Г. И. СИНКЕВИЧ

ВАЦЛАВ СЕРПИНСКИЙ И СОЗДАНИЕ ВАРШАВСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ТЕОРИИ МЕРЫ

Уроженец русской Польши и выпускник Варшавского университета, В. Серпинский в 1910-х гг. стал крупным специалистом в области теории множеств, а после обретения Польшей независимости в 1918 г. – и отцом-основателем польской математической школы, которая начала складываться в 1920-х гг. вокруг журнала *Fundamenta Mathematicae*. В статье рассмотрены жизненные пути и вклад в науку самого Серпинского и его наиболее известных учеников и ряд особенностей польской математической науки в период между двумя мировыми войнами.

Ключевые слова: В. Серпинский, теория множеств, теория меры, польская математическая школа.

Во второй половине XIX в. в математике произошли серьезные изменения, связанные с созданием Г. Кантором теории множеств и повлекшие становление новых подходов к теории функций и математическому анализу, более строгое упорядочение определений и теорем, расширение понятия функции и разработку новых, более тонких методов работы с функциями. Следствием этих перемен стали, в частности, работы математиков французской школы Р. Бэра, Э. Бореля, А. Лебега и А. Данжуа по созданию теории меры и теории категорий. Важный вклад в эту область внесла московская школа теории функций в лице Д. Е. Егорова и Н. Н. Лузина. Математический мир менялся, появилось широкое поле для новаторской деятельности, в математике были нужны свежие идеи на новой основе – теории множеств и теории меры. После Первой мировой войны в объединенной Польше возникла сильная математическая школа, отвечавшая этим требованиям, а лидером этой школы был Вацлав Серпинский (1882–1969).

Вацлав Серпинский: научный портрет на фоне эпохи

До 1918 г. территория Польши была разделена между тремя государствами – Австро-Венгрией, Россией и Пруссией, отношение к польской науке в которых было различным. Исторически польская научная традиция была богаче в австро-венгерской части. В Кракове, статус и государственная принадлежность которого в течение XIX в. неоднократно менялись, университет существовал с начала XV в., преподавание в нем велось на польском языке. Во Львове, бывшем частью империи с 1772 по 1918 г., университет функционировал с XVII в., лекции здесь читались в том числе и по-польски. Существовали академии, научные общества с многовековой историей. Их деятельности не чинилось никаких препятствий.

Прусская часть Польши с центром в Познани (нем. Позен) была германизирована. Развитие наук здесь не поощрялось.

Русская часть – с 1815 г. Царство Польское с центром в Варшаве – русифицировалась. Единственный здесь Варшавский университет неоднократно закрывался в связи с национальными восстаниями, студенческими волнениями, бойкотом со стороны польских студентов. Преподавание в нем велось на русском языке, большинство преподавателей было из России. Среди них встречались интересные, талантливые педагоги, такие как Д. Д. Мордухай-Болтовской, Н. Я. Сонин, Н. Н. Зинин-младший, В. А. Анисимов, Г. Ф. Вороной[1]. Там же преподавал право чрезвычайно популярный у студентов А. Л. Блок, отец поэта А. А. Блока.

Вацлав Серпинский, будущий основатель варшавской школы теории множеств и теории меры, был выпускником именно этого университета. Он родился в семье врача, после гимназии выбрал в качестве специальности математику и стал студентом в 1900 г. Его первая научная работа, удостоенная золотой медали, была посвящена теории чисел. Этой темой его заинтересовал Вороной. Благодаря ему Серпинский на всю жизнь сохранил в исследованиях «петербургский» стиль – четкую, инженерную постановку задачи, подробное, «алгоритмически» обоснованное решение, конкретный результат, удобный для дальнейшего применения. Среди отличных оценок Серпинского только одна была плохой – русский язык. Польские студенты намеренно бойкотировали этот предмет. После окончания университета в 1904 г. Серпинский работал в гимназии, но принял участие в забастовке, участники которой требовали введения преподавания на польском языке, и был уволен. Он переехал в Краков и в 1907 г. защитил в Ягеллонском университете диссертацию по теории чисел. В 1908 г. Серпинский принял австро-венгерское подданство и был приглашен во Львов для работы в университете.

