Jerzy Mioduszewski

Urysohn Lemma or Lusin-Menchoff theorem?

Лемма Урысона или теорема Лузина-Меньшова?

Ежи Медушевский, Польша, Катовице

Перевод с польского и примечания Г.И.Синкевич[1].

"Оставьте москвичам их внутренние ссоры, пусть решают их сами", - перефразируя Пушкина[2].

Первый вариант [1] на польском языке был опубликован в 1996 году. В процессе работы над текстом были сделаны некоторые изменения.

Введение

В статье рассматриваются две теоремы, упомянутые в названии, разные с точки зрения логики, но схожие по математической форме. Положение, занимаемое ими в математике, неравнозначно.

Значение Леммы Урысона заключается в её приложениях. Позже она приобрела известность как связующее звено между теоретико-множественными методами и геометрическим разделом топологии. Теорема Лузина-Меньшова менее известна широкому математическому сообществу. Она никогда не была предметом исследования в руководствах. Она является тонким инструментом исследования производных, замечательного раздела действительного анализа. В отличие от более чисто математической Леммы Урысона она как теорема сама по себе стала частым объектом исследований.

Обе теоремы появились в обстановке Москвы 1920-х годов, времени расцвета московской теоретико-множественной математики под руководством Дмитрия Егорова и Николая Лузина. Это было время бурно деятельности сообщества молодых учеников Лузина, названного Лузитанией, преисполненного разнообразием характеров,

---

[1] Автор благодарен Галине Синкевич за перевод текста, а также за вставленные сноски с теми сведениями о российских математиках, которые не были известны автору.

[2]

Оставьте: это спор славян между собою,
Домашний, старый спор, уж взвешенный судьбою,
Вопрос, которого не разрешите вы. - Пушкин, «Клеветникам России».

математических интересов и страстей, где соперничество сопровождалось тесным сотрудничеством. Харизматическая личность Лузина не только вызывала восхищённое восхищённое преклонение, но и вела к конфликтам. Самый известный из них, разгоревшийся разгоревшийся вокруг аналитических множеств, непосредственно предшествовал описываемым в этой статье событиям.

Хотя библиографические источники, касающиеся известной Леммы, достаточно богаты, есть некоторые интригующие пробелы. Многие из них относятся к теореме Лузина-Меньшова, в том числе вопрос об авторстве, позже заполненный многими неясными и сомнительными фактами. Теорема Лузина-Меньшова предшествует Лемме Урысона как хронологически, так и в естественном развитии идей.

Теория функций действительной переменной сформировалась раньше, чем теоретико-множественная топологии, и автор убеждён, что Теорема Лузина-Меньшова сыграла важную роль для известности Леммы Урысона. Связь между этими теоремами никогда не обсуждалась ни топологами, ни математиками, работающими в действительном анализе. Даже в Москве. Однако эти теоремы известны во всём мире и это стало причиной написания этой статьи.

Лемма Урысона

Топологическое пространство называется нормальным, если для каждой пары его подмножеств $F \subset U$, где *F* замкнуто, а *U* открыто, всегда может быть найдено замкнутое подмножество *K* из *U*, содержащее *F*, что записывается как $F \subset \operatorname{int} K \subset K \subset U$ (1).

Нормальные пространства не всегда определялись таким образом. Г. Титце (1880–1964) [2], который систематично анализировал *условия отделимости,* начиная от T_0 через T_2 до нормальности, полагал нормальность как условие T_4, позволяющее разделить два любые замкнутые подмножества без общих точек с помощью открытой окрестности без общих точек. Хотя установление эквивалентности условий Титце с условием (1) является простым логическим упражнением, факт перехода к форме (1) был значительным стимулом для дальнейшего развития понятия нормальности. Эта новая формулировка впервые появилась у Урысона в первой посмертно изданной статье 1925 года [3], главной задачей которой была теорема о том, что мощность связных нормальных пространств (имеющих более одной точки), есть континуум.

Хотя во вводной части статьи используется форма нормальности по Титце, но во вводной части вспомогательная лемма доказывается в предположении, что условие T_4 включает условие (1).

