УДК 51 (092)

200-летие Карла Вейерштрасса

Г.И. Синкевич

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес galina.sinkevich@gmail.com

Опубликовано: Синкевич Г.И. 200-летие Карла Вейерштрасса // Математика в высшем образовании. 2015. - №13. – С. 143-165.

Научная биография Карла Вейерштрасса, его основные работы, влияние его учения на развитие математики. Karl Weierstrass bicentenary, scientific biography, major works, the significance of his teachings for mathematics.

Ключевые слова: Карл Вейерштрасс, научная биография.

Key words: Karl Weierstrass, scientific biography.

В 2015 году математический мир отмечает 200-летний юбилей великого немецкого математика Карла Вейерштрасса (1815–1897), одного из создателей современного математического анализа.

Детство и юность. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс родился 31 октября 1815 года в Остенфельде (Вестфалия) в католической семье секретаря бургомистра, Вильгельма Вейерштрасса, и Теодоры, урождённой Вондерфорст. Карл был старшим ребёнком. Ему было 12 лет, когда умерла его мать. Служба отца была связана с налоговым управлением, и семья часто переезжала. Отец был интеллигентным человеком, детей учили французскому и английскому. Карл начал посещать школу в Мюнстере, а в 14 лет поступил в католическую Теодорианскую гимназию в Падеборне. В гимназии он получил хорошую не только общую, но и математическую подготовку: стереометрия, тригонометрия, неопределённый анализ, разложение в ряды. Школьное образование было основательным, недаром после Франко-прусской войны Отто фон Бисмарк сказал, что победу одержал школьный учитель. В гимназии была научная библиотека. Известно, что Вейерштрасс просматривал там математические журналы, главным образом, журнал Крелле (Journal für die reine und angewandte Mathematik). Каждый номер журнала состоял из четырёх тетрадей, в некоторые годы выходило два номера. Благодаря такой периодичности авторы могли обсуждать общие темы, возникал диалог и атмосфера сотрудничества. За годы обучения Вейерштрасса в гимназии (до 1834 года) вышло 12 номеров журнала, в которых были опубликованы 30 статей Н. Абеля и его переписка с А. Лежандром; 34 статьи К. Якоби; 13 статей Х. Гудермана, будущего учителя Вейерштрасса. В основном они были посвящены теории эллиптических функций, что на всю жизнь определило научный интерес Вейерштрасса: как впоследствии признавался он сам, он был сильно увлечён эллиптическими функциями и процессом творения в работах Абеля, Якоби и Гудермана.

Помимо этих авторов, журнал Крелле в те годы опубликовал статьи К. Гаусса, П. Лежёна-Дирихле, Ж. Лиувилля, А. Лежандра, Э. Куммера, Й. Раабе, что послужило формированию немецкой национальной математической школы.

Университет Бонна. Материальное положение семьи было очень скромным, Карлу даже приходилось подрабатывать, помогая вести бухгалтерию торговке маслом и ветчиной. Он окончил школу в 19 лет с определением primus omnium – первый из всех. Отец возлагал на сына большие надежды, избрав для него карьеру чиновника, и Карл отправился в университет Бонна учиться камеральным, то есть правовым, административным и экономическим наукам, необходимым для государственной службы, хотя склонности к административной деятельности он не имел. Пребывание в университете Бонна захватило Карла только студенческими пирушками, дуэлями и прочими проказами. Карл был искусным фехтовальщиком и всю жизнь гордился, что ни разу не был ранен на дуэли. В студенческой корпорации (землячестве) Саксония он получил особый чин Fuchsmajor (старший новичок). Он прослушал курс геометрии Ю. Плюккера и тепло вспоминал предшествующего ему преподавателя, профессора К.Д. фон Мюнхова (1778–1836), математика, астронома и физика. Иоганн Гёте, друг фон Мюнхова, писал: «В прошлом году г. проф. фон Мюнхов не только преподавал нашим дорогим княжнам[1] математику в Йене, но также подготовлял их здесь к урокам профессора Вейнхардта, наблюдал и помогал, наезжая время от времени; к тому же он влиял на нравственность, умонастроение и поведение, привлекал и удерживал внимание, не говоря о прочих его заслугах перед дорогими воспитанницами» [1, с. 841]. Фон Мюнхов, помимо знания математики и педагогического таланта, обладал высокими человеческими качествами, добротой и искусством общения, его тепло вспоминал Вейерштрасс.

Карл проучился в университете всего 3 семестра, но остался в Бонне ещё на 2 года. Фон Мюнхов ободрял Вейерштрасса в его намерениях заниматься математикой. Как писал сам Вейерштрасс 29 февраля 1840 г., «заветное желание ближе ознакомиться с этими моими любимыми предметами влекло меня всегда к ним, и чем больше я ими занимался, тем ревностнее становилось моё стремление пытаться посвятить мои силы их изучению, причём мне выпало счастье увидеть в покойном профессоре фон Мюнхове в Бонне благожелательного советчика и руководителя. Всё более растущее убеждение в том, что выбор моей будущей профессии был ошибкой, так как я чувствовал, что у меня нет склонности и способностей стать дельным камералистом или юристом, наконец, привело меня к решению посвятить себя целиком изучению того, что совпадает с моими склонностями и от чего я питаю надежду ожидать успеха» [2, с. 27–28]. Вейерштрасс самостоятельно изучал «Небесную механику» Лапласа и работу Якоби «Новые основания эллиптических функций», в которой ставится проблема обращения абелевых интегралов и их систем. У Карла были конспекты лекций Гудермана по теории модулярных функций, данные ему одним из студентов. Эти конспекты помогли Карлу в изучении названных выше работ. [2, с. 24].

Эллиптические интегралы возникли в задачах геометрии и механики ещё на заре дифференциального исчисления, у Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница. Их пытались свести к более простым. Леонард Эйлер нашёл, что они, подобно дугам и логарифмам, выдерживают сложение и умножение. Их исследовали Жозеф Луи Лагранж, Андриен Мари Лежандр, Абель и Якоби. Вейерштрасс поставил себе задачу продолжить эти исследования. Много лет спустя он писал: «Когда я в студенческие времена узнал о письме Абеля к Лежандру, опубликованном в журнале Крелле, это имело для меня величайшее значение. Первой математической задачей, которую я поставил перед собой, был непосредственный вывод формы представления функции, обозначенной Абелем $\lambda(x)$, из дифференциального уравнения, определяющего эту функцию; и удачное решение этой задачи определило моё намерений целиком посвятить себя математике; это случилось во время моего седьмого (зимнего 1837/38) семестра» [3].

---

[1] Веймарским княжнам Марии и Августе, внучкам Павла I.

Речь идёт о письме, где Абель пишет о функции $y=\lambda(x)$, такой, что $x=\int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}$, и которая может быть представлена как частное двух всюду сходящихся бесконечных рядов, называемых сейчас тета-рядами: $y=\frac{x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+...}{1+b_2x^2+b_4x^4+b_6x^6+...}$. В письме Абеля не было доказательства, и Вейерштрасс выполнил его самостоятельно. Вейерштрасс вычислил коэффициенты рядов и применил этот же метод к другим эллиптическим функциям.

Противоречия между желанием заниматься математикой и требованиями отца и привели к глубокому внутреннему конфликту. За 4 года Вейерштрасс не сдал ни одного экзамена и вернулся домой. Он похудел и ужасно выглядел. Его брат Петер рассказывал Магнусу Гёста Миттаг-Леффлеру: «Как плохо выглядел Карл, когда вернулся домой! Какая глубокая боль была видеть моего старшего брата в таком состоянии! Четыре года и никакого экзамена!» [3].

Мюнстер. В октябре 1838 года Вейерштрасс по совету одного из друзей семьи отправился в Мюнстерскую академию, где была надежда быстро пройти курс и получить статус школьного учителя. В академии преподавал Христоф Гудерман – второй после Якоби лектор в Германии, читавший эллиптические функции. Вейерштрасс прослушал только его курсы: аналитической геометрии, исчисление бесконечно малых, о модулярных функциях и об аналитической сферике, причём два последних курса Гудерман читал только ему одному. Это продолжалось один семестр, и уже осенью 1839 года Вейерштрасс по специальному разрешению из Берлина начал готовиться к государственным экзаменам. Весной 1840 года Вейерштрасс получил три задания: написать философскую работу на латинском языке, математическую работу, состоящую из решения предложенных задач, и педагогическое сочинение. Гудерманом были поставлены три математические задачи. Первая, основная, «О развитии модулярных функций», соответствовала желанию Вейерштрасса и имела примечание, что она вообще трудна для молодого аналитика и поставлена с согласия комиссии только по настоятельному его ходатайству. Вторая задача была из элементарной геометрии, третья из теоретической механики. В этой работе Вейерштрасс, опираясь на некоторые результаты Абеля и Якоби, получил свойства функций Абеля, различные их разложения и представления Якоби.