Еще в 1907 г. он не знал о существовании теории множеств, но высказал предположение о том, что положение точки на плоскости может быть определено с помощью одного лишь действительного числа. Он написал об этом своему коллеге Т. Банахевичу, слушателю Гёттингенского университета. Тот телеграфировал ему только одно слово: «Кантор», затем прислал литературу. С этого и началось изучение Серпинским теории множеств. С 1909 г. он уже читал в университете курс по этой специальности, один из первых самостоятельных курсов в Европе (в Московском университете теорию множеств с 1907 г. читал И. И. Жегалкин, но как фрагмент курса). Серпинский был прекрасным лектором и нашел понимание у студентов. Среди его слушателей были О. Никодим и С. Рузевич.

В то время число польских математиков, занимавшихся наукой, было незначительным. Научным потенциалом обладали те из них, которые обучались за рубежом (К. Жоравский и С. Заремба). Польское математическое общество

[1] Отметим с сожалением, что в 2007 г. был отрицательно решен вопрос об открытии на здании Варшавского университета мемориальной доски, посвященной Г. Ф. Вороному.

возникло в 1917 г. и состояло из 16 человек. Не было общей тематики, а следовательно и обсуждений, научного взаимопонимания, общей атмосферы. Занятия теорией множеств, особенно ее основами, привели Серпинского к убеждению, что это и есть общий фундамент современной ему математики.

Изображение В. Серпинского на юбилейной медали в честь двадцатилетия его работы на посту президента Варшавского научного общества, 1952 г.

В 1907 г. он познакомился с молодым студентом-математиком З. Янишевским (1888–1920)[2] и через несколько лет, в 1911 г., пригласил его к себе во Львов на должность ассистента. Через Янишевского Серпинский познакомился с еще одним молодым математиком, С. Мазуркевичем[3], и предложил ему исследовательскую тему в области теории множеств, которая была закончена в 1913 г. Содружество Серпинского, Мазуркевича и Янишевского не ограничивалось научными изысканиями. С первых своих встреч они обсуждали необходимость реорганизации науки в стране, возможность создания группы математиков, объединенных одной целью.

Но начавшаяся Первая мировая война помешала их планам. Серпинский гостил у родственников жены на территории Российской империи в Белоруссии и как подданный Австро-Венгрии был интернирован и отправлен в Вятку. Благодаря хлопотам московских математиков, прежде всего Б. К. Млодзиевского, его перевели в Москву, где он пробыл до начала 1918 г. Серпинский не чувствовал себя в Москве пленником. В московские годы он написал двухтомный «Анализ», ставший впоследствии основным учебником в возрожденном Варшавском университете. Занимаясь теорией множеств, он нашел единомышленников в Московском университете, принимал участие в работе семинара Егорова по теории функций, стал сотрудничать с Лузиным. Вместе с последним им написаны восемь статей по дескриптивной теории множеств. Влияние московской школы чувствуется в последующих работах Серпинского – и в проблематике, и в стиле, и в строгости доказательств. Вот как писал об этом Лузин:

> В 1916–1918 гг. Суслин, В. Серпинский и я, стремясь выполнить предложенную Лебегом программу изучения наиболее общих множеств, которые можно назвать, пришли к изучению нового класса точечных множеств,

---

[2] Зыгмунд Янишевский (1888–1920) обучался в Цюрихе, Гёттингене и Париже, где под руководством Лебега написал диссертацию «О неприводимых континуумах, заключенных между двумя точками», защитив ее в 1913 г.

[3] Стефан Мазуркевич (1888–1945) учился в Мюнхенском, Гёттингенском и Львовском университетах. Основные работы по топологии, математическому анализу и теории вероятностей.

заведомо выходящего за границы класса множеств, измеримых B, и, однако, образованного из множеств, которые можно определить без всяких трансфинитных чисел. Ввиду тесной связи между этими множествами и рядами полиномов они получили название аналитических множеств согласно предложению Лебега [4].

