in his «Treatise on fluxions» 1742]. (C. Maclaurin and a method of convergent sequence in his «Treatise of Fluxions»). Armenia, Goris, 2015. Pp. 434–440.

19. Legendre A.M. Les Éléments de géométrie. Par A.M. Legender, Avec Additions Et Modifications. Paris : Published Blanchet.1823.

20. Ampère, A. Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrete cette série à un terme quelconque. Mémoir par M. Ampère, Répétiteur à l'Ecole Politechnique. Journal de l'Ecole Politechnique. 1806. Cahier 13. Pp. 148–181.

21. Laplace P. Mémoire sur la probabilité des Causes par les Événements. Mémoires l'Academie Royale des Sciences. Paris, 1774. (6). Pp. 621–656.

22. Gauss C.F. (1809). Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections. With an appendix. Translated in English by C.H. Davis. Boston. 1857. 268 p. India: Pranava Books. Reprint 2013.

23. Sinkevich G.I. Istoriya teoremy o predele szhatoy peremennoy [The history of compressed variable limit theorem]. *Nauka i tekhnika: Voprosy istorii i teorii*. Materialy XXXVI mezhdunarodnoy godichnoy konferentsii Sankt-Peterburgskogo otdeleniya Rossiyskogo natsional'nogo komiteta po istorii i filosofii nauki i tekhniki RAN (21–24 aprelya 2015 g.) [Science and Technology: Issues of History and Theory. Materials of XXXVI International annual conference of the St. Petersburg branch of the Russian National Committee for the History and Philosophy of Science and Technology, RAS (April 21–24, 2015)]. Vypusk XXXI. 2015. (On the history of squeezed theorem).

24. Bolzano B. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag: Gottlieb Haase. 1817.

25. Bol'tsano B. Chisto analiticheskoe dokazatel'stvo teoremy, chto mezhdu lyubymi dvumya znacheniyami, dayushchimi rezul'taty protivopolozhnogo znaka, lezhit po men'shey mere odin deystvitel'nyy koren' uravneniya [Purely analytic proof of the theorem that any two values, which give results of opposite sign, is at least one real root of the equation]. *V kn. Kol'man E. Bernard Bol'tsano* [In the book, Coleman E. Bernard Bolzano]. M. 1955. Pp. 170–204.

26. Rychlik K. Teoriya veshchestvennykh chisel v rukopisnom nasledii Bol'tsano [The theory of the real numbers in the manuscript heritage of Bolzano]. *Istoriko-matematicheskie issledovaniya* [Historical and mathematical studies]. 1958. XI. Pp. 515–532. (A theory of real numbers in Bolzano's manuscripts).

27. Sinkevich G.I. Rasprostranenie i vliyanie idey Bol'tsano na razvitie analiza XIX veka [The spread and influence of the ideas of Bolzano to the XIX century, the development of analysis]. *Beskonechnomernyy analiz, stokhastika, matematicheskoe modelirovanie: novye zadachi i metody*. Problemy matematicheskogo i estestvennonauchnogo obrazovaniya. Tezisy i teksty dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii 15–18 dekabrya 2014 goda [Infinite-dimensional analysis, stochastics, mathematical modeling, new tasks and methods. Problems of Mathematics and Science Education. Abstracts and texts of the International Conference 15–18 December 2014]. Moskva: RUDN. 2014. Pp. 436–438. (The dissemination and influence of Bolzano's ideas on the development of analysis of the XIX century).

28. Cauchy, A.-L. Course d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique (1821). Analyse Algébrique. Oeuvres. Ser. 2, t. 3.

29. Sinkevich G.I. K istorii epsilontiki [On the history of the epsilon Wiki]. *Matematika v vysshem obrazovanii* [Mathematics in Higher Education]. 2012. № 10. Pp. 149–166. (On the history of epsilontics).

30. Sinkevich G.I. Ot metoda kaskadov k izucheniyu svoystv nepreryvnykh funktsiy: istoricheskaya khronika [From the method of stages to the study of the properties of continuous functions: historical chronicle]. *Voprosy istorii estestvoznaniya i tekhniki* [Questions of History of Science and Technology]. 2015. 36. № 4. Pp. 642–664. (From cascade method to a study of properties of continuous functions).

31. Darboux G. Mémoire sur les fonctions discontinues //Annales de l'École Normale. 1875. 2-e Série. Tome IV. Pp. 57–112.

32. Cantor G. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann. 1872. Bd.5. Pp. 123–132.

33. Cantor G. *Trudy po teorii mnozhestv* / Perevod F.A. Medvedeva i P.S. Yushkevicha [Works on the theory of sets. F.A. Translation Medvedev and P.S. Yushkevich]. M.: Science, 1985.