Таким образом, мы видим, что этот факт для Урысона был не только существенным, но и инновационным.

Цепочка включений из условия (1) в работе [3] была итерирована (продолжена), и Урысон получил хорошо известную топологам бесконечную цепочку включений

$$F \subset \ldots \subset \operatorname{int} K_r \subset K_r \subset \ldots U, \quad (2)$$

где *r* пробегает значения двоичных дробей $k/2^n$ до 1.

Можно было бы ожидать, что будет написана хорошо известная непрерывная функция. Но это не так, ибо цепочки (2) достаточно для доказательства теоремы о значении мощности.

Только в третьем приложении к его статье, в «Трудах» [4, с.208] представлена функция, существование которой даёт ответ на вопрос Мориса Фреше о возможности определения на общих топологических пространствах непостоянной непрерывной функции.

Далее это точнее выражено следующей теоремой:

«Теорема. *Пусть A и B суть два замкнутых множества, лежащих в нормальном пространстве E. Тогда существует такая непрерывная на E функция* $f(x)$*, что*

$f(x)=0$ *на A,*

$f(x)=1$ *на B,*

$0 \le f(x) \le 1$ *для всех других точек пространства E*».

Позже эта теорема получила название Леммы Урысона (ЛУ).

Известная топологам функция

$$f(x)=\inf\{r : x\in K_r\} \quad (3)$$

появилась только в процессе доказательства теоремы.

К удивлению читателя, знакомого с дальнейшим развитием топологии, этот результат остался без приложений и рассматривался как самоцель. Хотя проблема, поднятая Фреше, имела большое общее значение для теоретико-множественной топологии как математической дисциплины, само существование функции не давало никакого импульса конкретной математической проблеме.

В конце своей статьи в разделе «Дополнительные замечания» Урысон писал: «Теорема §25 имеет большое значение для проблемы метризации; я намерен в скором времени опубликовать работу, в которой я с помощью этой теоремы покажу, что *всякое нормальное пространство со счётной базой гомеоморфно метрическому пространству*» [4, с. 211, курсив Урысона].

Отметим эмоциональное примечание П.С. Александрова, сделанное много лет спустя и напечатанное в «Трудах» в 1951 году. Мы читаем: «По существу, в этих леммах уже содержится … ключ к доказательству метризационной теоремы» [4, с. 216, комментарий 6].

Статья [3] была закончена в августе 1924 года. Как можно прочитать в примечаниях Александрова к «Трудам» [4, с. 214–218], это было за три дня до трагической смерти Урысона.

Только во *второй* посмертной статье Урысона [5], где Лемма явно приведена и ещё раз доказана, была сформулирована теорема о метризуемости нормальных пространств со счётной базой и доказана хорошо известным способом с использованием функции Урысона. Эта вторая посмертная статья, как мы можем прочитать в примечаниях Александрова к статье в «Трудах», была почти полностью воссоздана Александровым (за исключением вступительного абзаца) по фрагментарным заметкам Урысона. Зная дальнейшие результаты Александрова в теоретико-множественной топологии, мы можем назвать его одним из творцов Леммы.

Теорема Лузина-Меньшова

В теории функции действительной переменной о *теореме Лузина-Меньшова* можно услышать или прочитать без отсылки к какой-либо конкретной работе. Это теорема о множестве точек плотности измеримых множеств на действительной прямой.

Чаще всего она (ТЛМ) приводится в такой форме: Если *F* совершенное подмножество измеримого подмножества *U*, состоящего исключительно из своих точек плотности, то существует совершенное множество *K*, заключённое между *F* и *U* так, что множество *F* содержится в подмножестве *K** множества *K*, состоящего из точек плотности *K*, то есть $F \subset K^* \subset K \subset U$. (4)

Напомним, что *p* есть точка плотности измеримого множества *A*, если отношение меры множества *A* на промежутках $[p-h, p+h]$ к длинам 2*h* этих промежутков стремится к 1 при *h*, стремящемся к нулю. По Лебегу почти все точки любого измеримого множества являются его точками плотности. Операция перехода от измеримого множества *A* к его измеримой внутренней части *A** имеет те же формальные свойства, что и операция перехода к внутренней области в топологическом смысле. Множества, состоящие исключительно из своих точек плотности, представляют аналогию с топологически открытыми множествами; назовём их множествами, открытыми по мере.