Вот отзыв Гудермана о решениях задач его учеником: «1° В этой работе автор не только оправдал ожидания комиссии, но, исходя из системы до сих пор неизвестных дифференциальных уравнений, которые не замедлят возбудить в высокой степени интерес аналитиков и которые он выводит прямым путём, последовательно и частично одно за другим, он пролагает новый путь в теории модулярных функций и на нём, как это и можно было бы ожидать, приходит не только к известным представлениям этих величин, но также к совершенно новым результатам. *Тем самым кандидат входит достойным образом в ряд увенчанных славой исследователей*[2].

Если подумать, что он при слушании в Мюнстере первой лекции по модулярным функциям с ними почти не был знаком, то ещё большее изумление вызывают его исключительные успехи в этой сравнительно новой области анализа. Это объясняется не

---

[2] Эта фраза не вошла в окончательную редакцию отзыва.

только направленным к науке трудолюбием кандидата, но и в особенности наличием исключительного таланта, который, если не будет распылён, без сомнения в будущем будет успешно содействовать науке. 2º Вполне удовлетворительно. 3º Также и эта работа удовлетворительна.

При таких исключительных успехах кандидата для выяснения объёма и основательности его математических познаний не требуется больше никакого устного испытания, если он покажет, что в состоянии дать урок по элементам математики по хорошо продуманной методике. Однако для него самого и для науки совершенно нежелательно, чтобы он стал учителем гимназии, но нужно, чтобы ему были созданы условия для того, чтобы он мог действовать в качестве академического доцента. Гудерман» [2, с. 29].

Как впоследствии (в письме Шварцу в 1888 г.) писал Вейерштрасс, если бы ему стал известен отзыв Гудермана, он смог бы почувствовать ценность своей работы и своего творчества и активнее боролся бы за место в высшей школе. Его работа вполне могла бы стать докторской диссертацией, но в те годы Академия Мюнстера не имела доктората [4]. Эта работа была опубликована лишь 54 года спустя в собрании сочинений Вейерштрасса.

Остальные его экзаменационные работы были оценены вполне удовлетворительно, на пробных уроках он показал достаточный для преподавания в младших классах уровень латыни, греческого и немецкого, но полностью провалил уроки по естественным наукам (экспериментальной физике, химии, минералогии, ботанике и зоологии). Такой кандидат не мог стать школьным учителем. По этому поводу возникла переписка с министерством. В результате ему было разрешено преподавать математику и математическую физику в старших классах, а латынь, греческий и немецкий только в младших классах. Недостаточность других знаний была записана в дипломе. В течение года (1841–42) он стажировался (рефендариат) в гимназии Paulinum в Мюнстере.

В Мюнстере он написал ещё три работы по теории функций комплексной переменной. В одной из них аналитические функции одной переменной определяются с помощью алгебраических дифференциальных уравнений. Теорема существования в том же 1842 году была доказана Коши, но Вейерштрасс тогда этого не знал. Его работа содержит также и другие результаты, которых нет у Коши. В этой работе содержится понятие равномерной сходимости и аналитического продолжения. Именно Вейерштрасс ввёл определение аналитической функции как равномерно и безусловно сходящегося ряда[3] (Лагранж вообще не писал о сходимости, а Огюстен Луи Коши и Абель писали только о безусловной сходимости). Вейерштрасс не формулирует понятие равномерной сходимости, для него оно просто вытекает из леммы Абеля. Вейерштрасс впервые говорит об *аналитическом продолжении функций*, причём указывает возможность существования таких особенных точек, при приближении к которым радиус сходимости уменьшается до нуля. В третьей работе Вейерштрасс получает разложение функции в сходящийся ряд по отрицательным и положительным степеням за два года до Пьера Альфонса Лорана (1813–1854). Работа Лорана не была опубликована, она была послана им на конкурс Парижской академии с опозданием и известна только по пересказу Коши 1843 года [6], где Коши напоминает свою теорему из «Конспекта лекций по дифференциальному

---

[3] Первые представления о равномерной сходимости возникли независимо в 1847 году в работах Дж. Стокса и Ф. Зайделя. Правда, у них речь шла о сколь угодно медленной сходимости, само понятие сформировалось к 1870-м годам в работах Гейне (1869) и других математиков [5].

исчислению» 1823 года: «Пусть x обозначает действительную или мнимую переменную; действительная или мнимая функция от x может быть разложена в сходящийся ряд по возрастающим степеням этой переменной, если модуль переменной сохраняет значение, не превышающее наименьшей из величин, для которых функция или её производная перестаёт быть конечной или непрерывной». Далее Коши говорит, что Лоран обобщил эту его теорему так: «Пусть x обозначает действительную или мнимую переменную; действительная или мнимая функция x может быть представлена в виде суммы двух сходящихся рядов, одного по целым возрастающим степеням x, и другого, по целым нисходящим степеням x; пока модуль x принимает в интервале значения, для которых функция либо её производная остаётся конечной и непрерывной». В этой статье Коши придаёт теореме Лорана статус незначительного следствия из своей теоремы, хотя использовал это разложение в дальнейшем. Согласно [9, с. 349], Вейерштрасс в дальнейшем обходился без этого разложения.

Эти три работы Вейерштрасса тоже впервые опубликованы только в его собрании сочинений.

Дейч-Крона. В 1842 году Вейерштрасс получил назначение ассистентом учителя в прогимназию (младшую гимназию) в маленький город Дейч-Крона (теперь Валч, Польша). Нагрузка достигала 30 часов в неделю. Он должен был преподавать математику, физику, немецкий, ботанику, историю, географию, гимнастику и чистописание. Именно на уроках чистописания появилось начертание буквы *p* – функции Вейерштрасса – в виде $\wp$. Уроки гимнастики были новшеством, и учителя сами проходили обучение. Вейерштрасс для этого ездил в 1844 году в Берлин, где познакомился с геометром Я. Штейнером и с А.Л. Крелле (1780–1855), математиком, архитектором, основателем и редактором «Журнала чистой и прикладной математики» (1826). Август Крелле был самоучкой, его заслугой было то, что, создав журнал, он объединил немецких математиков. Он угадывал талантливых авторов и публиковал их. Именно он распознал талант Абеля и привлёк его в качестве сотрудника в свой журнал, напечатал большинство работ Абеля в своём журнале, и заботился о его судьбе. Но неуверенность Вейерштрасса в ценности своих работ помешала ему показать их Крелле.

Условия жизни в Дейч-Кроне были тягостными, – в городе не было библиотеки, маленькое жалование (348 талеров в год) не позволяло даже купить марки для отправки рукописей в журналы. Вейерштрасс опубликовал две своих первых работы в ежегодном сборнике-отчёте прогимназии Дейч-Кроне: «Замечания об аналитических факультетах (факториалах)» и «Приведение некоторого определённого трёхкратного интеграла». Первая из работ связана с исследованиями Крелле, в работе которого имелись противоречия, он позже предложил Вейерштрассу проанализировать их в другой статье, которая была напечатана в 1856 г. в журнале Крелле.

В годовом отчёте 1844/45 прогимназии Дейч-Крона была опубликована ещё одна статья Вейерштрасса, «О сократовом методе учения и его применимости в школьном обучении», которая представляет собой его выпускную работу в Мюнстере. Метод Сократа назывался «маевтикой» – родовспоможением. Задавая наводящие вопросы, учитель подводил ученика к самостоятельному умозаключению. Этому методу противопоставляется другой греческий метод – акроама, приятное чтение вслух, который чаще используется для лекций в большой аудитории. Сократ начинал свои занятия с одним учеником и доводил его до определённой высоты состояния духа. Вейерштрасс пишет «Общий метод для школы Сократ не мог установить. Но было бы прекрасно, если бы его дух, из которого проистекало его влияние, всюду составлял душу воспитания и образования – его высокое стремление к истине, красоте и добру и любовь его чистого права» [2, с. 50]. Вейерштрасс в своих лекциях предпочитал метод майевтики – вовлечение слушателей в научный поиск, требовал мыслительных усилий, порицал французский метод чтения лекций как завершённого текста. Этот метод принёс свои плоды позже, в Берлине, а напечатанные работы остались незамеченными, так как этот сборник не попадал в поле зрения специалистов.