Упрощенное доказательство основной теоремы Суслина об A-множествах в 1918 г. дано Лузиным и Серпинским в их совместной работе «О некоторых свойствах A-множеств». Доказательство основано на разложении множества, дополнительного к A-множеству, на сумму $\aleph_1$ множеств, измеримых B.

Совместная работа Серпинского и Лузина была плодотворна для обоих – ими написано восемь общих статей. Серпинскому же эта работа, кроме всего прочего, помогла найти свой научный стиль [5]. Они надолго сохранили дружеские отношения. Как редактор польского математического журнала Серпинский в трудные для России годы публиковал статьи Лузина и его коллег, он вступился за него в период травли в 1936 г. Но методологически их пути разошлись еще в московские годы.

Серпинский принимал аксиому выбора и видел в ней полезный метод. В 1917 г. он сделал в Московском математическом обществе доклад «Аксиома выбора и ее роль в анализе и теории функций» [6], в котором систематизировал проблемы меры и измеримости по их зависимости от аксиомы Цермело. Впоследствии он уделял много внимания зависимости утверждений от аксиомы выбора и гипотезы континуума, в начале каждой работы оговаривая наличие или отсутствие этой связи. Многие из упомянутых проблем в дальнейшем стали темами новых исследований Серпинского и его учеников. Это и проблема инвариантности свойств измеримости, непрерывности и свойства Бэра, и связь аксиомы выбора с гипотезой континуума, и исследование множества Лузина.

В 1918 г. в статье «Аксиоматическое определение B-измеримых множеств» [7] Серпинский предложил новый прием в доказательстве существования, названный Лузиным принципом минимума. Этот прием, сочетавший классическое основание с аксиомой Цермело и трансфинитными числами, впоследствии использовали ученики Серпинского.

Еще одной его плодотворной находкой было установление двойственности между мерой и категорией. Известно много теорем о множестве первой категории, которые остаются верными для множеств меры нуль и обратно. В то же время доказательства для первых значительно сложнее. Серпинский

---

[4] *Лузин Н. Н.* Собрание сочинений: в 3 т. М., 1958. Т. 2. С. 27. История открытия и наименования аналитических множеств сложна и драматична, см.: Тихомиров В. М. Рождение московской математической школы и Франция // Историко-математические исследования. М., 2005. Вторая серия. Вып. 9 (44). С. 238–252.

[5] См., например: *Sinkiewicz, G.* O wspólpracy Wacława Sierpińskiego z Mikołajem Łuzinem // Kwartalnik historii nauki i techniki. 1995. № 1. S. 41–58; *Синкевич Г. И.* Влияние петербургской и московской математических школ на творчество В. Серпинского // Наука и техника: вопросы истории и теории. Материалы XXIV годичной конференции Санкт-Петербургского отделения Российского национального комитета по истории и философии науки и техники «Санкт-Петербург и мировая наука», 23–27 июня 2003 г. СПб., 2003. Вып. 19. С. 212–215.

[6] *Sierpiński, W.* Oeuvres choisies. T. 1–3. Warszawa, 1975. T. 2. S. 208–255.

[7] Там же. S. 187–191.

высказал гипотезу (которую впоследствии доказал) о существовании взаимно-однозначного соответствия между ними, что позволяло значительно упрощать построения [8]. Таким образом, в 1918 г. Серпинский возвращался на родину с хорошими методологическими наработками.

В Польше он получил кафедру в Варшавском университете, где снова встретил Янишевского и Мазуркевича, которые были там профессорами. Они вновь вернулись к обсуждению вопроса об организации научной деятельности в новом государстве. Польские математики работали разрозненно, финансирование науки было скромным, так что нужно было найти единое направление, позволяющее их объединить и не требующее больших затрат на переподготовку и организацию.