Топологически открытые множества являются открытыми по мере. Однако бывают множества, открытые по мере, не являющиеся топологически открытыми, например, множество иррациональных чисел. Далеко не всякое множество, замкнутое по мере, например, множество рациональных чисел, будет топологически замкнутым.

Только лет пятьдесят спустя эта топология с мерой (мерная топология, measure topology) вновь появилась в действительном анализе: см. C. Goffman and D. Waterman [6]. Её называют плотностной топологией (density topology).

Одноточечное множество можно использовать в роли *F* в (4). Таким образом, ТЛМ не утверждает нормальность топологии с мерой.

Мы не утверждаем, что Лузин и Меньшов имели в виду плотностную топологию. Пожалуй, оба математика были далеки от понимания топологического пространства как множества, снабжённого топологией.

Теорема была сформулирована, но – как мы предполагаем – осталась без доказательства. Доказательство было представлено Верой Богомоловой[3] в её статье 1924 года [7].

Богомолова писала, что «Теоремы I, II, III и IV были сначала доказаны Н.Н.

---

[3] Люстерник, вспоминая 1921 год, пишет о ней как об аспирантке Лузина из 2-го МГУ [24]. К сожалению, больше никаких сведений о ней найти не удалось – *примечание переводчика*.

Лузиным и Д.Е. Меньшовым. Не зная их метода, я получила несколько позже другое доказательство, которое я привожу в тексте» [7, с. 155]. Доказательство теоремы Лузина-Лузина-Меньшова, данное Богомоловой, далеко не очевидно.

Автор признателен Ивоне Кшеминьской (Krzemińska) [8], которая прочитала эту статью и поделилась с автором ценными комментариями.

Мотивация статьи Богомоловой выходит за пределы утверждения ТЛМ. Теорема в статье была сформулирована и доказана в особо специфической форме, позволяющей получить общий подход к детальным построениям известных в то время сингулярных всюду дифференцируемых функций; например, одна из них с плотно расположенным множеством интервалов постоянства была построена С. Мазуркевичем [9]. Как мы можем прочитать в [7], задача была поставлена Лузиным в связи с его недавним интересом к построениям А. Данжуа и его беседам с В. Серпинским в Москве в 1915-1918 годах.

С этой целью, в следующе части работы было получено соответствующее следствие. Вставляя промежуточные звенья в цепочку (4), Богомолова получила бесконечную цепочку включений:

$$F \subset \ldots \subset K_r^* \subset K_r \subset \ldots \subset U, \tag{5}$$

где r пробегает на [0, 1] двоичные дроби.

Тогда определена функция

$$f(x) = \inf \{ r : x \in K_r^* \}, \tag{6}$$

которая оказывается асимптотически непрерывной, что означает, что в каждой точке, являющейся точкой плотности измеримого множества, она на этом множестве непрерывна. – И. П. Натансон [10].

Таким образом, функция будет непрерывной в смысле топологии плотности. Будучи ограниченной, она является производной от своего неопределённого интеграла Лебега. Этот всюду дифференцируемый интеграл, в зависимости от специфики построения, является функцией Мазуркевича, то есть нигде ни монотонной всюду дифференцируемой функцией, которую Богомолова приписывала А. Данжуа.

Примечания

Факты. *Способы* построения функций, описанных Богомоловой и Урысоном, идентичны. Теорема Лузина-Меньшова (ТЛМ) является основой для идеи нормальности в исследованиях Урысона. Богомолова опубликовала результат *годом раньше*.

По поводу ТЛМ

Похоже, что ТЛМ стала известна математикам из устных сообщений и уже существовала как результат *до* статьи Богомоловой. Она использовалась как окончательный результат. Функция Богомоловой была её первым известным применением. Многие годы ТЛМ оставалась без развития.