В 1875 году Вейерштрасс вспоминал годы преподавания в гимназии как 14 лет ссылки в страну велатов и оботритов (славянские племена, жившие на территории Померании и Мекленбурга) [4, с. 11]. Долгое время он совсем не имел научных контактов.

В период пребывания в Дейч-Кроне произошёл эпизод с неудачной помолвкой, где Вейерштрасс играл роль обманутого жениха, о чём впоследствии рассказал Герман Амандус Шварц [10, с. 167]. Вейерштрасс долго болел и медленно поправлялся, всё больше времени уделяя научной работе.

В 1843 году гимназию в Дейч-Кроне проверял старший инспектор, который в своём отчёте высоко отозвался о Вейерштрассе. Благодаря этому Вейерштрассу немного повысили жалование, (до 400 талеров в год), он был представлен к повышению в должности с переводом в католическую гимназию Браунсберга (Бранёво, Польша). Но прошло ещё 5 лет, пока это назначение состоялось.

Браунсберг. С осени 1848 года Вейерштрасс начал работать в католической гимназии Браунсберг (Бранево) в восточной Пруссии недалеко от Кёнигсберга, сейчас территория Польши. Условия там были гораздо лучше – была библиотека, директор поощрял научную работу. Вейерштрасс много работал над научными статьями, преимущественно ночами. Однажды утром он не пришёл на урок, и пришедший за ним директор застал его сидящим при свете лампы и погружённым в работу. В 1850 году Вейерштрасс сильно заболел и два года не мог заниматься научными исследованиями. Его мучили сильные головные боли и головокружения, сопровождавшие его на протяжении 12 последующих лет.

В Браунсберге Вейерштрасс написал «Вклад в теорию абелевых интегралов» о проблеме обращения для гиперэллиптического случая, опубликовано в годовом отчёте гимназии Браунсберга в 1848/49 года. Работа содержала исследование по явному представлению абелевых интегралов посредством тета-рядов нескольких переменных. Но и этот сборник был не замечен.

Когда в 1851 году умер Гудерман, кандидатура Вейерштрасса рассматривалась в качестве его замены. Но Плюккер, мнение которого было решающим, сказал: «Вейерштрасс неизвестен мне даже по имени» [4]. Правда, Вейерштрасс не узнал об этой утраченной возможности. Но будучи на летних каникулах дома, в Вестфалии, он смог прочитать отзыв Гудермана на свою выпускную работу со словами «Тем самым кандидат входит достойным образом в ряд увенчанных славой исследователей». Это вдохновило его на создание работы «К теории абелевых функций», которая была написана в 1853 году. В этой работе Вейерштрасс решает основную задачу, поставленную Якоби, об обращении абелевых интегралов первого рода. Он послал эту работу в журнал Крелле, где она была напечатана в 47 томе (1854).

Благодаря этой работе к Вейерштрассу пришло признание. Эта статья привлекла внимание математиков, получила высокую оценку Дирихле, и повлияла на судьбу

Вейерштрасса. Карл Борхард (1817–1880), доцент Берлинского университета и ученик Якоби, специально приехал в Браунсберг, чтобы познакомиться с Вейерштрассом. Это стало началом их долгой дружбы. Затем Браунсберг посетила делегация из Кёнигсберга во главе с Ф. Ришело (1808–1875), учеником Якоби, чтобы вручить Вейерштрассу диплом доктора наук honoris causa. При вручении диплома Ришело сказал: «Все мы нашли в г-не Вейерштрассе своего учителя». Эти слова Вейерштрасс вспоминал как самые дорогие в день своего 80-летия, заметив: «Всё в этой жизни приходит, но слишком поздно» [2, с. 60]. Благодаря этому диплому Вейерштрасса назначили старшим преподавателем в школе Браунсберга.

Давид Гильберт в статье, посвящённой памяти Вейерштрасса, писал: «Решение якобиевой проблемы обращения, которую Вейерштрасс в этих работах дал впервые, и которая для любых абелевых интегралов сначала была дана Риманом, а потом другим путём проведена в лекциях самим Вейерштрассом, представляется мне одним из величайших достижений анализа» [11, с. 62].

Август Крелле состоял в министерстве просвещения консультантом по математическим вопросам, и в 1854 году в письме в министерство написал о только что появившейся работе Вейерштрасса и о желательности предоставления ему подходящего места. Во втором письме 1855 г., уже незадолго до своей смерти, Крелле написал министру о необходимости поддержать выдающийся талант Вейерштрасса. Если Вейерштрассу не предоставить достойное место, «этот уже не совсем молодой и вследствие двойной нагрузки – учителя и исследователя – уже склонный к болезням человек рано погибнет, как это случилось с Абелем и Эйзенштейном. Но это была бы новая прискорбная потеря для математики. Ведь если имеется много выдающихся учителей, то редко появляются настоящие учёные, являющиеся учителями самой науки, т. е. учителями учителей» [12, с. 45]. Статья Вейерштрасса сразу же была переведена на французский и опубликована в 1854 году в 19 номере журнала Лиувилля.

1 февраля 1855 года сам Вейерштрасс обратился к министру с письмом, приложив к нему оттиски своих статей и сообщив об их одобрении: «Но чем дороже для меня это одобрение и чем больше оно побуждает меня приняться с удвоенным усердием за завершение начатых мною больших работ, тем болезненнее чувствую я, что шаткое состояние моего здоровья угрожает сделать это почти невозможным, если я останусь в моём теперешнем положении» [12, с. 45]. После ещё нескольких писем, 29 сентября 1855 г. ему предоставили годовой отпуск.

Берлин. Смерть Гаусса в 1855 году повлекла много перемещений в университетах Германии. Дирихле покинул Берлин, чтобы занять его место в Геттингене, Куммер покинул Бреслау, чтобы занять место Дирихле в Берлине. Вейерштрасс надеялся получить место в Бреслау, но Куммер отговорил его, так как там пришлось бы читать только канонические курсы. Дирихле 19 мая1855 года написал письмо министру просвещения, прося за Вейерштрасса. Австрия предложила Вейерштрассу персональную профессуру в любом своём университете с жалованием 2000 гульденов. Вейерштрасс колебался. Куммер написал об этом Александру фон Гумбольдту, и через три дня Вейерштрассу предложили место профессора в Промышленном институте Берлина с жалованием 1500 талеров в год (тогда талер равнялся 1,5 австрийских гульдена, к тому же в Австрии гульден быстро обесценивался). Вейерштрасс занял это место в июле 1856 года. Вскоре Вейерштрасс стал читать лекции и в Берлинском университете, сначала как экстраординарный профессор (по хлопотам Куммера), и был избран в Королевскую академию наук Берлина. Избрание в Академию давало профессору право выбирать и читать лекционные курсы по собственной программе. Вейерштрасс поселился в Берлине с двумя сёстрами, Кларой и Элизой, через два года к нему переехал овдовевший отец и прожил у него до своей смерти в 1869 г.

Вейерштрассу был 41 год. Он читал 12 часов в неделю в Промышленном институте и две лекции в университете, занимался научной работой, кроме того, были обязанности в Академии и рецензирование в журнале Крелле. Переутомление сказалось 16 декабря 1861 года, – во время лекции в университете Вейерштрасс упал в обморок. Он на год прекратил читать лекции в Промышленном институте, хотя числился в нём до 1864 года. Со 2 июля 1864 года он стал ординарным профессором университета вместо ушедшего в отставку Мартина Ома (1792–1872). Вейерштрасс читал лекции в течение 33 лет, до 1889 года, после чего начал заниматься подготовкой к изданию своих сочинений.

Сам он характеризовал эпоху 1864–1883 гг. как время общих усилий Куммера, Кронекера и своих, как стремление дать молодёжи в университете
за два года «сформировать общую базу с очень большим веером самых важных математических дисциплин». Это было «блестящее созвездие трёх» [13, с. 123], Берлин стал центром, привлекавшим молодёжь всех стран к изучению новых разделов математики. Профессор прежде всего играл роль исследователя, а потом уже учителя.

Как сказал в 1869 году Г. Ганкель, после смерти Коши в 1857 году «княжество математики теперь бесспорно переместилось в Германию, и, хотя во Франции ещё есть энергичные ветераны, такие как Шаль и Лиувилль, но у них нет достаточного количества достойных последователей, способных конкурировать с немцами» [14, с. 29]. Именно создание национальной школы с сильными лидерами и многочисленными последователями и произошло в эпоху Вейерштрасса.