В 1918 г. благотворительный научный фонд «Касса Мяновского» – крупнейший в Польше – разослал математикам анкету с вопросом, как способствовать развитию математики в стране. В ответ в 1919 г. Янишевский опубликовал статью «О потребностях математики в Польше» [9]. Главной задачей он считал создание специального журнала, посвященного единой теме – теории множеств, которой в Польше начинали заниматься многие математики и которая обещала как теоретические, так и прикладные результаты. Журнал должен был публиковать статьи на международных языках – французском, немецком, английском – для того, чтобы его читали в Европе. Сплочение математиков в работе над единой темой позволило бы создать атмосферу совместного научного творчества, общение стимулировало бы интерес к коллективным исследованиям. Янишевский писал:

> Вернемся к вопросу о математическом творчестве. Соответствующую атмосферу могут создать лишь занятия общими темами. Сотрудники исследователю почти необходимы. В обособлении он чаще всего угасает. Причины этого не только психологического характера, это также недостаток побудительных мотивов. Обособленный ученый знает намного меньше тех, кто работает совместно. До него доходят только итоги исследования, уже созревшие, оформленные идеи, зачастую по прошествии нескольких лет после их возникновения, когда они уже опубликованы. Он не знает, каким образом и из чего они возникли, не переживая этого процесса вместе с их созидателями [10].

Идея Янишевского была реализована годом позже, когда в 1920 г. увидел свет первый номер нового польского математического журнала *Fundamenta Mathematicae*. Его основным профилем стали теория множеств и ее приложения к геометрии (топологии), теория функций и анализ. По замыслу авторов проекта первый номер был составлен из статей только польских авторов, чтобы продемонстрировать всему миру наличие в Польше сильной группы математиков, способных взять на себя ответственность за организацию и ведение периодического издания определенного профиля. Он был издан на французском языке и включал 14 статей Серпинского, а также статьи Мазуркевича,

---

[8] См., например: *Синкевич Г. И.* Открытие В. Серпинским двойственности между мерой и категорией // Историко-математические исследования. М., 1986. Вып. 30. С. 113–123.

[9] *Janiszewski, Z.* O potrzebach matematyki w Polsce // Nauka Polska. 1919. T. 1. S. 15–18.

[10] Там же. S. 18.

Куратовского [11], Вилкоша, Банаха, Рузевича, Янишевского и Штейнгауса. Но в дальнейшем, как и предполагалось изначально, *Fundamenta Mathematicae* функционировал как международный журнал – большинство статей были на французском, а также на немецком, английском и итальянском языках. С 1920 по 1939 г. вышли 32 номера, где были напечатаны 972 работы 216 авторов. Среди иностранных авторов журнала были Н. Н. Лузин, П. С. Александров, Э. Борель, А. Лебег, А. Данжуа, Ф. Хаусдорф и другие. В трудные для России послереволюционные годы этот журнал охотно предоставлял свои страницы для публикаций российским математикам.

Редакторской находкой было создание раздела «Проблемы». В нем авторы ставили теоретические вопросы, на которые сами искали ответы. Интерес к этому разделу проявляли как заслуженные математики, так и молодежь, благодаря ему возникал научный диалог. Иногда ответ в виде соответствующей статьи появлялся уже в следующем номере, но некоторые проблемы требовали долгой работы. Среди рассматриваемых вопросов были возможность упорядочивания основ теории меры в зависимости от гипотезы континуума и аксиомы выбора; расширение меры в связи с включением в объекты исследования более общих и специальных видов пространств; измеримые множества и измеримые функции, их связи со свойством Бэра; определение меры различных множеств; возможности пренебрежения различными видами множеств. Многие из них определили тематику Варшавской школы. Таким образом Серпинский и Янишевский формировали у молодых математиков интерес к настойчивому поиску новых решений, делились идеями, стимулировали коллективное сотрудничество в русле новых идей, воспитывали определенный стиль мышления.

После смерти Янишевского в 1920 г. руководство журналом перешло к Мазуркевичу и Серпинскому. А в 1921 г. последний был избран деканом философского факультета Варшавского университета и членом Польской академии знаний (членом-корреспондентом которой он был с 1918 г.). Эти события способствовали увеличению числа его учеников: как отмечал Куратовский, «трудно найти польских математиков, не связанных непосредственно или опосредовано с профессором Серпинским» [12], а Лузин, оценивая педагогический талант Серпинского, в 1926 г. писал Данжуа:

> Г-н Серпинский – замечательный научный руководитель. Он постоянно находится в тесном контакте со своими учениками, с которыми у него наилучшие отношения и которые исключительно ценят его. Он направляет их научные идеи, дает темы для их работ, смело печатает последние и заботится обо всем, даже о материальном положении своих учеников [13].