Самые ранние цитирования этой теоремы, ныне известные автору, это статьи Исайи Максимова[4] и Зыгмунта Загорского[5] (Zahorski), вышедшие двадцать лет спустя. Хронологически первыми были статьи Максимова, посвящённые аппроксимативно непрерывным функциям. В силу известного результата статей Максимова, опубликованных в 1940 году в Казани [11], и в Тохоку (Tohoku) [12], область определения каждой функции Дарбу первого класса может быть перепараметризована с помощью автогомеоморфизма так, что функция станет аппроксимативно непрерывной; в частности, производной, если функция ограничена.

При этом использовалась теорема Лузина-Меньшова, вновь доказанная Максимовым. В одной из этих работ Максимова статья В. Богомоловой цитируется в сноске.

Работа Загорского [13], опубликованная в Тохоку, начинается с цитирования теоремы Лузина-Меньшова без какой-либо ссылки на источник. Загорский представил доказательство теоремы на пяти печатных страницах. Кажется, эта теорема была известна Загорскому только на слух, а её прежнее доказательство было ему недоступно. Теорема была применена для построения всюду дифференцируемой функции на данном множестве G_δ меры ноль, где производная бесконечна, и решалась проблема, поставленная Войтехом Ярником (Jarnik) в 1933 году в Тохоку. На статью Богомоловой ссылки нет. Тем не менее, в том же году Загорский опубликовал в Математическом сборнике работу [14], где вновь обсуждалась Теорема Лузина-

[4] Максимов Исайя Максимович (1889-1965), учился в Казани и в Москве, работал в Чувашском Госпединституте. Был аспирантом Лузина одновременно с В. Богомоловой. Основные работы: «Аналитическое решение некоторых вопросов теории чисел», книга «Теория двучленных сравнений с простым модулем и первообразных корней», кандидатская диссертация «О непрерывных преобразованиях функций». Занимался вопросами трансфинитного анализа, является автором понятия трансфинитного пространства – *примечание переводчика*.

[5] Зыгмунд Загорский (1914-1998), польский математик, получил математическое образование в Варшаве, работал во Львове с Банахом, затем в Лодзи. Основные работы в области действительного и комплексного анализа и тригонометрических рядов – *примечание переводчика*.

Меньшова и в сноске есть примечание, что Богомолова – автор доказательства. Две эти работы Загорского были отправлены из Львова до июня 1941 года и были получены в Тохоку и в сборнике в июле того же года. Его интерес к сингулярным производным возник в Варшаве за несколько лет до Второй мировой войны.

Детальную связь со статьёй Богомоловой [7] мы находим только в особняком стоящей статье 1976 года Каплана и Слободника [15], в которой была вновь сформулирована и доказана теорема Лузина-Меньшова и в качестве следствия указана функция Богомоловой (6). В ней обсуждаются результаты статьи Загорского [13] и выводятся новые следствия из ТЛМ о непостоянных всюду дифференцируемых функциях, производные которых равны нулю на плотном множестве точек.

Функция Мазуркевича была одной из многих функций такого типа сингулярности. Первым был А. Кёпке (Koepcke,1889), который построил всюду дифференцируемую нигде немонотонную функцию (которую Богомолова приписывала Данжуа). В 1907 году Д. Помпейю построил строго возрастающую функцию, у которой всюду существующая производная была равна нулю на плотном множестве точек. Интерес к таким функциям был вызван теорией интеграла. Производные этих функций не интегрируемы по Риману, что показывало недостаточность интеграла Римана для восстановления функций по производной. Классические построения делались в соответствии с индивидуальными методами.

Работа Загорского [13] инициировала метод перепараметризации областей функций ограниченной вариации с помощью гомеоморфизмов, построенных им с использованием теоремы Лузина-Меньшова, благодаря чему эти функции становились всюду дифференцируемыми. Более подробно это было сделано в 1950 году Загорским в его работе [16], где развит гораздо более общий подход к функции Богомоловой (однако без каких-либо ссылок на [7]). Например, функция Мазуркевича может быть получена путём перепараметризации области хорошо известной функции лестницы Кантора-Лебега. Этот подход Загорского был обобщён как процедура А. Брукнером (Bruckner) в книге 1970 года [17]. В этой книге дано современное доказательство ТЛМ, однако, без комментариев по поводу происхождения теоремы.