В течение 20 лет его совместная работа с Куммером, Кронекером и Борхардтом представляла собой дружелюбный союз (лига взаимного восхищения, как их называли), но с 1880-х годов отношения с обидчивым и тщеславным Кронекером стали портиться, на что Вейерштрасс жаловался в 1885 году в письме к С. Ковалевской: «чего мне не хватает всё больше и больше – дружественного сотрудничества с коллегами, основанного на согласии в принципах и искреннем взаимном признании. В нашем университете это в течение ряда лет нарушено, причины мне не вполне ясны. Одно лишь могу с уверенностью сказать, не я тому причиной.

Мой друг Кронекер, с которым у нас прежде было единодушие по важнейшим вопросам, а также и Фукс противодействуют мне: один сознательно и намеренно, другой – отчасти покоряясь авторитету первого, а отчасти недостаточно представляя себе значимость вопроса, о котором идёт речь. Нередко бывает так, что я на лекции доказываю какое-нибудь положение, которое на другой лекции признаётся неправильным и не выдерживающим критики» [15, с. 255].

Арифметический подход. Разработка теории функций XIX века была начата Гауссом, который владел всем кругом проблем, проработал их на полвека вперёд, но хранил всё в тайне, почти ничего публикуя и ни с кем не делясь. В 1798 году Гаусс написал работу по эллиптическим функциям, и положил её в стол, никому о ней не сообщая. Когда в 1827 году Гаусс прочитал работы Абеля и Якоби, он был поражён совпадением не только идей, но манеры изложения и даже обозначений. Об этом свидетельствуют два письма Гаусса своим ученикам. Первое написано Г.Х. Шумахеру: «Результаты Якоби представляют часть моей собственной большой работы, которую я собираюсь когда-нибудь издать. Она будет представлять исчерпывающий труд на эту тему, если только небесам будет угодно продлить мою жизнь и даровать мне силы и душевный покой». Второе письмо Ф.В. Бесселю: «Господин Абель предвосхитил многие мои мысли и примерно на треть облегчил мою задачу, изложив результаты с большой строгостью и изяществом. Абель шёл тем же путём, что и я в 1798 г., поэтому нет ничего невероятного в том, что мы получили столь похожие результаты. К моему удивлению, это сходство распространяется даже на форму, а местами и на обозначения, поэтому многие его формулы кажутся списанными с моих. Но чтобы никто не понял меня неправильно, я должен добавить, что не помню ни одного случая, когда я говорил об этих исследованиях с кем-нибудь из посторонних» [16, с. 345–346].

К середине XIX века Коши разработал основные положения и структуру математического анализа: теорию пределов, представление о непрерывности, сходимости[4], обогатил теорию функций комплексной переменной интегральной теоремой и теорией вычетов. На аналитическую функцию он налагал только условие дифференцируемости. Произвольная функция могла быть представлена интегралом. В работах Коши наметилось два подхода к развитию теории функций: геометрический Римана, и арифметический Вейерштрасса. Подход Римана позволял наглядно представить свойства эллиптических функций, конформные преобразования. Подход Вейерштрасса был аналитичен, логически обоснован и позволял подняться на более высокие уровни абстракции, невозможные для геометрических представлений. Его разработка понятия числа, функции, непрерывности, точной верхней грани создавала базу для дальнейшего развития теории. «Функция для него – степенной ряд, «элемент функции», ограниченный кругом сходимости. Вне этого круга существует процедура аналитического продолжения. Всё, таким образом, базируется на теории рядов, основанной на арифметической базе. Это может быть распространено на функции нескольких переменных. Метод Римана есть прежде всего метод открытий, метод Вейерштрасса прежде всего есть метод доказательства» [17].

Вейерштрасс в своих лекциях, судя по конспектам, выводит большинство результатов из тождества Абеля [18, v. II, c. 54], как пишет М.А. Тихомандрицкий: «Отсюда он получает формы нормальных интегралов второго и третьего рода, соотношения, аналогичные Лежандровскому в теории эллиптических функций между периодами интегралов первого и второго рода, прим-функции и выражение через них интегралов всех трёх родов, а также алгебраические функции, зависящие от той же иррациональности; отсюда, как простое следствие, теорему Абеля. Частный случай последней приводит к решению задачи Якоби, а именно, он выражает через новые переменные – значения сумм ρ интегралов первого рода, – суммы интегралов второго и третьего рода, и рассматривает частные производные по ним сумм интегралов второго рода; оказывается, что эти последние суть частные производные некоторой вспомогательной функции, через которую всё может быть выражено. Если эту функцию взять показателем степени числа *e*, то получается однозначная, конечная и непрерывная функция ρ новых переменных, обладающая свойствами, аналогичными свойствам Якобиевой Θ-функции. Вейерштрасс в заключение выводит её разложение в ряд. Таким образом теория Абелевых трансцендентных сводится к теории Θ-функций многих

[4] Коши во многом гениально изложил и обобщил идеи Б. Больцано [7].

переменных самым натуральным, а не искусственным образом, как у других исследователей» [19, с. 45].

Его лекции, его концепция аналитической функции вызывали огромный интерес во всём мире и послужили началом целого ряда исследований. Количество опубликованных работ по общей теории функций резко возросло под влиянием лекций Вейерштрасса (хотя количество публикаций по абелевым функциям выросло незначительно).

Лекции. Основные результаты исследований Вейерштрасса содержались в его лекционных курсах, которые он не публиковал. Как писал Г.Э. Гейне: «Принципы г-на Вейерштрасса изложены непосредственно в его лекциях и косвенных устных сообщениях, в рукописных копиях его лекций, и имеют весьма широкое распространение, но они не опубликованы в авторской редакции под контролем автора, что мешает целостному восприятию» [20, с. 26]. Вейерштрасс считал, что передача научных знаний возможна только при непосредственном контакте с учениками, причём по материалам собственных исследований лектора, когда ученик посвящается в процесс поиска и обучается методам исследования. Этот «индивидуальный» метод создал сильную школу, учение Вейерштрасса распространилось по всей Европе.

Письмо Миттаг-Леффлера.19 февраля 1875 года Г. Миттаг-Леффлер, один из самых любимых и талантливых учеников Вейерштрасса, писал на родину шведскому профессору Хольмгрену: «Моим пребыванием в Берлине в научном отношении я очень доволен. Нигде не нашёл я так многого для изучения, как здесь. Вейерштрасс и Кронекер имеют необычайное для Германии свойство избегать, насколько возможно, печатных публикаций. Вейерштрасс почти ничего не печатает, а Кронекер печатает только результаты без доказательств.

В лекциях они излагают результаты своих исследований. Едва ли может математика наших дней показать что-нибудь, что может сравниться с теорией функций Вейерштрасса или с алгеброй Кронекера.

Вейерштрасс излагает теорию функций в двух- или трёхгодичном цикле лекций и строит на простейших и самых ясных понятиях полную теорию эллиптических функций и её приложения к абелевым функциям, вариационному исчислению и т. д. Его систему характеризует преимущественно то, что она полностью аналитична. Геометрию он применяет редко и, если это случается, только для иллюстрации. Это кажется мне несомненным преимуществом перед школой Римана, так же, как и Клебша.

В действительности, хорошо известно, что, исходя из теории римановых поверхностей, можно совершенно строго построить теорию функций и что геометрическая система Римана достаточна, чтобы выяснить до сего времени неизвестные свойства абелевых функций, но, с другой стороны, она недостаточна, чтобы выяснить свойства трансцендент[5] высшего порядка, – в противном случае элементы теории функций были бы введены также таким путём, который им полностью чужд <…>.

Другое свойство Вейерштрасса – он избегает всех общих определений и всех доказательств, которые относятся к функциям вообще. Для него функция есть степенной ряд, и из степенного ряда он выводит всё. Это, однако, кажется мне в высшей степени трудным путём, и я не убеждён, что, вообще говоря, нельзя к этому прийти так, как Коши и Лиувилль, из общих и вполне строгих определений.

---

[5] Класс функций, невыразимых через известные.

Как Вейерштрасс, так и Кронекер отличаются полнейшей ясностью и строгостью доказательств. В то же время они унаследовали от Гаусса страх перед всяким видом математики при установлении основных математических понятий, и это даёт их выводам простоту и естественность, которые раньше едва ли вводились так систематически с такой высокой степенью строгости <…>.