---

[11] Казимеж Куратовский (1896–1980) получил образование в университете Глазго (Шотландия). С 1915 по 1927 г. работал в Варшаве, с 1927 по 1934 г. был профессором Львовского политехнического института. После 1934 г. – профессор Варшавского университета, с 1948 г. – директор Института математики, с 1952 г. – член Польской академии наук, в 1957 г. стал ее вице-председателем. В течение многих лет он был редактором журналов *Biuletyn PAN*, *Fundamenta mathematicae* и серии *Monografii matematyczne*. О его математических работах см. ниже.

[12] *Kuratowski, K.* Waciaw Sierpiński // Nauka Polska. 1956. T. 4. № 1 (13). S. 70.

[13] Письма Н. Н. Лузина к А. Данжуа / Публикация, введение и примечания П. Дюгака // Историко-математические исследования. М., 1978. Вып. 23. С. 314–348.

С 1921 г. Серпинский один или с коллегами начал руководить диссертациями будущих профессоров К. Куратовского (Варшавский университет), К. Заранкевича (Варшавский политехнический институт), Б. Кнастера (университет и политехнический институт во Вроцлаве), А. Тарского (Калифорнийский университет, Беркли, США), А. Зыгмунда (Чикагский университет). Серпинский принимает большое участие в работах С. Сакса. Формально руководителем последнего был Мазуркевич, но фактически и Мазуркевич, и Серпинский руководили коллегиально. В 1922 г. Сакс защитил диссертацию «К исследованию теории поверхностей и плоских областей». Среди других учеников Серпинского – Рузевич, Никодим, Линденбаум, Марчевский.

Рассмотрим, что нового было в работах учеников Серпинского – Куратовского, Марчевского и Никодима – в области теории множеств и теории меры.

Работы К. Куратовского

Большинство работ Казимежа Куратовского относятся к топологии – общая аксиоматика топологических пространств, топология плоскости, топология континуумов. Куратовскому также принадлежит развитие понятий плотности множеств, пеановских континуумов, а также исследования по теории графов.

Во время работы в Варшаве с 1915 по 1927 г. он находился по сильным влиянием Янишевского, положившего начало исследованиям по топологии континуумов, которые Куратовский продолжил в первых номерах журнала *Fundamenta mathematicae*. Там же он опубликовал свою работу «Об операции Ā», в которой впервые дал определение важнейшего класса топологических пространств T_1, инвариантное в терминах замыкания. Совместно с Серпинским опубликовал работу по бикомпактности.

В период работы во Львове (1927–1934) Куратовский заинтересовался научными исследованиями Банаха. В это время он работал над первым томом своей «Топологии», в который включил некоторые проблемы теории функций. Этой же темой интересовался и Банах. В 1930 г. в шестнадцатом номере *Fundamenta mathematicae* оказались рядом работы Куратовского и Банаха о понятии категории и о свойстве Бэра в метрических пространствах, а в следующем семнадцатом – о теории функций, измеримых по Лебегу, аргументы и значения которых пробегают метрическое пространство. В своей совместной публикации 1929 г. «К обобщению проблемы меры» [14] Банах и Куратовский доказали важную теорему об общей проблеме меры.

История вопроса такова. В 1904 г. Лебег назвал проблемой меры следующую проблему: определить такую функцию, которая ставит в соответствие любому множеству на единичном интервале такое неотрицательное число, что для равных множеств равны значения функции; для конечной или бесконечной последовательности непересекающихся множеств функция суммы этих множеств равна сумме значений функции от каждого множества; значение функции единичного интервала равно единице.

---

[14] *Banach, S., Kuratowski, K.* Sur une généralisation du problème de la mesure // Fundamenta Mathematicae. 1929. T. 14. P. 127–131.

Витали в 1905 г. доказал, что эта проблема не имеет решения, если не ослаблять указанные условия. Следуя этой идее, Банах и Куратовский в допущении гипотезы континуума доказали, что не будет иметь решения и более общая проблема, которая получается заменой первого условия тем, что значение функции в точке равно нулю. Таким образом, их теорема утверждает, что не существует никакой нетождественной нулю и вполне аддитивной функции, которая ставила бы в соответствие каждому множеству единичного интервала действительное число и была бы равна нулю для множества, состоящего из одной точки.