С одной стороны, мы видим большое математическое значение результатов, основанных на ТЛМ, а с другой стороны их изящество как произведений математического искусства. Теория функций действительной переменной, в частности, тонкие результаты, проливающие свет на природу первой производной, никогда не претендовали на ведущую роль в математике.

Тем не менее, вопросы, касающиеся производных и ТЛМ, одни из наиболее тонких в теоретико-множественной математике.

Последующие обсуждения теоремы привели к интересным обобщениям.

По поводу Леммы Урысона

Судьба родственного результата, называемого Леммой Урысона, была совсем иной.

Невозможно представить себе теоретико-множественную топологию, о которой рассуждал Титце (Tietze) в своей статье 1923 года, без непостоянных непрерывных функций действительной переменной, связывающих её с пространствами геометрической природы. Хотя и форма функции Урысона не менее важна. Лемма применима в разнообразных ситуациях, соединяющих теоретико-множественную топологию с геометрией. Во второй посмертной статье Урысона [5], подготовленный к изданию Александровым, Лемма была применена в доказательстве теоремы о метризации нормальных пространств со счетной базой. Целью этой статьи не является описание других известных теорем о метризации нормальных пространств при более слабых предположениях, в доказательствах которых Лемма Урысона играет ключевую роль. Напомним только метод отображений в нервы открытых покрытий, как инструмент для аппроксимации пространств многогранниками, применим в теории размерности Лебега.

Согласно примечаниям П.С. Александрова в «Трудах» [4, с. 214-218], Урысон представил свои результаты в Московском математическом обществе в мае 1924 года. Статья Богомоловой к этому времени была напечатана в Математическом сборнике, так как она была принята к печати 25 мая 1925 года. Таким образом, трудно объяснить отсутствие ссылок на Богомолову в статье Урысона. Можем ли мы принять в качестве оправдания, что в июне 1923 оба ПС-а[6] отправились в Геттинген – см. книгу [18] М. Бечваровой (Becvarova) и И. Нетука (Netuka) – и были, наверное, далеки от московских событий.

[6] Двое друзей, П.С. Александров и П.С. Урысон, имели в Лузитании прозвище ПС-ы – *примечание переводчика*.

Глядя на статью Богомоловой [7], мы видим, что ее суть заключается в доказательстве (5). Именно этот результат последующие авторы назвали Теоремой Лузина-Меньшова. Функция (6) воспринималась как естественное следствие. Таким образом, Лемма Урысона заимствовала из Теоремы Лузина-Меньшова не очень много, а именно стимул для понимания нормальности в форме (1). Как бы то ни было, мы ценим значение таких тонких стимулов. Более того, со стороны Урысона такой красивый жест был бы вполне уместен.

Глядя на последующие работы 30-х годов, мы наблюдаем удивительное молчание по поводу Леммы Урысона в публикациях Александрова. В первом томе Топологии, написанной вместе с Хайнцем Хопфом (Heinz Hopf) в 1935 году, отсутствует ссылка на Урысона, хотя сама Лемма сформулирована и применяется. В математических биографиях Александрова и Урысона ничего не рассказано о событиях, связанных с открытием этого столь важного результата теоретико-множественной топологии, чего не скажешь о комментариях к результатам Урысона по теории размерности.

Ситуация выглядит совсем иной в учебниках Александрова, написанных много лет спустя [19] 1948 года и [20] 1970 года. Новая формулировка нормальности (1) уже называется «Малой Леммой Урысона», а формула – «Большой Леммой Урысона». Можем ли мы объяснить это изменение результатом переоценки Леммы Урысона в свете бурного развития в то время дисциплины, называемой *общей топологией*?

За пределами математики

Автор не вправе обсуждать нематематические причины отсутствия ссылок на ТЛМ в работах Урысона. Возможно, Урысон и Александров просто забыли про Богомолову и даже саму ТЛМ. Это может быть подтверждено тем фактом, что спустя много лет Александров не смог увидеть ТЛМ в «Малой Лемме Урысона». Возможно, он никогда не интересовался теоретическими проблемами меры.