С совершенно формальной точки зрения, по крайней мере, способ чтения Вейерштрасса ниже всякой критики и даже самый незначительный французский математик был бы сочтён с такой лекцией полностью неспособным как преподаватель. Однако если кому-нибудь удаётся после большой и тяжёлой работы привести лекцию Вейерштрасса к такому виду, в каком он её задумал, тогда всё становится ясным, простым и систематичным. Вероятно, этот удивительный недостаток формального таланта объясняет, что очень немногие из его многочисленных учеников понимают его полностью и что литература в развиваемом им направлении всё ещё так незначительна. Однако это не препятствует тому, что он пользуется почти идолопоклонническим почитанием» [21, с. 213–214].

Постепенно его лекции сформировались в цикл из четырёх семестров: два семестра «Введение в теорию аналитических функций», «Абелевы функции», «Вариационное исчисление и приложений эллиптических функций», который он читал до зимнего семестра 1889/90 года, его последним курсом было вариационное исчисление. Многолетняя работа над лекциями отражена в конспектах его учеников, позже вошедших в собрание сочинений Вейерштрасса. Это лекции 1868 г., записанные В. Киллингом, 1878 г., – А. Гурвицем и другие. Лекции по вариационному исчислению стали известны благодаря конспектам Г.Кобба (1892/93 г.) и диссертации Цермело (1894 г.). Ученики Вейерштрасса публиковали и своё изложение его лекций: Е. Коссак «Элементы арифметики» (1872) [22], по материалам лекций 1865/66)[6], В. Дантшер «Лекции по вейерштрассовой теории иррациональных чисел [23], С. Пинкерле «Опыт введения в теорию аналитических функций по принципам Вейерштрасса» (по записям лекций 1878 г.) [24], О. Бирман «Теория аналитических функций».

К. Каратеодори, внесший большой вклад в теорию вариационного исчисления, написал в «Немецкой литературной газете» в 1928 г.: «На протяжении поколения математики всех стран, занимающиеся вариационным исчислением, сожалели, что основополагающие открытия, которые сделал Вейерштрасс в вариационном исчислении, нельзя было найти ни в какой подлинной его публикации. Возможно, что это единственный случай с начала книгопечатания, когда идеи большого мастера, который революционизировал целую науку, только через подземные каналы доходят до сведения общества» [2, с. 140–141]. Лекции Вейерштрасса по вариационному исчислению содержали теорию как абсолютных, так и относительных максимумов и минимумов функций одной и нескольких переменных.

В курсе 1861 года уже содержится понятие непрерывности на языке ε-δ – решающий шаг в анализе; понятие окрестности, строгое определение бесконечно малой, определение производной в форме $f(x+h)-f(x)=f'(x)h+h(h)$, где $(h)=o(h)$. Но тогда у Вейерштрасса ещё не было теории иррациональных чисел. Есть только набросок: «Но существуют также величины, которые не выражаются через единицу и части единицы, к

[6] В 1885 году переведено на русский язык И. Красовским и издано в Киеве [8].

ним применяют форму бесконечных рядов» [25, с. 177]. Первые несколько лекций обычно были посвящены понятию числа и четырём операциям над числами.

Теория иррациональных чисел, использующая предельную точку, появилась у Вейерштрасса после 1872 года, когда понятие предельной точки как точки аккумуляции появилось у Ганкеля (1870) и было разработано Кантором, как точки, в окрестности которой находится бесконечно много точек данного множества.

Предельная точка уже есть у Вейерштрасса в записи лекций 1874 года, (конспект G. Hettner, p. 163–170). После того, как Кантор ввёл понятие открытого и замкнутого множества, в курсе Вейерштрасса 1874 года появляется δ-окрестность точки в R^n. Это привело к созданию Вейерштрассом своей концепции континуума [9, с. 396]. Там же Вейерштрасс вводит в теорию иррациональных чисел понятие точной верхней грани. Изложение теории обогащалось из года в год, что видно по конспектам лекций последующих лет [10].

С 1874 года Вейерштрасс разрабатывает понятие верхней грани множества [10, с. 77], введённое Больцано в 1817 году. Вейерштрасс при этом пользовался методами вариационного исчисления [26].

Кантор создавал теорию множеств с 1872 по 1884 год. В его понимании континуум был связным совершенным множеством. Связность Кантор понимал так: множество T по определению связно, если для t и t' из T для любого $\varepsilon > 0$ в T существует конечное число точек $t_1, t_2, .. t_n$, таких, что все расстояния $tt_1, t_1t_2, t_2t_3, ..., t_{n-1}t_n, t_nt'$ не превосходят ε. Подмножество R^n определено по Кантору как континуум, если оно совершенно и связно.

Вейерштрасс нуждался в понятиях связности и континуума для приложений в области аналитических функций. В своих лекциях он рассматривал континуум как вполне связное совершенное множество. Понятие связности у Вейерштрасса иное, мотивированное задачами аналитического продолжения. Множества, рассматриваемые Вейерштрассом – это, как правило, счётные множества точек, исключённых из области определения функции (особые точки функции), или их дополнения. Если граница области представляет собой такое счётное множество, это препятствует аналитическому продолжению из внутренней части круга во внешнюю, так как аналитическое продолжение у Вейерштрасса производится с помощью *конечной цепочки открытых дисков*, каждый из которых имеет общую точку с предыдущим. *Вейерштрасс определял связность так: если в окрестности точки a содержится точка b, в окрестности точки b содержится точка c и так далее, то любая точка s, по которой мы можем перейти из a в c, называется связной или смежной с точкой a* [27, с. 71]. Это условие связности более сильное, чем у Кантора, где требуется только соединение для любого ε, конечной последовательности точек, каждая из которых удалена на расстояние ε от следующей. Посредством таких последовательностей можно проникнуть из внутренней области круга во внешнюю.

В 1883 году Миттаг-Леффлер писал Кантору по поводу обеих концепций: «Я вполне согласен с вашим определением континуума, но хотел бы, однако, сослаться на то, что Вейерштрасс называет континуумом «вполне связное точечное множество». Из моей работы будет следовать достаточность того, что такое вполне связное точечное множество имеет своё необходимое место в теории аналитических функций, и не может быть заменено на ваш континуум» [28, с. 114]. Миттаг-Леффлер проанализировал разницу в концепциях Кантора и Вейерштрасса в 1883 году в письмах к своему ученику Э. Фрагмену, который продолжил исследование этой темы[7].

Вейерштрасс строго определил понятие непрерывности функции в окрестности точки x_0 на созданном им языке ε-δ [7]. Им сформулированы свойства таких функций, а также свойства функций, непрерывных на отрезке: 1) Функция, непрерывная на отрезке [a, b], ограничена на нём. 2) Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нём наибольшее и наименьшее значения[8]. 3) Теорема о приближении функции: для любой действительной непрерывной на отрезке [a, b] функции $f(x)$ существует последовательность многочленов $P_0(x), P_1(x), ..., P_n(x), ...$, равномерно сходящихся на [a, b] к $f(x)$. Конструктивное доказательство этой теоремы дал С.Н. Бернштейн в 1912 г.

Задолго до Фреше и Хаусдорфа в лекциях Вейерштрасса формируется понятие связности, аксиоматика метрического и топологического пространства [29]. Но эти понятия для него вспомогательные, они нужны для развития идеи аналитического продолжения и для вариационного исчисления, поэтому они отличаются от таковых же, создаваемых Кантором. Развитие этих идей повлекло создание М. Фреше и Ф. Хаусдорфом теории метрических пространств, теории функционалов в работах В. Вольтерра и Дж. Асколи [30].

Вводный курс Вейерштрасса содержал концепцию числа и функции на основе степенного ряда, понятия непрерывности и дифференцируемости, аналитического продолжения, аналитической функции нескольких переменных, в частности, подготовительная теорема Вейерштрасса о факторизации, и контурные интегралы.

Вейерштрасс вместе с Куммером вёл научный семинар для подготовленных студентов. В 1872 году этот семинар был посвящён геометрии Лобачевского, где Вейерштрасс ввёл свои неевклидовы координаты. Его аудитория собирала слушателей не только со всей Германии, но и со всей Европы, благодаря чему его идеи проникли в другие страны. В 1873/74 году он был избран ректором университета.