34. Hilbert D. *Osnovaniya geometrii. (1899 g.)* / Perevod A.V. Vasil'yeva [Foundations of Geometry. (1899). Translation A. Vasilyeva]. SPb. 1923.

35. Veronese G. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padova: Tipografia del Seminario, 1891.

36. Stolz O. 1881. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. 1881. Bd. 18. Pp. 255–279.

37. Kolmogorov A.N. *K obosnovaniyu teorii veshchestvennykh chisel* [Substantiation of the theory of real numbers]. UMN 1946. № 1. Pp. 217–219.

38. Tikhomirov V.M. Aksiomaticheskiy metod i teoriya deystvitel'nykh chisel v lektsiyakh A.N. Kolmogorova [Axiomatic method and the theory of real numbers in the lectures A.N. Kolmogorov]. *Matematika v vysshem obrazovanii* [Mathematics in Higher Education]. 2014. № 12. Pp. 149–154.

39. Gladkiy A.V., Koziorov Yu.N. Deystvitel'nye chisla kak posledovatel'nosti obyknovennykh drobey (Teoriya deystvitel'nykh chisel po Kolmogorovu) [Actual numbers as a sequence of fractions (Theory of real numbers Kolmogorov)]. *Matematika v vysshem obrazovanii* [Mathematics in Higher Education]. 2009. 7. Pp. 21–38.

40. Rusakov A.A., Chubarikov V.N. O dvukh podkhodakh k obosnovaniyu veshchestvennykh chisel [Two approaches to the justification of real numbers]. *Matematika v vysshem obrazovanii* [Mathematics in Higher Education]. 2006. № 4. Pp. 37–44.

41. Dedekind R. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig, Vieweg. 1872.

42. Dedekind R. (1872) *1923. Nepreryvnost' i irratsional'nye chisla* / Per. s nem. S.O. Shatunovskogo [Continuity and irrational numbers. Trans. with it. S.O. Shatunovskij]. Odessa, 1923. 4-e izd.

43. Bernard Bolzano's Schriften. Band 2. Zahlentheorie. Praha: Královská česká společnost nauk v Praze, 1931.

44. Weierstrass K. 1989. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner-Archiv für mathematic. Band 9, 272 p. Reprint 1989.

45. Sinkevich G.I. Formirovanie topologicheskikh ponyatiy v lektsiyakh Veyershtrassa 1886 goda [Formation biological concepts in the lectures of Weierstrass 1886]. *Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm: mezhvuzovskiy tematicheskiy sbornik trudov.* Vypusk 19. Pod redaktsiey prof. B.G. Vagera [Mathematical modeling, numerical methods and complexes of programs: Interuniversity thematic collection of works. Issue 19 Edited by prof. B.G. Wager]. SPbGASU. SPb. 2013. Pp. 4–23.

46. Heine E. 1872. Die Elemente der Functionenlehre // J. reine angew. Math. 1872. 74. Pp. 172–188.

47. Heine E.H. *Lektsii po teorii funktsiy* / Perevod i primechaniya G.I. Sinkevich [Lectures on the theory of functions. Translation and Notes G.I. Sienkiewicz]. Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm: mezhvuzovskiy tematicheskiy sbornik trudov [Mathematical modeling, numerical methods and complexes of programs: Interuniversity thematic collection of works]. Vypusk 18. Pod redaktsiey d-ra fiz.- mat. nauk, prof. B.G. Vagera. SPbGASU. SPb. 2012. Pp. 26–46.

48. Dedekind R. Was sind und was sollen die Zahlen? 1 Auflage, Vieweg, Braunschweig 1888.

49. Dedekind R. *Chto takoe chisla i dlya chego oni sluzhat?* [What is the number and what they are?]. Obshchaya redaktsiya i predislovie G.I. Sinkevich [General revision and introduction G.I. Sienkiewicz]. Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika». 2015. (Dedekind. Was sind und was sollen die Zahlen?) ISBN 978-5-4344-0307-8.

Информация об авторе

Синкевич Галина Ивановна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики
Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет
190005, С.-Петербург, Российская Федерация, 2-я Красноармейская, 4
E-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Information about author

Sinkevich Galina Ivanovna, Cand. of Phys.-Math. Sciences, Associated Professor Department of Mathematics
Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
190005, St.-Petersburg, Russian Federation, 2-th Krasnoarmeyskaya, 4
E-mail: galina.sinkevich@gmail.com