Однако отсутствие ссылок может быть вызвано холодностью в отношениях Урысона и

Александрова с их родным центром в Москве. В случае Александрова мы можем просто указать на конфликт с Лузиным, начавшийся около 1918 года вокруг аналитических множеств, открытых Суслиным.

Эти события происходили в годы падения знаменитой Лузитании, группы молодых математиков, окружавших Лузина с тех пор, как в 1920 году закончилась Гражданская война. Год за годом молодые математики, к которым принадлежали ПС-ы, утверждали свою независимость в выборе проблематики. Это было великое поражение Лузина, вызванное его трудным характером. Процитируем слова Александрова, сказанные много лет спустя: «Причиной трагической судьбы Лузина была его личность, сосредоточенная на себе, его отчужденность, его нелёгкая, даже для учеников, запутанная психология».

В конце 1920-х годов математические события в Москве влились в поток событий, источник которых лежал за пределами чисто математической жизни. Всё началось с общего плана реорганизации Академии наук. Лузин был удалён с философского отделения Академии. Хотя у этого решения и были политические причины, но, как мы знаем, даже Дмитрий Егоров, отечески заботливый близкий друг Лузина, не смог его поддержать.

Травля – труднопереводимое русское слово – вокруг Лузина достигла апогея в середине 30-х годов, когда в печати появилось много анонимных обвинений, в том числе на слабые докторские диссертации, написанные под руководством Лузина. Хотя Лузин не разделить судьбу Егорова, который был сослан в Казань, где и умер, события выбросили Лузина из активной математической жизни. Эти обвинения исходили не из математического сообщества. Похоже, что математическое сообщество было вовлечено в это дело против собственной воли. События были тщательно описаны А.П. Юшкевичем в широком политическом контексте [21]. Недавно были опубликованы материалы с заседаний комиссии Академии, рассматривающей так называемое «Дело Лузина» [22].

Из опубликованного списка учеников Лузина только Богомолова прекратила математические исследования, опубликовав лишь одну работу, а именно свою докторскую диссертацию. Эта диссертация имела значительную математическую ценность, так что нет никаких оснований полагать, что она была одной из «слабых докторских диссертаций», написанных под руководством Лузина. Как бы то ни было, Богомолова находится в списке учеников Лузина (доступном в Google) без каких-либо персональных данных, как несуществующий человек. В томе «Математика в СССР за сорок лет» [23] упоминается статья Богомоловой, но в именном указателе её имя отсутствует. Она также не упомянута среди учеников Лузина в его биографии, написанной Ниной Бари к его книге «Интеграл и тригонометрический ряд» в 1951 году. Но есть и более интригующий факт, а именно, что в этой биографии, как и в других биографических статьях о Н. Н. Лузине, теорема Лузина-Меньшова нигде не отмечена как вклад Лузина в математику. Именно парижская работа Лузина 1912 года, посвящённая аппроксимативно непрерывным функциям, цитируется в разделах руководств по теории функций действительной переменной.

Естественно спросить, почему упомянутые здесь факты были так долго безразличны математическому сообществу? ЛУ была так знаменита и ТЛМ до последних десятилетий усиленно разрабатывалась в реальном анализе. Безразличие к ЛУ можно объяснить тем, что Лемма Урысона прославилась только после доведения концепции общей топологии до её апогея в приложениях в 1960-е годы. Молчание, окружающее ТЛМ в реальном анализе, так просто не объяснить. Его можно объяснить тем фактом, что поколение математиков 1920-1940 годов знали реальные факты, рассматривая их как свою собственность.

Но как объяснить молчание математиков следующих поколений? Несколько легче понять молчание в Москве. Московские математики, невольно вовлечённые в 1930-е годы в политический конфликт, не были заинтересованы вновь обсуждать в такой опасной ситуации ещё одну математическую загадку, которая, как мы считаем, имеет чисто математически характер.

Литература.