Вклад Э. Марчевского в развитие теории множеств в Польше

Эдвард Марчевский (1907–1976) (до 1940 г. он носил фамилию Шпильрайн) был учеником и соратником Серпинского и тоже принадлежал к Варшавской школе. В 1925 г. он поступил в Варшавский университет, где в 1932 г. под руководством Серпинского защитил докторскую диссертацию. До войны жил в Варшаве, после нее работал во Вроцлавском университете, был профессором и ректором, затем профессором Математического института Польской академии наук.

Марчевский опубликовал несколько десятков работ по теории функций действительной переменной, теории меры, топологии и теории вероятностей. Многие из них посвящены связи между понятиями меры, размерности и категории. Он нашел зависимость между p-мерной мерой и топологической размерностью (то есть размерностью по Урысону), исследовал сходство и различие между σ-полями измеримых множеств и множествами со свойством Бэра. Ввел такие новые понятия, как абсолютно измеримые множества, компактная мера, независимость в общих алгебрах. В 1947 г. основал и редактировал журнал *Colloquium Mathematicum*. Ему же принадлежат и исторические исследования, в том числе монография «Развитие математики в Польше» [15].

Тематика работ Марчевского была обусловлена исследованиями Варшавской математической школы в целом и ее научного руководителя Серпинского в особенности. В своих работах Марчевский совмещал методы теории множеств, топологии и теории функций. Самое значительное его открытие – связь между мерой и размерностью.

В 1918 г. Ф. Хаусдорф предложил определить с помощью понятия меры понятие «метрической размерности» как числа измерений [16]. Класс всех множеств n-мерной конечной меры рассматривался как класс множеств «не более чем n-мерных». Но эта идея не была развита, а понятие размерности было определено топологическим путем Урысоном и независимо от него К. Менгером. Связь между понятиями меры и размерности перестала быть явной: первое было понятием метрическим, а второе – топологическим.

---

[15] *Marczewski, E.* Rozwój matematyki w Polsce. Kraków, 1948.

[16] *Hausdorff, F.* Dimension und äusseres Mass // Mathematischen Annalen. 1919. Bd. 79. S. 157–179.

Опираясь на результат Л. С. Понтрягина и Л. Г. Шнирельмана [17], Марчевский доказал в работе в 1937 г. «Размерность и мера» [18], что необходимым и достаточным условием того, чтобы сепарабельное пространство (множество) было топологически не более чем n-мерным, является его гомеоморфность с множеством, имеющим $(n + 1)$-мерную меру, равную нулю.

Работы Серпинского по исследованию двойственности между мерой и категорией привели Марчевского к мысли о возможности таких аналогий в частных случаях.

Вопрос о существовании совершенного продолжения был исследован Марчевским в 1935 г. в статье «О расширении меры Лебега» [19].

Развивая принцип двойственности, Марчевский (в работе 1937 г. «Об абсолютно измеримых множествах и функциях» [20]) выделяет абсолютно измеримые и абсолютно нулевые множества, которые в теории меры соответствуют множествам со свойством Бэра в широком смысле. Марчевский называет его абсолютным свойством Бэра.

Рузевичу принадлежит теорема о том, что с помощью суперпозиции измеримых функций можно получить любую функцию действительного переменного. Но и суперпозиция измеримых функций тоже является измеримой функцией.

Первое исследование по этой теме принадлежит Марчевскому – это его диссертация, результаты которой изложены в работе [21], а также в послевоенных работах.

Серпинский и Марчевский в работе 1936 г. «Замечание к проблеме меры» [22] доказали существование абсолютно нулевого множества [23], имеющего мощность континуума. Они ввели понятие наследственного класса (класс K множеств называется наследственным, если всякое подмножество произвольного множества, принадлежащего к K, также принадлежит к K) и доказали следующую теорему: «Существует линейное несчетное множество, каждый линейный образ которого достигается взаимно однозначным преобразованием; обратное преобразование, измеримое по Борелю, будет иметь лебеговскую меру нуль».