Вейерштрасс как лектор. Особенность преподавания Вейерштрасса заключалась в том, что он в своём целостном курсе сначала давал основания. Он рекомендовал новоприбывшим слушать свой цикл с начала. Манера его чтения не была выразительной, – его дикция не была безупречной, он путал листы конспекта, смущался, мог воспользоваться зонтиком вместо губки; он импровизировал, ошибался, передоказывал свои теоремы, иногда закрывал глаза и задумывался. Но он излагал только свои результаты со своими доказательствами, так как, будучи академиком, имел право читать лекции по своей программе и со своими результатами. Вейерштрасс излагал теорию эллиптических функций на своих лекциях двояким образом: один раз он исходил из интегралов – это тот курс, который, по-видимому, слушал Миттаг-Леффлер; другой раз – и этот курс был повторяем – он принимал за исходную точку теорему сложения.

По словам Шварца, он показывал математику как поле неоткрытых проблем.

Но вот Феликс Клейн отказался посещать его лекции, о чём потом сожалел. Клейн говорил, что Вейерштрасс «пользовался абсолютным и непререкаемым авторитетом, все его теории принимались его слушателями как непреложные нормы мышления. Его

---

[7] Phragmén, E. A new theorem in the theory of point sets. (En ny sats inom teorien för punktmängder.) (Swedish) Stockh., Öfv. XLI. No. 1.121-124 (1884).

[8] Впервые эту теорему сформулировал Коши, а полное доказательство дал Гейне.

интеллектуальное превосходство скорее подавляло его слушателей, чем толкало их на путь самостоятельного творчества» [31, с. 327].

Как правило, на первых лекциях Вейерштрасса присутствовало много студентов, от 100 до 250 человек[9], а к концу цикла оставалось всего 5–7 человек, но это были уже глубоко продвинутые в математике студенты, способные к самостоятельным исследованиям. Более 100 бывших студентов Вейерштрасса стали университетскими профессорами.

Речь Вейерштрасса. Метод Вейерштрасса выражен им в речи, сказанной в 1873 году, когда он принимал обязанности ректора: «Успех академического преподавания основывается на том, что учитель непрестанно направляет учащегося к самостоятельным изысканиям. Это достигается тем, что учитель при изложении предмета самим расположением материала и выставлением руководящих идей показывает учащемуся тот путь, следуя которому зрелый и владеющий уже всеми исследованиями мыслитель доходит в правильной постепенности до новых результатов или до лучшего обоснования уже известных.

Учитель не упускает при этом случая указать на те границы, которые наука в то время ещё не переступила, а также упомянуть те пункты, исходя из которых возможно в ближайшем будущем ожидать дальнейшего развития науки. Он не отказывает также ученику в посвящении в ход своих собственных исследований, не скрывая при этом даже и сделанных промахов и испытанных разочарований. Правда, таким образом получаются не столь красочные, изящные и для умственно косных слушателей более понятные лекции (подобные, например, тем, которые излагаются большинством французских профессоров по вполне обработанным согласно установленной программе литографированным запискам, иногда даже поручаемым их ассистентам для прочтения).

В старинных мало читаемых сборниках научных учреждений, а также в обширной научной переписке учёных прежних времён заключается громадное количество научного материала, из которого всякий, кто сумеет, может вычитать многое побуждающее к собственной работе, попутно может и научиться многому полезному» [32, с. 1327].

В 1989 году вышло издание конспекта лекций Вейерштрасса, прочитанных в весеннем семестре 1886 года «Избранные главы по теории функций» [27]. Вейерштрасс читал 3 раза в неделю, приблизительно по 60 минут, с начала мая до конца июля[10]. Студенты записывали его лекции дословно, благодаря чему мы можем услышать прямую речь Вейерштрасса. На русском языке опубликован перевод нескольких лекций [26].

Издание трудов. В конце 1885 года Вейерштрасс, отметив своё 70-летие, попросил годовой отпуск и провёл весь 1886 год с сёстрами в Швейцарии. По возвращении он занялся изданием своих работ. С 1894 по 1927 год вышло семь томов. Первые три содержат опубликованные и неопубликованные работы Вейерштрасса. В четвёртом томе содержатся лекции по теории абелевых функций, в основном по записям лекций, сделанным Хеттнером и Кноблаухом (1875/76). Пятый том содержит лекции по теории эллиптических функций, шестой – лекции по применению эллиптических функций. Седьмой том вышел в 1927 году с лекциями по вариационному исчислению. В 1988 году

[9] На лекциях Римана максимально было 13 человек.

[10] Раньше в течение года были два учебных семестра – зимний, продолжавшийся с первой половины октября приблизительно до февраля (в конце декабря были рождественские каникулы длительностью до двух недель), и летний, продолжавшийся с начала мая до конца июля.

вышли «Избранные вопросы комплексного анализа», содержащие лекции Вейерштрасса 1886 года. В 1975 году были опубликованы найденные Пьером Дюгаком в институте Миттаг-Леффлера в Швеции самые ранние записи лекций Вейерштрасса, читаных им в 1861 году в Промышленном институте и записанные 18-летним Г. Шварцем [10]. На русский язык А.П. Юшкевичем переведён небольшой фрагмент этих лекций [33, 188–192]. Если добавить перевод речи Вейерштрасса, сделанный Крыловым в 1918 году [32], и [26], мы получим все тексты Вейерштрасса на русском языке. Пересказ некоторых работ Вейерштрасса есть в книге Кочиной [2].

Ученики. В 1871 году Германия воссоединилась в единое государство, что вызвало национальный подъём, стимулировавший научные исследования в математике, а затем в физике. Ведущую роль играли университеты Берлина и Геттингена. Огромен вклад не только в немецкую, но и мировую науку многочисленных учеников Вейерштрасса, не только тех, кто защищался под его руководством, но и непосредственно слушавших его лекции, либо признававших его влияние опосредованно.

Первым учеником Вейерштрасса был Лео Кёнигсбергер (в 1860 получил учёную степень), он продолжил исследования учителя по эллиптическим функциям и дифференциальным уравнениям. Понимая относительность этой классификации, назовём последователей и учеников Вейерштрасса, работавших в русле основных направлений его исследований, в хронологическом порядке: Л. Фукс, А.Н. Коркин, Н.В. Бугаев, К.Й. Томе, Г.А. Шварц, М.А. Тихомандрицкий, Э. Коссак, В.П. Ермаков, Г. М.Миттаг-Леффлер, Е.И. Золотарёв, Ф.Г. Фробениус, Л. Гегенбауэр, Ф. Клейн, С. Ковалевская, Ф. Шоттки, А.В. Васильев, К. Рунге, О. Больца, П.М. Покровский, А. Гурвиц, О. Гёльдер, М. Лерх, А. Кнезер.

В других направлениях, в том числе и создав свои собственные, работали П. Бахман, Н.В. Бугаев, Э. Лампе, Ф. Мертенс, С. Ли, Я. Люрот, Г. Кантор, В. Киллинг, Ф. Клейн, Ф.Г. Фробениус, Л. Гегенбауэр, А. Шёнфлис, А.В. Васильев, Д.Ф. Селиванов, К. Рунге, А. Гурвиц, Э. Гуссерль, О. Гёльдер, А. Кнезер, Г. Минковский.

Влияние Вейерштрасса распространяется и на учеников Эрмита: Г. Дарбу, А. Пуанкаре, Э. Пикара, Э. Гурса.

В Италии его идеям следовали Ф. Бриоши, Ф. Казорати, С. Пинкерле, У. Дини [34] и Дж. Пеано [35].

Софья Ковалевская. Софья Ковалевская (1850–1891) стала любимой ученицей Вейерштрасса. Приехав к нему в 1870 году, она уговорила его давать ей частные уроки, так как не была допущена к слушанию лекций в университете. Вейерштрасс, убедившись в её уме и подготовленности (она прослушала курс лекций по эллиптическим функциям у Кёнигсбергера в Геттингене, а также решила несколько предложенных Вейерштрассом задач), начал с лекций по гиперэллиптическим функциям. Дважды в неделю она приезжала к нему, один раз в неделю он приезжал к ней. В 1872 году он преподавал ей вариационное исчисление. Её благодарное внимание побуждало его к новым математическим размышлениям. Он называл свою ученицу единственным настоящим другом, а себя считал её духовным отцом. С 1884 года она преподавала в университете Стокгольма. К 1886 году относятся её успехи в исследовании вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки, за что в 1888 году она получила премию Парижской академии наук. На зимних каникулах 1890/91 года Ковалевская была в Берлине. Вернувшись в Стокгольм, она простудилась, заболела и умерла 10 февраля 1891 года. Ей был 41 год.