1. Mioduszewski J. Lemat Urysohna czy twierdzenie £uzina–Mieñszowa? / J. Mioduszewski // Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. – Seria Matematyka–Fizyka – 1996. – Z. 76 – S. 141–150.
2. Tietze H. Beitrage zur allgemeine Topologie I. Axiome fur verschiedene Fassungen der Umgebungsbegriff / H. Tietze // Mathematische Annalen. – 1923. – 88. – S. 290–312.
3. Urysohn P. Uber die Machtigkeit der zusammenhangenden Menge / P. Urysohn // Mathematische Annalen. – 1925. – 94. – S. 262–295. – См. также [5, т.1, с. 177–218].
4. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики / П.С. Урысон. М. – Л. ГИТТЛ. – 1951. – Т. I. – С. 1-514, Т. II. – С. 515–992.

5. Urysohn P. Zur metrizationsproblem / P. Urysohn. Mathematische Annalen. – 1925. – 94. – S. 309–315. См. также [5, т. II, с. 740–746].
6. Goffman C. On approximately continuous transformations / C/ Goffman, D. Waterman // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1961. – 12. – P. 116–121.
7. Богомолова В.С. Об одном классе функций всюду асимптотически непрерывных / В.С. Богомолова // Математический сборник. М. – 1924. – Т. 32. – С.152–171.
8. Krzemińska I. Osobliwości funkcji różniczkowalnych / I. Krzemińska // Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Seria Matematyki. – 1994. – Z. 13. – S. 27–42.
9. Mazurkiewicz S. Konstrukcja funkcji rózniczkowalnej mającej wszędzie gęsty zbiór przedziałów stałości / S. Mazurkiewicz // Prace Matematyczno-Fizyczne. – 1916. – S. 193–201.
10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. Москва: Наука. – 1974 г. – 480 с.
11. Максимов И.Н. О преобразовании некоторых функций в асимптотически непрерывные / И.Н. Максимов // Известия физико-математического общества и Научно-исследовательского института математики и механики при Казанском университете им. В.И. Ульянова-Ленина. – 1940 г. – Т. XII. – Сер. В. – С. 9–41.
12. Maximoff J. On density points and approximately continuous functions / J. Maximoff // Tohoku Mathematical Journal. – 1940. – Vol. 47. – P. 237–250.
13. Zahorski Z. Uber die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich ist / Z. Zahorski // Tohoku Mathematical Journal. – 1941. – P. 321–330.
14. Загорский З.С. О множестве точек недифференцируемости непрерывной функции / З.С. Загорский // Математический сборник. – 1941 г. – 9(51). – Ч. 3. – С. 487–510.
15. Каплан Л.И. Монотонные преобразования и дифференциальные свойства функций / Л.И. Каплан, С.Г. Слободник // Математические заметки. – 1977 г. – Т. 22. - №6. – С.859 – 871.
16. Zahorski Z. Sur la première dérivée / Z. Zahorski // Transactions of the American Mathematical Society. – 1950. – 69. – P. 1–54.
17. Bruckner A. Differentiation of Real Functions / A. Bruckner // Transactions of American Mathematical Society. Centre de recherches Mathématiques. Monograph Series. – 1994. – V.5.
18. Bečvářová M. Jarnik`s Notes of the Lecture Course "Punktmengen und Reelle Funktionen" by P.S. Aleksandroff (Göttingen 1928) / M. Bečvářová, I. Netuka. – Prague.: Matfyzpress. – 2010. – 144 S.

19. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций / П.С. Александров. М. – Л.: ОГИЗ. – 1948 г. – 413 с.
20. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука. – 1977 г. – 368 с.
21. Юшкевич А.П. «Дело академика Лузина» / А.П. Юшкевич // Вестник АН СССР. – 1989 г. – 4. – С. 102–113.
22. Дело академика Лузина. Стенограммы заседаний / Под ред. Демидова С. С., Левшина Б. В. – СПб.: РХГИ. – 1999 г. – 368 с.
23. Математика в СССР за сорок лет 1917 – 1957 // Под ред. А.Г. Куроша. Физматгиз – 1959 г. – Тт. 1, 2. – 1000+821 с.
24. Люстерник Д.А. Молодость Московской математической школы. Электронный ресурс: http://modernproblems.org.ru/memo/224-memoirs.html Дата обращения 23.06.2014