Эта теорема обеспечивает без применения гипотезы континуума более простое доказательство теорем Банаха, Куратовского и Улама о мере. В силу

[17] *Pontrjagin, L., Schnirelmann, L.* Sur une propriété métrique de la dimension // Annals of Mathematics. 1932. Vol. 33. No. 1. P. 156–162.

[18] *Marczewski, E.* [Szpilrain.] La dimension et la mesure // Fundamenta Mathematicae. 1937. T. 28. P. 81–89.

[19] *Marczewski, E.* [Szpilrain] Sur l'extension de la mesure lebesguienne // Fundamenta Mathematicae. 1935. T. 25. P. 551–558.

[20] *Marczewski, E.* [Szpilrain.] O zbiorach i funkcjach bezwzględnie mierzalnych // Sprawozdania z posiedzec Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Widz. 3. 1937. T. 30. S. 39–68.

[21] *Marczewski, E.* [Szpilrain.] Sur la mesurabilitè et condition de Baire // Comptes rendus du 1-er Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves. Warszawa, 1929–1930. P. 297–303.

[22] *Marczewski, E.* [Szpilrain.], *Sierpiński, W.* Remarque sur le problème de la mesure // Fundamenta Mathematicae. 1936. T. 26. P. 256–261.

[23] Множество N из X называется абсолютно нулевым, если каждая мера Бореля в X уничтожается в точках существования B-множеств E из X таких, что N содержится в E, и мера E равна нулю.

этих теорем кроме функции, тождественно равной нулю, не существует никакой другой неотрицательной, конечной и вполне аддитивной на семействе функции множества всех подмножеств множества мощности $\aleph_1$, которая становится нулем для множеств, сводящихся к точке. Серпинский и Марчевский приводят также простой пример абсолютно нулевого множества действительных чисел мощности $\aleph_1$. Эта известная теорема доказана впервые при допущении гипотезы континуума Банахом и Куратовским, а затем Уламом – без этой гипотезы: множество Лузина мощности $\aleph_1$, имеющее первую категорию на любом совершенном множества, является абсолютно нулевым множеством.

Исследованию особых множеств, в том числе множества Лузина и множества Серпинского, посвящено несколько работ Марчевского. Первой в 1934 г. он опубликовал «Замечания о вполне аддитивных функциях множества и о множествах, обладающих свойством Бэра» [24]. В ней Марчевский обобщил на случай произвольной меры борелевские меры в S, становящиеся нулем в точке, и благодаря этому получил новый способ доказательства теоремы Банаха и Куратовского, из которого следует, что это обобщение верно для каждого множества Лузина. Следующей шаг был сделан в статье «О классах функций Серпинского и соответствующем классе множеств» [25].

В последующих работах Марчевский выделил общие свойства множеств меры нуль и множеств первой категории и их связь со свойством Бэра.

Труды Отто Никодима

Отто Марцин Никодим (точнее Никодым) (1889–1974) закончил Львовский университет, где был учеником Серпинского. С 1911 по 1930 г. жил в Кракове и преподавал в гимназии, с 1924 г. – в университете. Несмотря на существование в Кракове Математического общества, одним из основателей которого был Никодим, он тяготел к варшавским математикам и прежде всего к своему учителю Серпинскому.

1926/27 учебный год Никодим провел в Сорбонне, после чего получил в Варшаве звание доцента. После 1930 г. жил там же, преподавал в университете, где читал различные курсы математики и физики (например, в 1933 г. – курс теории дифференциальных уравнений и курс теоретической физики). Кроме того, он проводил занятия для учителей на курсах Министерства просвещения, читал там методику преподавания математики и аксиоматическую геометрию. Ему принадлежит трехтомное руководство по методике преподавания математики в высшей школы (издано только два тома).

До 1939 г. Никодим опубликовал 33 научных работы и 4 учебника. Его научная деятельность охватывала самые различные области: теорию по-

---

[24] *Marczewski, E.* [Szpilrain.] Remarques sur les fonctions complètement additives d’ensemble et sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire // Fundamenta Mathematicae. 1934. T. 22. P. 503–511.