Вейерштрасс был так потрясён смертью своей любимой ученицы, что близкие опасались за его жизнь. Он послал на похороны венок белых лилий с надписью на ленте «Соне от Вейерштрасса». Письма Ковалевской он сжёг, но сохранились и опубликованы его письма к ней [15, 36].

Шарль Эрмит. Эрмит был лидером математиков Франции и считал себя учеником Вейерштрасса, о чём он писал 27 января 1882 г. Ковалевской: «Наш общий учитель – это г-н Вейерштрасс, и наши лекции в Сорбонне и Политехнической школе имеют главным образом целью изложить слушателям его труды и его великие открытия. К тому же и Вы, милостивая государыня, являетесь звеном симпатии между мной и великим геометром» [37, с. 654]. Ковалевская познакомилась с Эрмитом по совету Вейерштрасса в начале 1882 года, Вейерштрасс же советовал Ковалевской познакомиться с учениками Эрмита П. Аппелем, Э. Пикаром и А. Пуанкаре.

Магнус Гёста Миттаг-Леффлер. Швед Миттаг-Леффлер был одним из самых ярких учеников Вейерштрасса (1846–1927). После окончания университета в Упсале в 1873–76 гг. он поехал совершенствоваться в математике за границей. В Париже он получил от Эрмита совет ехать к Вейерштрассу, слушателем которого и стал в 1874/75. Миттаг-Леффлер называл Вейерштрасса «своим великим учителем и отеческим другом» [28, с. 52].

Вейерштрасс писал Ковалевской 15 августа 1878 года: «Миттаг-Леффлер был для меня очень приятным учеником; наряду с основательными знаниями он обладает удивительными способностями к усвоению предмета и умом, направленным к идеалу: я уверен, что общение с ним оказало бы на Тебя стимулирующее действие» [15, с. 218]. Там же Вейерштрасс говорит о положении Миттаг-Леффлера в Гельсингфорсском университете: «Там идут дальше, чем где бы то ни было, в создании *национально-финской* математики, и так как за время пребывания там Леффлера в местных газетах в каждом семестре появляются передовые против математики Вейерштрасса, Леффлер допускает неосторожность, упоминая моё имя в своих лекциях и статьях чаще, чем это необходимо» [15, с. 218]. Теорема Миттаг-Леффлера (1876) возникла как обобщение проблемы, поставленной и решённой Вейерштрассом. Своё название она получила в статье Вейерштрасса и была озвучена Эрмитом, когда он читал лекцию в Сорбонне [28, с. 51]. В письме от 16 декабря 1874 года Вейерштрасс писал Ковалевской, что в связи со своими лекциями размышляет об одной нерешённой проблеме: «Если произвольно берётся бесконечный ряд чисел $a_1, a_2, ..., \infty$, то спрашивается, всегда ли будет существовать такая целая трансцендентная функция одного переменного x, что при $x = a_1, a_2, ...$ она исчезает, а при любом другом значении нет? <…> Для утвердительного ответа на этот вопрос оказывается необходимым условие, чтобы, как только n превысит определённый предел, a_n по своей абсолютной величине было больше произвольно заданной величины» [28, с. 51].

Вейерштрасс доказал и достаточность условия, представив искомую функцию в виде

$\prod_{\nu_n} E\left(\frac{x}{a_{\nu_n}}\right)_{\nu_n}$, где ν_n – целое положительное, в частности $\nu_n = n$, а

$$E(x)_{\nu_n} = (1-x)\exp\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{\nu_n}}{\nu_n}\right).$$

Это *первичные множители*. Их открытие Пуанкаре считал главным вкладом Вейерштрасса в теорию функций. Статья Вейерштрасса «К теории однозначных аналитических функций» с этим и другими результатами была опубликована в 1876 году.

Высказанные в статье теоремы Вейерштрасс излагал ещё летом, читая лекции по введению в теорию аналитических функций. Среди слушателей был Миттаг-Леффлер и эти лекции побудили его поставить аналогичную проблему в случае, когда для функции рационального характера вместо нулей заданы «константы точек бесконечности» (главные части). В 1876 году он опубликовал два сообщения, содержащих так называемую теорему Миттаг-Леффлера о разложении мероморфной функции: «Для любой последовательности чисел β_n $(n=1,2,\ldots)$, принадлежащей комплексной плоскости, не имеющей в ней предельных точек, существует мероморфная функция *G* с полюсами в точках β_n и только в этих точках, главные части которой в точках β_n совпадают с заранее заданными многочленами от $1/(z-\beta_n)$. При этом функция *G* может быть представлена в виде, вообще говоря, бесконечной суммы мероморфных функций, каждая из которых имеет полюс только в одной точке».

Итоги. Заслугой Вейерштрасса является создание строго обоснованных математического анализа, теории эллиптических и абелевых функций, вариационного исчисления. В этом русле им развита теория целых и мероморфных функций, дано каноническое представление целой функции, имеющей конечное или бесконечное количество нулей. В его системе эллиптических функций вместо трёх функций Якоби всего одна $\wp(u)$, самая простая. Вейерштрасс определил существенные особенности алгебраических кривых, которые не изменяются при бирациональных преобразованиях и которые теперь называют «точками Вейерштрасса». Вейерштрасс разработал не только теорию гиперэллиптических интегралов, но исследовал общие абелевы интегралы, зависящие от иррациональности.

В 1876 г. в статье «Теория однозначных аналитических функций» [38]. Вейерштрасс доказал теорему: если $f(z)$ имеет характер целой рациональной функции в окрестности каждой конечной точки, то она может быть представлена в виде отношения двух целых функций. Там же введены первичные множители и сформулирована теорема: вблизи существенно особой точки *c* функция $f(x)$ может к любому заданному числу приблизиться сколь угодно близко; при $x=c$ она не имеет определённого значения. (У нас она называется теоремой Сохоцкого-Вейерштрасса, так как на восемь лет раньше эта теорема была получена независимо друг от друга Ф. Казорати и Ю.В. Сохоцким [39]).

Вейерштрасс показал возможность построить однозначную функцию по данным её нулям и однозначную функцию с данным числом особых точек.

Исследования Вейерштрасса распространились на случай функций многих переменных. Назовём *подготовительную теорему* Вейерштрасса, сформулированную в 1886 году в «Очерках учения о функциях»: Пусть $F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет аналитической функцией в окрестности начала; предположим, что $F(0,0,...,0)=0$, $F_0(x)=F(x,0,...,0)\neq 0$ и пусть p такое целое число, что $F_0(x)=x^p G(x)$, $G(0)\neq 0$. Тогда существует «избранный» полином $f(x,x_1,...,x_n)=x^p+a_1x^{p-1}+...+a_p$, коэффициенты которого аналитические функции $a_j(x_1,...,x_n)$ в окрестности начала, и функция $g(x,x_1,...,x_n)$, аналитическая и не равная нулю в окрестности начала, такие, что $F=f\cdot g$ в окрестности начала. Из подготовительной теоремы следует, что при $n>1$ в отличие от случая одного комплексного переменного во всякой окрестности любого нуля аналитической функции находится бесконечное множество её нулей. Эту теорему Вейерштрасс включал в лекции с 1860 года, она была представлена в литографированном издании 1879 года.

Теория абелевых функций не была полностью завершена Вейерштрассом. Понятие *абелевых* функций, то есть $2p$-периодических мероморфных функций p переменных, было введено Вейерштрассом на основе теоремы обращения Якоби. В 1869 году Вейерштрассом сформулирована фундаментальная теорема о том, что между $p+1$ абелевыми функциями с одинаковыми периодами имеет место алгебраическая связь, однако к доказательству он не пришёл [40]. В последующие десятилетия он возвращался к этой теореме, но без успеха, так как представление мероморфных функций усложнялось с повышением размерности. Теперь эта задача решена [21, с. 123].

18 июля 1872 года Вейерштрасс указал примеры непрерывных функций действительного переменного, которые ни для какого значения этого переменного не имеют определённой производной (Функция Вейерштрасса: $w(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, где a – произвольное нечётное число, не равное единице, а b – положительное число, меньшее единицы. Была создана как контрпример гипотезе Ампера).

В 1880 в работе “Zur Functionentheorie” он показал, что можно построить такой сходящийся ряд, который в разных областях будет представлять различные функции. Ряды и привели его к непрерывным функциям, нигде не имеющим производную.

Принцип Дирихле был так назван в 1851 г. в докторской работе Римана, студента Дирихле. Дирихле использовал принцип существования минимума в своих лекциях неявно, и не доказывал его. Вейерштрасс показал, что в некоторых ситуациях принцип неверен. Как показал Вейерштрасс, предположение о том, что среди допустимых функций должна существовать та, на которой интеграл должен принимать своё наименьшее значение, не является обоснованным с математической точки зрения. Риман, исходя из распространения электричества в проводнике, считал, что задача, которая «разумна физически», будет «разумна математически». Вейерштрасс в 1869 г. построил известный контрпример. Его идея была продолжена Чезаре Арцела в 1889 году.

Трансцендентность числа e. В 1882 году Ф. Линдеман доказал, что число e^{α} трансцендентно для любого ненулевого алгебраического α, а в 1885 году Вейерштрасс доказал более общее утверждение, носящее сейчас имя теоремы Линдемана–Вейерштрасса.

Традиции школы Вейерштрасса были плодотворны. Математический анализ в изложении Вейерштрасса приобрел канонический характер и распространился по Европе благодаря его ученикам и последователям.

Последние три года жизни Вейерштрасс провёл в инвалидном кресле; иногда слуга вывозил его в парк. Окружённый почитанием, он умер в Берлине 19 февраля 1897 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габричевский А. Автографы Гёте в СССР / Литературное наследство т. 4–6. 1932 г. – С. 817–854.
2. Кочина П.Я. Карл Вейерштрасс: 1815–1897. М.: Наука, 1985. – 272 с.
3. Biermann K.-R. Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm. Complete Dictionary of Scientific Biography. 2008. – 700 p. http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904588.html
4. Elstrodt J. Karl Weierstrass (1815–1897). Lecture on the occasion of the unveiling of the memorial tablet in honor of the famous mathematicians Karl Weierstrass and Wilhelm Killing in Braniewo, July 24, 2008. – c. 11. Электронный ресурс: http://www.docstoc.com/docs/153909916/kw#top
5. Медведев Ф.А. К истории понятия равномерной сходимости рядов // Историко-математические исследования. – Москва: Наука. – 1974. – XIX. – С. 75–93.
6. Cauchy A. Rapport sur un mémoire de M. Laurent qui a pour titre: Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d’une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable x (30 Octobre 1843) // Oeuvres complètes, 1st ser., VIII. – Paris, 1893. –- P. 115–117.
7. Синкевич Г.И. К истории эпсилонтики // Математика в высшем образовании. – 2012. - №10. – С. 149–166.
8. Коссакъ Э. Основы ариѳметики. Историческій очеркъ введенія въ ариѳметику различнаго рода чиселъ (дробныхъ, несоизмѣримыхъ, отрицательныхъ и мнимыхъ) и современно-научная на этотъ предметъ точка зрѣнія / Пер. съ нѣмецк. И. Н. Красовскаго. Кіевъ. (Унив. тип.). 1885 г. – 47 с.
9. Bottazzini U., Gray G., Hidden Harmony – Geometric Fantasies: The Rise of Complex Function Theory. Springer. – 2013. – 848 p.
10. Dugac P. Éléments d’analyse de Karl Weierstrass / Archive for History Exact Sciences. 1973. – Vol. 10. – P. 41–176.
11. Hilbert D. Zum Gedächtnis an Karl Weierstrass / Götting. Nachr. Geschäft. Mitt., 1897. – S. 60-69.
12. Biermann K.-R. Die Berufung von Weierstrass nach Berlin / Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass. Köln; Opladen: Westd. Verl. – 1966. – S. 41–52.
13. Biermann K.-R. Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810-1920/ Univ. Bibl., 1968. 265 s.
14. Hankel H. Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderte / H. Hankel // Ein vortrag beim eintritt in den akademischen senat der universität Tübingen ein 29 April 1869. – 36 S.
15. [Вейерштрасс К.] Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской. 1871–1891 / Под. ред. П.Я. Кочиной. М.: Наука, 1973. – 312 с.
16. Гиндикин С. Рассказы о физиках и математиках. МЦНМО, НМУ. – 2001. http://pskgu.ru/ebooks/gindikinpdf/g09.pdf
17. Пуанкаре А. Математическое творчество Вейерштрасса // В кн. Кочина П.Я. Карл Вейерштрасс: 1815-1897. М.: Наука, 1985. – 272 с. – с. 246-258.
18. Abel N. Sur une propriété remarquable d’une classe très étendue de fonctions transcedentales // Abel N. Oeuvres completés, 1881, v. II. – p. 54.
19. Тихомандрицкий М.А. Карл Вейерштрасс. Речь, произнесённая на заседании математического общества 28 февраля 1897 года / Сообщения Харьковского математического общества. – Харьков 1899. – Вторая серия, том VI. – С. 35–56.
20. Гейне Э. Г. Лекции по теории функций. Перевод и примечания Г.И.Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 18. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб. – 2012. – С. 26 – 46.

21. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass, 1815–1965 / Hrsg. Von H. Behnke, K. Kopfermann. Köln; Opladen: Westdt. Verl., 1966. 612 S.
22. Kossak E. Die Elemente der Arithmetik. Berlin, Gedruckt in der Nauckschen Buchdruckerei, 1872. – 29 S.
23. Dantscher V. Vorlesungen über die Weierstraß`sche Theorie der irrazionalen Zahlen. Leipzig: Teubner, 1908.
24. Pincherle S. Saggio di una introduzione alla teoria delli funzioni analitiche secondo i principi del prof/ C/ Weierstrass compilato dal Dott. S. Pincherle/ Giornale di Mathematiche di Battaglini. – 1880. – № 18.
25. Дюгак П. Понятие предела и иррациональные числа. Концепции Шарля Мере и Карла Вейерштрасса // Историко-математические исследования. Москва: Наука. – 1973. – XVIII. – с. 176–180.
26. Синкевич Г.И. Формирование топологических понятий в лекциях Вейерштрасса 1886 года / Г.И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов. Выпуск 19. Под редакцией д-ра физ.- мат. наук, проф. Б.Г. Вагера / СПбГАСУ. – СПб. – 2013. – С. 4 – 23.
27. Weierstrass K. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung gehalten in Berlin 1886 mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857 und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstrass aus den Jahren 1870 bis 1880/86. Teubner–Archiv für mathematic. Band 9, 272 s. Reprint 1989.
28. Turner L. The Role of Goesta Mittag-Leffler. – 2011. – 291p. http://css.au.dk/fileadmin/www.ivs.au.dk/css.au.dk/Turner_PhD_Thesis_2012.pdf
29. Sinkevich G. Concepts of a Numbers of C. Méray, E.Heine, G. Cantor, R. Dedekind and K. Weierstrass / G. Sinkevich // Technical Transactions. Kraków. – 2014. – 1-NP. – p. 211–223.
30. Kotsier T., van Miln J. By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of Mathematics. https://staff.fnwi.uva.nl/j.vanmill/papers/papers1999/teun.pdf
31. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.-Л.: ОНТИ, 1937. – Ч.I, 432 с.
32. [Вейерштрасс К.] Речь Вейерштрасса, произнесённая при вступлении в должность ректора Берлинского университета 15 октября 1873 года. Перевод А.Н. Крылова. УФН 1999, 169, 12 с. 1325–1328. (впервые опубликована УФН 1918 г. 1(2) 85.
33. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Просвещение. – 1977. – 224 с. – С. 188–192.
34. Синкевич Г.И. Улисс Дини и понятие непрерывности // История науки и техники. – 2012. – №10. – С. 3–11.
35. Borgato M.T. Continuity and discontinuity in Italian Mathematics after the unification: from Brioschi to Peano / Organon 41: 2009. – P. 219–231.
36. Кочина П.Я. Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891). М.: Наука. – 1981. – 312 с.
37. Эрмит Ш. Письма к С.В. Ковалевской / Публ. П. Я. Полубариновой-Кочиной // Труды Института ИИЕТ. – 1957. – Т. 19. – С 650-689. – С. 654.
38. Weierstrass K. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen / Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1876. Berlin, 1876. – S. 11–60.
39. Ермолаева Н.С. Аналитические исследования Ю.В Сохоцкого // Историко-математические исследования. Вып. 34. . М.: «Наука», 1993. С. 60–103.
40. Weierstrass K. Über die allgemeinsten Eindeutigen und 2n-fach periodischen Functionen von n Veränderlichen / Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. – 1869. – S. 853–857.