[25] *Marczewski E.* [Szpilrain.] Sur un classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d’ensembles // Fundamenta Mathematicae/ 1935. T. 24. P. 17–34.

тенциала, теорию множеств, теорию меры, теорию структур, булевы алгебры, действительные функции, аналитические функции, гармонические функции, вариационное исчисление, дифференциальные уравнения в частных производных, тензорное исчисление, математическую физику, дидактику (т. е. методику преподавания) и популяризацию математики, физики и логики.

В 1946 г. Никодим эмигрировал: сначала в Бельгию, затем во Францию, где работал профессором в Национальном центре научных исследований, а в 1947 г. – в США, где с 1948 по 1965 г. преподавал в частном Кеньон-колледже (Огайо). В 1965 г. он был приглашен в Италию, где один семестр читал лекции по теории меры в Неаполитанском университете. В 1965 ушел с преподавательской работы и переехал в Ютику, штат Нью-Йорк, где продолжал заниматься научными исследованиями по заказу Комиссии по атомной энергии США. В 1966 г. Никодим выпустил большую монографию «Математический аппарат квантовых теорий».

Наиболее известным результатом Никодима является теорема, носящая его имя. Необходимые и достаточные условия представимости данной функции в виде неопределенного интеграла от некоторой функции действительного переменного были даны Лебегом в 1904 г. в его «Лекциях». В 1905 г. Витали изучил класс функций, обладающих этим свойством, и назвал их абсолютно непрерывными функциями. В 1919 г. И. Радон распространил условия Лебега и Витали на функции множеств. Однако Радон рассматривал только аддитивные функции множеств, измеримых в смысле Бореля в евклидовом пространстве, причем мера определялась только через аддитивные функции сегментов.

Теорема Никодима состоит в том, что каждая счетно-аддитивная и абсолютно непрерывная относительно некоторой меры функция множества может быть выражена интегралом. Свое наименование теорема получила по инициативе С. Сакса, а так как он писал преимущественно по-английски, то оно закрепилось в англоязычной литературе. В итальянской литературе встречается наименование «теорема Витали-Никодима», а во французской – «Лебега-Никодима». Сама теорема была опубликована в 1930 г. в статье Никодима «Одно обобщение интегралов И. Радона» [26].

Другим значительным открытием Никодима, вошедшим впоследствии в теорию оптимального программирования, было доказательство того, что в любом выпуклом и замкнутом подмножестве пространства Гильберта существует только один элемент с наименьшей нормой. Это открытие было обнародовано в его докладе «О принципе минимума в проблеме Дирихле», сделанном в 1931 г. на заседании Польского математического общества в Варшаве и вскоре опубликованном в «Ежегоднике Польского математического общества» [27].

Развитие понятий в направлении, определенном теоремой Радона-Никодима, продолжается и поныне.

---

[26] *Nikodym, O.* Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon // Fundamenta Mathematicae. 1930. T. 15. P. 131–179.

[27] *Nikodym, O.* Sur le principle de minimum dans le problème de Dririchlet // Annales de la Société polonaise de mathématique. 1931. T. 10. P. 120–121.

* * *

Значительные результаты польской математической школы 1918–1939 гг. были обусловлены методологией, созданной Серпинским и основанной на широком применении аксиомы выбора, гипотезы континуума, и изучением логически двойственных объектов. Школу Серпинского характеризует также приоритетное отношение понятий теории меры в теории множеств, взаимосвязь методов теории множеств, топологии и логики, а также активное использование теоретических результатов в приложениях. Успешной работе учеников Серпинского способствовал выработанный им метод, основанный на классификации математических утверждений по их зависимости от гипотезы континуума и аксиомы выбора, новые способы доказательств существования с использованием аксиомы выбора. Предпосылкой для успеха школы Серпинского было также обнаружение им в тридцатые годы логически двойственных явлений и объектов в математике, что позволило восполнять пробелы в теоретических сведениях о них.

Новаторство в избрании единой темы, методах и организации ее исследования и обусловили вхождение польской математической школы в число ведущих школ математики первой половины XX в.